This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 3408.54

BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
OF PORTSMOUTH, N. H.
(Class of 1842.)
11 May, 1886.

GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY

Lehrbuch

der

Variationsrechnung

und ihrer Anwendung

bei Unterſuchungen über das Maximum und Minimum.

Von

Dr. Friedrich Ludwig Stegmann,

ordentl. Profeſſor der Mathematik an der Univerſität zu Marburg.

Mit zwei Figurentafeln.

Kaſſel,

Verlag von J. Georg Luckhardt.

1854.

VI 3490
Math3408.54
MAY111880
Harvard

Quum enim Mundi universi fabrica sit perfectissima atque a Creatore sapientissimo absoluta, nihil omnino in mundo contingit, in quo non Maximi Minimive ratio quaepiam eluceat; quam ob rem dubium prorsus est nullum, quin omnes mundi effectus ex causis finalibus, ope Methodi maximorum et minimorum, aeque feliciter determinari queant, atque ex ipsis causis efficientibus.

Leonh. Euler.

Druck von Joh. Aug. Koch in Marburg.

353
46

Combination aus beiden, nämlich das Zeichen ∂, aber die Anordnung $\partial_y V$ wählen zu müßen, die übrigens, wenn ich nicht sehr irre, auch schon anderwärts angetroffen wird. Der nach allem x genommene totale Differentialquotient von $\partial_y V$, wenn nämlich V eine Function von $y, p, q, \ldots$ ist und wenn dabei $y, p, q, \ldots$ als Functionen von x gedacht werden sollen, ist dann zur Raumersparnis öfters nach einer vom Ohm vorgeschlagenen und auch von Andern häufig benutzten Schreibart durch $\frac{d\partial_y V}{dx}$ vorgestellt worden, öfters sogar, wo eine Verwechselung mit dem partiellen Differentialquotienten $\partial^2_{xy} V$ nicht möglich schien, durch $\frac{d\partial_y V}{dx}$, so daß dieser Ausdruck gleichbedeutend mit $\frac{1}{dx} d \frac{dV}{dy}$ ist.

Es ist in §. 56 (S. 281) bemerkt worden, daß man in jenen Entwickelungen, wo die sogenannten reinen Variationen zugleich mit den „gemischten" vorkommen, in der Wahl schwanken könne, ob die ersteren durch δ, die anderen durch ein neues Symbol zu bezeichnen seien, oder ob man umgekehrt verfahren solle. In der That stimmen hierin meine Vorgänger mit einander wenig überein. Ohm (Lehre vom Größten ꝛc. S. 112) bezeichnet in den fraglichen Fällen die reinen Variationen durch $\delta_1 y$, $\delta_1 p$, ... die gemischten durch δy, δp, ... Lagrange, in seinen Vorlesungen über die Functionenrechnung, deutet vorübergehend (p. 451) die gemischte Variation dadurch an, daß er den von ihm durch $\dot{y}$ vorgestellten Variationsquotienten in eine kleine Parenthese einschließt, also durch $(\dot{y})$; aber auf der folgenden Seite schon giebt er diese nur für einen Augenblick eingeführte Bezeichnung wieder auf. Strauch (Var.-Calc. I. 117 u. 120) wendet ebenfalls diese kleinen Parenthesen für die gemischten Variationen an, indem er $(\delta)y$, $(\delta)^2 y$ u. s. f. schreibt, allein er bedient sich dieser Bezeichnung nicht blos vorübergehend, wie Lagrange, um den Uebergang von den reinen Variationen zu den

gemiſchten zu vermitteln und dieſen letzteren alsdann wieder das gewöhnliche Zeichen δ zu überlaßen, ſondern im ganzen Buche bedeuten δy, δs ꝛc. blos reine Variationsquotienten. Dieſem bei dem erſten Anblicke ſehr conſequenten Verfahren können wir indeſſen nicht beipflichten, da nichts natürlicher iſt als daß man, wenn eine Curve AMB in eine wenig abweichende Geſtalt $A_1M_1B_1$ variirt und wenn M_1 der dem Punkte M $[x, y, s]$ entſprechende Punkt iſt, die Coordinaten von M_1 durch $x+\delta x$, $y+\delta y$, $s+\delta s$ bezeichnen werde. Dies iſt auch wirklich der allgemein von den andern Schriftſtellern, z. B. Lagrange in der Mécanique analytique, Ampère, Poiſſon befolgte Gebrauch, ſie bedienen ſich aber für die reine Variation $\delta y - p\delta x$ des Buchſtabens π, oder $\bar{\omega}$, oder ſie ſetzen $\delta y - p\delta x = \delta u$, Oſtrogradsky in ſeiner ſchätzbaren Abhandlung über die Variationen der mehrfachen Integrale wendet ſogar ein vorgeſchriebenes D an. Da uns nun die oben erwähnte Bezeichnung (δ) zweckmäßig erſchien, ſo iſt dieſelbe da, wo zwiſchen reinen und gemiſchten Variationen zu unterſcheiden iſt, für die erſteren benutzt worden, während die gemiſchten durch das einfache δ angezeigt werden. Misverſtändniſſe können daraus unmöglich entſtehen. Denn in jedem einzelnen Falle muß ohnehin feſtgeſetzt werden, ob der Werth der Variablen x, welche den geſuchten Functionen y, s, ... als Independente zu Grunde liegt, variiren ſoll oder nicht. Allgemein iſt nun $\delta y = (\delta)y + p\delta x$; ſo lange alſo, wie in unſerm zweiten bis vierten Capitel, $\delta x = 0$ genommen werden ſoll, reducirt ſich δy auf die reine Variation.

Man wird in dieſer Darſtellung der Variationsrechnung die Anzahl der weitläufigen Formeln nicht ſehr groß finden. Von vielen gliederreichen Gleichungen, welche nur kurz angedeutet worden ſind, kann man füglich bezweifeln, ob ſie jemals eine praktiſche Anwendung finden würden, und andererſeits folgt ihre Entwickelung ſo leicht aus den richtig verſtandenen Principien,

daß ſogar vom theoretiſchen Geſichtspunkte denſelben ein beſonderes Intereſſe nicht zugeſprochen werden kann. Einen verhältnismäßig deſto größern Raum habe ich der Auflöſung einzelner Aufgaben gegönnt. Dieſe ſind, neben einigen aus dem Strauch'ſchen Werke entlehnten*), und einigen anderen, die ich, um bei gewißen Gelegenheiten zur Erläuterung einer allgemeinen Theorie ein geeignetes Beiſpiel zu haben, ſelbſt bilden mußte, größtentheils diejenigen Aufgaben, die man die klaſſiſchen nennen könnte, inſofern ſie ſchon von Euler in der **Methodus inveniendi curvas Maximi Minimive proprietate gaudentes** behandelt und allen ſpäteren Schriften zu Grunde gelegt die hauptſächlichſte Veranlaßung zur weiteren Ausbildung der Variationsrechnung gegeben haben. Die älteren Bearbeitungen derſelben laßen freilich gar Manches zu wünſchen übrig; denn indem man ſich meiſtens begnügte, die allgemeine Beſchaffenheit der verlangten Maximums- oder Minimumscurve gefunden zu haben, ließ man die Gränzgleichungen unbeachtet, gieng demnach auf die Beſtimmung der durch Integration der Hauptgleichung eingeführten Conſtanten nicht näher ein, obwohl von deren Werthen die Geſtalt ſo wie die Lage der fraglichen Curve vorzugsweiſe abhängt, und ſah endlich auch von der Prüfung, ob wirklich ein Maximum oder ein Minimum oder keines von beiden gefunden worden ſei, gänzlich ab, — lauter bedenkliche Mängel, gegen welche zuerſt Dirkſen, jedoch nur theilweiſe, neuerdings vorzüglich Strauch mit Entſchloßenheit und Ausdauer angekämpft haben. Es iſt mir auf dieſem Felde manche kleine Ausbeute geglückt, durch welche das von meinen Vorgängern überlieferte Material zu ergänzen war. Deshalb dürfte aber auch eine etwas größere Ausführlichkeit von gerechtem Tadel kaum getroffen werden, ſelbſt wenn

*) Es gilt dieſes namentlich auch, was im Buche nicht angemerkt iſt, von den Aufgaben des §. 12 und §. 15, die in Strauch's Var.-Calc. als Aufg. 1, 76, 85, 86 aufgeführt ſind.

man bemerken wollte, daß bei der Befolgung anderer Grundsätze die Anzahl der Aufgaben, ohne Vergrößerung des Volumens des Buchs, hätte vermehrt werden können. Denn daß man zugleich eine Aufgaben-Sammlung hier wiederfinde, konnte zufolge der oben angedeuteten, leitenden Idee gar nicht in der Absicht des Verfaßers liegen. Die Entwickelung der allgemeinen Theorie erschien durchgängig als die Hauptsache, und die eingeflochtenen Beispiele und Aufgaben sollten blos dazu dienen, um die ausgesprochenen Behauptungen zu bestätigen, die Anwendung der aufgestellten Regeln an einem Exempel zu zeigen, die besondern Ausnahmsfälle beßer aufzuklären. Höchstens ließ sich noch der Zweck damit verbinden, die Auflösungen der aufgenommenen Aufgaben so abzurunden, daß sie den Anfängern gleichsam als Muster dienen könnten, wonach sie die Bearbeitung der ihnen vorkommenden Probleme ähnlicher Art einzurichten versuchen müßten.

Wo sich sonst im Einzelnen die Untersuchung an die Forschungen anderer Gelehrten im Gebiete der Analysis oder der analytischen Geometrie anschloß, da wird man in den Noten die gehörigen Citate finden. Auf diese Anzeigen ist eine größere Sorgfalt verwendet worden, als es bisher in mathematischen Lehrbüchern der Gebrauch mit sich brachte, nicht blos damit der noch weniger bewanderte Leser erfahre, wem die betreffende Bereicherung der Wißenschaft zu danken sei, sondern auch damit er sich hinreichend orientirt fühle, die Quellen selbst anzugehen. Ebendeshalb erscheinen vielleicht auch einige andere in den Noten gegebene literärische Nachweisungen als eine angenehme Zugabe.

Da ein hauptsächlicher Gebrauch von der Rechnung mit Variationen in der theoretischen Mechanik gemacht wird und da hierbei die Variationen selbst nicht immer ganz in einerlei Sinn genommen werden, so habe ich geglaubt den Nutzen, welchen die vorliegende Arbeit etwa stiften könnte, durch Zufügung eines hierauf bezüglichen Anhangs zu erhöhen. Man wird darin auf

einem verhältnismäßig engen Raume mehrere Fundamentalsätze der analytischen Mechanik entwickelt und das Verständnis dieser Entwickelungen, so weit es sich um die durch das Zeichen δ angezeigten Operationen handelt, durch eine kurze Auseinandersetzung erleichtert finden. Wenn z. B. bei der Begründung des Satzes von der kleinsten Wirkung in klassischen Werken, wie **Laplace Méc. cél. (L. I, No. 23)** und **Pontécoulant Théorie analytique du Système du monde (T. I p. 50 et p. 100)** blos gesagt wird: **Si l'on différentie par rapport à la caractéristique δ l'équation**

$$v^2 = \text{Const.} + 2\int(X dx + Y dy + Z ds)$$

(oder auch die Gleichung

$$\Sigma m v^2 = \text{Const.} + 2\int \Sigma(X dx + Y dy + Z ds)$$

welche dem allgemeinern Falle entspricht), **on aura**

$v\delta v = X\delta x + Y\delta y + Z\delta s$ **resp.** $\Sigma m v\delta v = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta s)$

so ist der eigentliche Gedanke, den man mit dieser Operation zu verbinden habe, ziemlich verhüllt, und manchem Leser kommt wohl eine Erläuterung, wie die in unserm §. 84 gegebene, nicht unwillkommen.

Einige kleine Unregelmäßigkeiten in typographischer und orthographischer Hinsicht, welche kaum störend sein werden, wolle der geneigte Leser mit der Schwierigkeit des Drucks und der Correcturverhältnisse entschuldigen. Besondere Erwähnung verdient hierbei das Wort Differential. Erst nach Vollendung der ersten Abtheilung des Buchs wurde der Verf. gewahr, daß eine von ihm angenommene Gewohnheit, die Endsylbe jenes Worts mit einem z zu schreiben, in den Druck übergegangen ist. In der zweiten Hälfte (von S. 169 an) wurde alsdann die gewiß richtigere Schreibart adoptirt. Es kann wegen dieser Ungleichheiten weder den fleißigen und aufmerksamen Setzer noch die Officin ein Vorwurf treffen. Einige andere Verbeßerungen sind am Ende des Buchs angezeigt.

Endlich glaubt der Verf. hier noch eine Bemerkung in Beziehung auf die in §. 34 behandelte Aufgabe machen zu müßen. Es ist daselbst durch zweimalige Integration die Gleichung

$$dx = -\frac{2ap+2b}{(1+p^2)^2}\,dp \qquad \text{oder} \qquad -\frac{(1+p^2)^2}{q} = 2ap+2b$$

gefunden worden (Seite 135) Man hätte sich aber, weil V von x und y frei ist, streng genommen an die allgemeine Gleichung (1.β) des §. 30 halten sollen. Da

$$V = \frac{(1+p^2)^2}{q}, \qquad \partial_q V = -\frac{(1+p^2)^2}{q^2}, \qquad \text{also} \qquad \partial_q V.q = -V$$

ist, so reducirt sich die genannte Gleichung auf

$$C_1 p - 2V = C_1 p - \frac{2(1+p^2)^2}{q} = C_2$$

was mit dem obigen Resultate identisch wird, sobald man $C_1 = -4a$, $C_2 = 4b$ setzt. Durch diese Bezugnahme auf §. 30 würde augenscheinlich die Rechnung abgekürzt worden sein.

Marburg, im Juni 1854.

Inhalt.

Erstes Capitel.

Seite

Von den Variationen überhaupt. (§. 1 bis §. 5).

Erklärungen und Fundamentallehrsätze §. 1 bis §. 4 1

Uebersicht der in den folgenden Capiteln durchzuführenden Untersuchungen. §. 5 9

Zweites Capitel.

Von den Variationen der Ausdrücke, worin Functionen einer einzigen Independenten, jedoch keine Integralien vorkommen. (§. 6 bis §. 22).

Variationen von $U = F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots)$

§. 6 bis §. 7 11

Anwendung derselben zur Bestimmung des Maximum oder Minimum von $U = F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots)$ §. 8 bis §. 13 . 18

Hülfsmittel zur Prüfung, ob ein Maximum oder ein Minimum gefunden worden sei. §. 14 41

Noch zwei Aufgaben zur Erläuterung der vorhergehenden Theorie. §. 15 45

Betrachtung der Fälle, wenn die Variationen $\delta y, \delta p, \ldots$ gewißen Beschränkungen unterworfen sind. §. 16 bis §. 18 . . . 53

Aufgaben, bei denen der zu einem Maximum oder Minimum zu machende Ausdruck U auch einige der Größen y_α, y_ξ, p_α, p_ξ, q_α, ꝛc. enthält. §. 19 bis §. 20 70

Maximum oder Minimum von $U = F(x, y, p, q, \ldots z, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots)$ §. 21 bis §. 22. 77

Seite

Drittes Capitel.

Variationen der einfachen Integrale von der Form $\int_a^\xi V dx$, wenn $V = F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots)$ gegeben iſt. (§. 23 bis §. 38).

Beſtimmung des Maximum und Minimum dieſer Integrale, wenn keine Beſchränkungen für die Variationen Statt finden (Abſolutes Maximum oder Minimum). §. 23 bis §. 25 84

Beiſpiele zu dieſer Theorie. §. 26 und §. 27 93

Prüfung, ob ein Maximum oder ein Minimum gefunden ſei. §. 28 bis §. 29. 102

Allgemeine Betrachtungen über die ſogenannte Hauptgleichung. §. 30 112

Unterſuchung der Fälle, wenn $V dx$ ungeachtet der Unbeſtimmtheit von y, $\frac{dy}{dx}$, ꝛc. ein unmittelbar integrabler Ausdruck iſt. §. 31 bis §. 32 118

Noch zwei Aufgaben über das Maximum oder Minimum von $\int V dx$. §. 33 und §. 34 132

Unterſcheidung des Maximum vom Minimum nach Jacobi. §. 35 bis §. 38. 142

Viertes Capitel.

Von der Beſtimmung des Maximum oder Minimum bei Combinationen einfacher Integralien, oder wenn gewiße Beſchränkungen vorgeſchrieben ſind. (§. 39 bis §. 53).

Relatives Maximum und Minimum (iſoperimetriſche Probleme) §. 39 bis §. 42. 165

Bedingungsgleichungen von der Form $\Theta(\xi, \alpha, y_\xi, y_\alpha, p_\xi, p_\alpha, \ldots) = 0$. §. 43 bis §. 44 187

Maximum und Minimum von $\int V dx$, wenn in V außer y, p, q, ꝛc. noch eine zweite variirende Function von x nebſt ihren Differentialquotienten enthalten iſt. §. 45 bis §. 49 . . . 196

Maximum oder Minimum von $\int F(Z, x, y, p, q, \ldots) dx$ wobei $Z = \int f(x, y, p, q, \ldots) dx$ iſt. §. 50 242

Seite

Maximum oder Minimum von $U = \int V dx$, wenn eine Differentialgl. $\Theta(\int V dx, V, \frac{dV}{dx}, \ldots x, y, p, \ldots) = 0$ gegeben ist. §. 51 249

Maximum oder Minimum von $\int V dx$, wenn V außer den Variablen $x, y, p, \ldots s, p, \ldots$ auch einen oder einige der Gränzwerthe $y_\xi, y_\alpha, p_\xi, \ldots s_\xi, s_\alpha, p_\xi, \ldots$ enthält. §. 52 253

Noch eine Aufgabe über relatives Maximum und Minimum. §. 53 258

Fünftes Capitel.

Von den mit gleichzeitigen Aenderungen der independenten Variablen gemischten Variationen. (§. 54 bis §. 67).

Allgemeine Betrachtungen. Unterscheidung zwischen „reiner" und „gemischter" Variation. Anwendung auf die im zweiten Capitel besprochenen Aufgaben über das Maximum und Minimum von $U = F(x, y, p, q, \ldots)$ §. 54 bis §. 57 265

Anwendung auf die Gränzenbestimmung bei den im dritten und vierten Capitel behandelten Problemen über das Maximum oder Minimum von $\int V dx$. §. 58 bis §. 65 287

Prüfungsmittel für das fragliche Maximum oder Minimum. §. 66 bis §. 67 321

Anhang zum dritten, vierten und fünften Capitel.

Ueber gewiße andere Betrachtungsweisen, auf welche man manchmal die Bestimmung des Maximum oder Minimum von $\int V dx$ gegründet hat. (§. 68 bis §. 69). 327

Sechstes Capitel.

Von den Variationen der Functionen von zwei Independenten. (§. 70 bis §. 80).

Reine und gemischte Variation einer Function der beiden Independenten x und y. §. 70 338

Seite

Bestimmung des Maximum oder Minimum von $U = F(x, y, z, p, q, r \ldots)$ worin $z = f(x, y)$, $p = \frac{dz}{dx}$, $q = \frac{dz}{dy}$, $r = \frac{d^2z}{dx^2}$ u. s. w. ist. §. 71 bis §. 72 343

Variation des Doppelintegrals $U = \int_{\alpha}^{\xi}\int_{\beta}^{\eta} V dy dx$, worin V eine gegebene Function von x, y, z, p, q, r, s, t ist; und Anwendung derselben zur Bestimmung des Maximum oder Minimum von U, unter der Voraussetzung, daß β und η gegebene Functionen von x seien. §. 73 bis §. 77 347

Gränzbestimmungen, wenn $\beta = \chi_1(x)$, $\eta = \chi_2(x)$ nicht gegeben sind. Betrachtungen über eine variirende geschloßene Gränzcurve auf der gesuchten Fläche. §. 78 bis §. 80 379

Anhang.

Ueber den Gebrauch der Variationen in der theoretischen Mechanik. (§. 81 bis §. 84). 396

Erſtes Capitel.

Von den Variationen überhaupt.

§. 1.

Die ganze Lehre von der Differenzial- und Integralrechnung und deren Anwendungen auf geometriſche Gegenſtände hält ſich an die Vorſtellung feſt, daß das Geſetz der Abhängigkeit unter den verſchiedenen Variablen, alſo die Form der Functionen, mit deren Differenzialien man rechnet, während des ganzen Verlaufs der Rechnung ungeändert bleibe. Es giebt aber verſchiedene Arten von Problemen, deren Behandlung erfordert, daß man jene Vorſtellung aufgebe, und die Form der in dem Calkul vorkommenden Functionen ſelbſt allmähligen Veränderungen unterwerfe.

Um ſich hier gleich Anfangs einen Begriff von der Beſchaffenheit ſolcher Aufgaben zu machen, welche die Nothwendigkeit mit ſich führen, die Form einer Function als etwas Unbeſtimmtes und Veränderliches aufzufaßen, betrachte man eines der in den Anwendungen der Integralrechnung auf geometriſche Fragen vorkommenden allgemeinen Integralien, wie

$$\int y dx, \qquad \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} \text{ u. dgl.}$$

Wenn hier y als eine beſtimmte Function von x gedacht wird, und wenn man in Fig. 1) $OH = \alpha$, $HA = \beta$, $OK = \xi$, $KB = v$ ſetzt, ſo wird das Integral $\int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$, ſobald es zwiſchen den Grenzen $x = \alpha$ und $x = \xi$ genommen wird, die Länge des Bogens AB angeben.

Wenn nun aber $y = f(x)$ nicht der Form nach gegeben ist, sondern gefragt wird, wie diese Function $f(x)$ beschaffen sein müße, damit der zwischen den gegebenen Punkten A und B gelegene Bogen ein Minimum werde; so müßen wir die unendliche Mannigfaltigkeit aller möglichen, zwischen A und B zu ziehenden Curven in Gedanken vorüber gehen laßen, um daraus die verlangte auszusuchen, und es ist, während wir von einer dieser Curven auf die nächste übergehen, nicht der Werth von x, sondern die Form der Function $f(x)$ das Veränderliche.

Der Inbegriff derjenigen Lehren, welche sich auf die Aenderungen im Gesetz der unter den Variablen stattfindenden Abhängigkeit beziehen, bildet den Gegenstand der Variations-Rechnung; sie giebt daher die Anweisung zu einer methodischen Auflösung solcher Probleme, wie sie so eben angedeutet worden sind.

Die Form einer Function mag nun zwar nicht unmittelbar als eine Größe erscheinen, welche einer numerischen Bestimmung fähig wäre und worüber sich rechnen ließe. Allein man bedenke, daß wenn an die Stelle der Function $f(x)$ eine mehr oder weniger verschiedene Function $F(x)$ gesetzt und dem Argument x irgend ein beliebig angenommener Werth ertheilt wird, der zugehörige Werth von y, nach der Gleichung $y = F(x)$ berechnet, anders werde, als wenn man zwischen y und x die Gleichung $y = f(x)$ Statt finden ließ. Diese Werthänderungen von y sind offenbar einer numerischen Bestimmung fähig, und durch sie, als Wirkungen der Aenderungen der Functionsformen, werden diese letztern, als wirkende Ursachen, auf Maß und Zahl zurückgeführt.

§. 2.

Im Einklange mit dem eben Gesagten würden wir daher, um eine Grundlage für die theoretische Untersuchung zu bilden, nur darauf hinzudeuten haben, daß jeder Uebergang von einer Function zu einer folgenden geänderten Function dadurch angezeigt werden kann, daß zur erstgedachten Function irgend eine zweite addirt wird.

Denn es sei ursprünglich

$$y = f(x)$$

wobei man, um etwas bestimmtes vor Augen zu haben, y als die Ordinate einer Curve denken möge. Wenn man nun von dieser fortschreitet zu einer mehr oder weniger geänderten Curve

$$Y = F(x)$$

so ist

$$Y = y + [F(x) - f(x)]$$

wobei $[F(x) - f(x)]$ irgend eine Function von x vorstellt. Bezeichnen wir diese durch νy, so ist

$$Y = y + \nu y$$

und hier können wir νy die endliche Variation von y nennen (analog der endlichen Differenz Δy, welche einem endlichen Zuwachse von x entspricht).

Man kann aber auch, um von der ursprünglich gedachten Function $f(x)$ zu einer geänderten Function $F(x)$ überzugehen, noch eine andere Betrachtungsweise zu Grunde legen, welche weit nützlichere Dienste leisten wird, weil wir dadurch in den Stand gesetzt werden, den erwähnten Uebergang von einer Function zur anderen continuirlich, nicht sprungweise, zu bewerkstelligen, so daß wir zu unendlich kleinen Variationen geführt werden, welche den Differenzialien zu vergleichen sind, und welche in eben dem Maße eine fruchtbarere Anwendung möglich machen, wie der Gebrauch der Differenzialien den Gebrauch endlicher Differenzen übertrifft.

Es steht nämlich kein Hindernis im Wege, sich eine solche Function von x und einer ganz unbestimmten, sonst noch gar nicht in der Rechnung vorkommenden Größe t zu denken, welche für einen bestimmten Werth von t, z. B. für $t = 0$ oder allgemeiner für $t = k_0$ sich auf die ursprünglich gedachte Function $f(x)$ reducirt, für einen andern Werth aber, z. B. für $t = k_1$ sich in eine gegebene zweite Function $F(x)$ verwandelt. Wenn z. B.

$$f(x) = \frac{a^2 + 3x^2}{x} \text{ und } F(x) = b\log\left(\frac{x}{a}\right)$$

sein sollte, so würde die Function

$$\left(\frac{t - k_1}{k_0 - k_1}\right)^{\mu}\left(\frac{a^2 + 3x^2}{x}\right) + \left(\frac{t - k_0}{k_1 - k_0}\right)^{\nu} b\log\left(\frac{x}{a}\right)$$

die verlangte Eigenschaft besitzen, denn sie geht über

$$\text{für } t = k_0 \text{ in } \frac{a^2 + 3x^2}{x} = f(x)$$

$$\text{für } t = k_1 \text{ in } \quad b\log\left(\frac{x}{a}\right) = F(x)$$

was man immer den beliebigen, jedoch positiv gedachten Exponenten μ und ν für Werthe beilegen mag.

Auch ließe sich eben dieses Verfahren gebrauchen, wenn es sich

darum handelte, $f(x)$ in zwei oder mehr verschiedene Functionen $F_1(x)$, $F_2(x)$ ... übergehen zu laßen; z. B. die Function

$$\frac{(t-k_1)^\lambda(t-k_2)^\mu}{(k_0-k_1)^\lambda(k_0-k_2)^\mu}\cdot\frac{a^2+3x^2}{x}+\frac{(t-k_0)^\nu(t-k_2)^\pi}{(k_1-k_0)^\nu(k_1-k_2)^\pi}\cdot bl\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$+\frac{(t-k_0)^\varrho(t-k_1)^\sigma}{(k_2-k_0)^\varrho(k_2-k_1)^\sigma}\cdot a\ \text{Arc Sin}\left(\frac{b-x}{b}\right)$$

giebt für $t=k_0$ die Function $\frac{a^2+3x^2}{x}=f(x)$

$t=k_1$ „ „ $bl\left(\frac{x}{a}\right)=F_1(x)$

$t=k_2$ „ „ $a\ \text{Arc Sin}\frac{b-x}{b}=F_2(x)$

was man auch immer den beliebigen, jedoch positiv gedachten Exponenten λ, μ, ν, π, ϱ, σ für Werthe beilegen mag.

Die hier beispielsweise aufgestellten Functionsformen würden auch noch brauchbar sein, wenn eine der Zahlen k_0, k_1, k_2 ... gleich Null sein sollte; und da wir bei den folgenden Untersuchungen fortwährend annehmen, daß für $t=0$ die bestimmte, obwohl anfangs unbekannte Function $f(x)$ zum Vorschein komme, welche einer zur Variationsrechnung gehörigen Aufgabe (§. 1) Genüge leistet, so möge gleich hier unter k_0 die Null gedacht werden, während k_1, k_2, k_3 ... andere positive oder negative Zahlen vorstellen.

Bezeichnen wir nun allgemein durch $\Phi(x, t)$ eine Function von solcher Beschaffenheit, daß die Forderung, sie solle bald diese bald jene Gestalt annehmen, durch verschiedene Werthe von t befriedigt werden kann; so wird ein continuirlicher Uebergang von $f(x)$ in andere Functionen $F_1(x)$, $F_2(x)$.. dadurch herbeigeführt werden, daß wir t in Gedanken durch alle zwischen 0, k_1, k_2 u. s. f. liegenden Zahlwerthe hindurchgehen laßen. Alsdann besteht also, um bei der oben benutzten geometrischen Auffaßung zu bleiben, für alle Punkte der ursprünglich gedachten Curve die Gleichung

$$y=f(x)=\Phi(x, 0)$$

und die unendlich kleine Variation von y ist nichts anderes als das nach t genommene partielle Differenzial $\frac{d\Phi(x,t)}{dt}\,dt$, so jedoch, daß man nach ausgeführter Differenziation in der Function $\frac{d\Phi(x,t)}{dt}$ überall den Werth

$k_0 = 0$ an die Stelle von t zu setzen hat, da der gedachte unendlich kleine Zuwachs von y sich gegenwärtig auf denjenigen Werth der Function $\Phi(x, t)$ bezieht, welcher dem bestimmten Werth der independenten Variablen $t = k_0 = 0$ zugehört. — Hierdurch wird sich offenbar $\frac{d\Phi(x, t)}{dt}$ in irgend eine Function von x verwandeln, welche wir durch $\left(\frac{d\Phi(x, t)}{dt}\right)_0$ vorstellen könnten, aber größerer Kürze wegen im Folgenden gewöhnlich durch $\Omega(x)$ bezeichnen werden, und welcher in der Regel eine ganz unbestimmte Form in Gedanken beizulegen sein wird, da bei allen Anwendungen des Variationscalculs niemals eine bestimmte Function $F(x)$ gegeben sein wird, in welche die ursprünglich gedachte Function $f(x)$ übergehen soll, da also $F(x)$ selbst ganz beliebig angenommen werden kann*). So würde, um dies an einem einzigen ganz einfachen Beispiel zu erläutern,

$$\Phi(x, t) = \frac{(k-t)^3}{k^3} f(x) + \frac{t}{k} F(x)$$

eine Function von x und t sein, welche für $t = 0$ in $f(x)$ und für $t = k$ in $F(x)$ übergeht. Daraus folgt

$$\frac{d\Phi(x, t)}{dt} = -\frac{3(k-t)^2}{k^3} f(x) + \frac{1}{k} F(x)$$

also

$$\Omega(x) = -\frac{3}{k} f(x) + \frac{1}{k} F(x)$$

und hier ist, so lange $F(x)$ willkührlich gedacht werden darf, auch $\Omega(x)$ willkührlich annehmbar.

Uebrigens würde es auch eine allzu enge Auffaßung sein, wenn man sich denken wollte, die variirende Function $\Phi(x, t)$ solle in allen Fällen auf die vorhin erklärte Weise gebildet werden. Denn wir hatten jene Gestalt von $\Phi(x, t)$ nur beispielsweise benutzt, und es ließen sich noch manche andere, unter Umständen sogar weit bequemere Bildungsweisen ersinnen.

Wenn z. B.	continuirlich übergehen sollte in	so könnte man annehmen
$f(x) = x^m$	$F(x) = (x+a)^m$	$\Phi(x, t) = (x+at)^m$
$f(x) = x^m$	$F(x) = x^{m+n}$	$\Phi(x, t) = x^{m+nt}$
$f(x) = \mathrm{Sin}\, x$	$F(x) = \mathrm{Sin}\, x\, \mathrm{Cos}\, x$	$\Phi(x, t) = \mathrm{Sin}\, x\, \mathrm{Cos}\, tx$

*) Vgl. jedoch wegen gewisser Beschränkungen §. 18. 19.

und dabei das Argument t von $t = 0$ bis $t = 1$ wachsen laßen. Und um auch noch auf die Variationen der Functionen von zwei Independenten, $s = f(x, y)$, einen Blick zu werfen, so würde, wenn z. B.

$$s = f(x, y) = a \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} y$$

continuirlich übergehen sollte in $F(x, y) = (a - c) \operatorname{Cos}(x + y)$, etwa angenommen werden können

$$\Phi(x, y, t) = (a - ct)\,[\operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} y - t \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y]$$

und dabei dem Argument t dasselbe Intervall von Null bis 1 anzuweisen sein.

Wir wollen nun von jetzt an eine solche unendlich kleine Aenderung einer Function $y = f(x)$, wie sie durch $\Omega(x)dt = \left(\frac{d\Phi(x,t)}{dt}\right)_0 dt$ so eben dargestellt worden ist, schlechthin die Variation von y nennen, und zu Folge der von Lagrange eingeführten Bezeichnung durch δy andeuten, so daß also zu

$$y = f(x)$$

sofort die Variation

$$\delta y = \Omega(x)\, dt$$

gehört, wobei $\Omega(x)$ eine unbestimmte Function von x vorstellt.

Ferner soll die vorher besprochene Function $\Phi(x, t)$, aus welcher durch die Annahme $t = 0$ das anfänglich gedachte $f(x)$ gewonnen wird, die variirende Function, und die unbestimmte Größe t das Variationsargument heißen; die Function $f(x)$ aber werden wir, je nachdem es der Gedanke zu fordern scheint, bisweilen die Function, welche variiren soll, bisweilen die variirte oder auch die ursprüngliche Function nennen.

Uebrigens wird man aus den hier entwickelten Grundbegriffen der Variationsrechnung, weil es blos darauf ankommt, die eine oder andere in der Untersuchung vorkommende Function $f(x)$, um ihre Variation zu erhalten, als einen besondern Fall einer allgemeineren Function $\Phi(x, t)$ zu denken, und diese letztere nach der Variablen t zu differenziiren, zuletzt aber $t = 0$ zu setzen, ohne Weiteres erkennen, daß alle für das Differenziiren feststehenden Regeln auch für das Variiren ihre Gültigkeit behalten. Was aber die der variirten Function $f(x)$ zu Grunde liegende Independente x anbelangt, so bleibt zwar, so oft wir von $y = f(x)$ auf den geänderten Werth $y + \delta y$ übergehen, jene Größe gänzlich unbestimmt und ist also beliebiger Werthe fähig, jedenfalls aber wird man dieser Variablen, wo

sie in $(y + \delta y)$ oder in δy vorkommt, eben denselben Werth beizulegen haben, welchen sie in y selbst besaß, wofern nicht etwa, wie das im fünften Capitel bei den sogenannten gemischten Variationen geschehen wird, ausdrücklich das Gegentheil hiervon vorgeschrieben werden sollte.

§. 3.

Um diese Begriffe weiter durch geometrische Anschauungen zu erläutern, weisen wir nochmals auf diejenigen Probleme hin, welche bereits in §. 1. angedeutet worden, z. B. die Aufgabe, durch die beiden gegebenen Punkte $A \begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \end{cases}$ und $B \begin{cases} x = \xi \\ y = v \end{cases}$ diejenige Curve zu ziehen, welcher die Eigenschaft zukommt, daß der Bogen AB die kürzeste Verbindungslinie zwischen A und B darstellt. Wenn hierbei OP (Fig. 1) eine beliebige Abscisse $= x$ und

MP die zugehörige, nach der Gleichung $y = f(x)$ zu berechnende Ordinate

aber $\mathfrak{M}\mathfrak{P}$ " " " " " $Y = F(x)$ " " "

ist, so wird, insofern wir uns den im vor. §. gegebenen Erklärungen zu Folge die Function $F(x)$ der erstgedachten $f(x)$ sich unendlich annähernd denken, die verschwindende Differenz $M\mathfrak{M}$ eine anschauliche Darstellung von $\delta y = Y - y$ sein, während dagegen, sobald wir uns die endliche Differenz PP′ im Zustande des unendlichen Abnehmens, nämlich $= dx$ denken, die verschwindende Differenz M′R die anschauliche Darstellung des gewöhnlichen Differenzials dy bildet.

Ebenso wird aber bei dem unendlichen Abnehmen von PP′ die Differenz $\mathfrak{M}'\mathfrak{R}$ in das Differenzial von Y nämlich in $d(y + \delta y)$ übergehen; und hieraus läßt sich, da $M'\mathfrak{M}'$ zugleich bei dem Uebergange von der Curve MM′ zur Curve $\mathfrak{M}\mathfrak{M}'$ als die Variation der Ordinate $M'P' = y + dy$ aufzufaßen ist, eine sehr wichtige Folgerung ziehen. Man gelangt nämlich durch diese Betrachtung zuvörderst zu den Gleichungen

$$\mathfrak{M}'P' = M'P' + \mathfrak{M}'M' = (y + dy) + \delta(y + dy)$$
$$\mathfrak{M}'P' = Y + dY = (y + \delta y) + d(y + \delta y)$$

also ist, da die Variation einer Summe offenbar aus der Summe der Variationen der Summanden bestehen muß,

$$y + dy + \delta y + \delta dy = y + \delta y + dy + d\delta y$$

woraus

$$d\delta y = \delta dy$$

fließt.

Die geometrische Bedeutung der Größe $d\delta y$ würde sein $M'\mathfrak{M}' - M\mathfrak{M}$, die Bedeutung von δdy aber $\mathfrak{M}'\mathfrak{N} - M'\mathfrak{R}$, und diese Differenz ist gleich $M'\mathfrak{M}' - R\mathfrak{N} = M'\mathfrak{M}' - M\mathfrak{M}$.

Man vermag aber diesen Lehrsatz auch durch rein analytische Schlüsse zu beweisen. Halten wir uns nämlich wieder an die in §. 2 erläuterte Vorstellung und denken uns eine variirende Function $\Phi(x, t)$, welche für $t = 0$ sich auf $f(x)$ reducirt, so ist $\delta y = \left(\frac{d\Phi(x,t)}{dt}\right)_0 dt = \Omega(x)\,dt$. Und da $(y + dy)$ in eben der Weise mit $(x + dx)$ zusammengehört, wie y mit x, so müßen wir ganz ebenso setzen

$$\delta(y + dy) = \Omega(x + dx)dt$$

daher wird

$$\begin{aligned}\delta(y + dy) - \delta y &= [\Omega(x + dx) - \Omega(x)]\,dt \\ &= d\Omega(x)\,dt\end{aligned}$$

also

$$\delta dy = d\Omega(x) \cdot dt$$

Indem man aber die Gleichung $\delta y = \Omega(x)dt$ unmittelbar nach x differenziirt, verhält sich dt als ein constanter Factor, welcher nur bewirkt, daß δy unendlich klein wird, und es ergiebt sich

$$d\delta y = d\Omega(x) \cdot dt$$

also ist

$$\delta dy = d\delta y$$

was zu beweisen war.

Unmittelbar hieraus folgt weiter

$$\delta d^2y = \delta d(dy) = d\delta dy = dd\delta y = d^2\delta y$$

hierauf

$$\delta d^3y = \delta d(d^2y) = d\delta d^2y = dd^2\delta y = d^3\delta y$$

und weil man offenbar beliebig weit mit diesen Schlüßen fortfahren kann, allgemein

$$\delta d^ny = d^n\delta y.$$

§. 4.

Es existirt ein Lehrsatz, welcher dem im vorhergehenden §. in Betreff des Differenziirens der Variationen gelehrten ganz analog ist, sich aber auf die häufig hintereinander folgenden Operationen des Variirens und Integrirens bezieht.

Wenn wir nämlich unter W eine sowohl der Operation des Diffe-

renzirens wie des Variirens zu unterwerfende Function denken, so ist nach dem vor. §. $d\delta W = \delta dW$ woraus mittelst Integration

$$\delta W = \int \delta dW$$

hervorgeht. Und wenn man jetzt unter W einen Integralausdruck, etwa $W = \int P dx$, oder $W = \int (P dx + Q dy)$ u. s. f. überhaupt $W = \int U$, versteht, so daß $dW = U$ wäre, so hat man auf der Stelle

$$\delta \int U = \int \delta U.$$

Dieses Resultat stimmt übrigens auch mit dem bekannten Satze der Integralrechnung, wonach $\frac{d \int U dx}{dt} = \int \frac{dU}{dt} dx$ ist, überein, weil

einerseits $$\delta \int U dx = \frac{\delta \int U dx}{dt} dt$$

andererseits $\delta U = \frac{dU}{dt} dt$, also $\int \delta U dx = dt \cdot \int \frac{dU}{dt} dx$

ist, sobald man nach der in Bezug auf t auszuführenden Differenziation $t = 0$ macht.

§. 5.

Wir haben bis hierher nur diejenigen Variationen in's Auge gefaßt, welche man nach dem Vorgange neuerer, um die Variationsrechnung verdienter Schriftsteller*) unmittelbare nennen kann, und welche dadurch entstehen, daß sich die Form einer zwar nicht bekannten, aber doch bestimmt gedachten Function $f(x)$ unendlich wenig ändert; dieselben haben die Form $\Omega(x)dt$, wobei $\Omega(x)$ eine ganz willkührliche Function bedeutet. Man wird aber im Voraus leicht einsehen, daß sich wegen der völligen Unbestimmtheit der Functionen $\Omega(x)$ aus solchen unmittelbaren Variationen keine weitere Resultate werden gewinnen laßen, und in der That sind es auch bei den Anwendungen des Variationscalculs auf geometrische Aufgaben vorzugsweise die sogenannten mittelbaren Variationen, aus denen man mit Hülfe weiterer Operationen die zum Ziele führenden Schlüße zieht. Nehmen wir an, es sei U eine gegebene Function der Variablen x, y und es solle darin y als eine bestimmte, jedoch der Form nach noch unbekannte Function von x, nämlich $y = f(x)$ gedacht werden,

*) Ohm Lehre vom Größten und Kleinsten. Berlin 1825. p. 89. Strauch in Grunert's Archiv Th. III p. 122 und in seinem größern Werke „Theorie und Anwendung des Variationscalculs“ (Zürich 1849) Th. I p. 97.

so läßt den vorhergehenden §§. zu Folge $y = f(x)$ die unmittelbare Variation $\delta y = \Omega(x)dt$ zu; aber dadurch daß man in der gegebenen Function U die Variable y in $y + \delta y$ übergehen läßt, ohne an x etwas zu ändern, wird offenbar U selbst irgend eine unendlich kleine Aenderung erfahren, und diese soll die mittelbare Variation der Function U genannt werden. Sie wird übrigens mittelst Vorsetzung desselben Symbols δ, also durch δU bezeichnet.

Gerade so verhält es sich auch in den verwickelteren Fällen, wo U eine gegebene Function von mehreren Variablen, also etwa $U = F(x, y, z, p, q, p \ldots)$ ist, und wobei $y, z, p, q, \ldots\ldots$ sämmtlich als gewisse, wiewohl der Form nach unbekannte Functionen von x gedacht werden sollen, oder auch, was ziemlich dasselbe ist, wobei y und z unbekannte Functionen von x, dagegen $p, q, p \ldots\ldots$ die Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dz}{dx}$ u. s. f. vorstellen sollen. Alsdann entsprechen den Variablen $y, z, p, q, \ldots\ldots$ die unmittelbaren Variationen $\delta y, \delta z, \delta p, \delta q, \ldots\ldots$; und sobald man jene Variablen gleichzeitig in

$$y + \delta y,\ z + \delta z,\ p + \delta p,\ q + \delta q, \ldots\ldots$$

übergehen läßt, so erleidet U eine mittelbare Variation, welche ebenfalls durch δU zu bezeichnen sein wird.

In beiden Fällen aber vermag man leicht mit Hülfe von bekannten Sätzen der Differenzialrechnung die Variation δU durch die freilich ganz unbestimmten Variationen $\delta y, \delta z, \delta p, \ldots\ldots$ darzustellen. Wir werden diese Untersuchungen in dem folgenden Capitel durchführen, wobei wir an der Voraussetzung festhalten, daß U ein gegebener Ausdruck von x und den noch unbekannten Functionen $y, p, \ldots z \ldots$ dieser Independenten sei, welcher sich also in eine ganz bestimmte Function der einzigen Variablen x verwandelt, sobald man für jene unbekannten Functionen bestimmte und der Natur einer vorgelegten Aufgabe entsprechende Ausdrücke gesetzt hat. Diese Voraussetzung trifft aber in einem gewissen Grade auch zu bei Integralausdrücken wie $U = \int F(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots)dx$; denn obwohl man hier die angezeigte Integration unmöglich beginnen kann, so lange man die Beschaffenheit von $y = f(x)$ nicht kennt, so würde doch umgekehrt, sobald $y = f(x)$ bekannt ist, auch U eine ganz bestimmte und wenn wir von den möglichen Hindernissen der Integration absehen, sogar gegebene Function der einzigen Variablen x sein. Daher werden wir

im dritten und vierten Capitel die Variationen solcher Integralausdrücke betrachten.

So wie wir aber bis hierher Functionen einer einzigen Variablen x in den Zustand des Variirens versetzt haben, so läßt sich auch bei Functionen von mehreren Variablen derselbe Proceß wiederholen, und den hierauf bezüglichen Regeln möge das sechste Capitel gewidmet sein. Im fünften dagegen werden wir den Fall betrachten, daß außer den zu variirenden Functionen auch noch gleichzeitig Statt findende Aenderungen der independenten Variablen in Rechnung gezogen werden müßen, wodurch man auf die bereits erwähnten gemischten Variationen geführt wird. Ueberall aber werden wir nach vorausgegangener Entwickelung der betreffenden Formeln sogleich die Anwendung derselben bei Untersuchungen über das Maximum und Minimum der Functionen erläutern, da man die Variationen nicht sowohl um ihrer selbst willen, als wegen ihres Gebrauchs bei der Auflösung von derartigen Aufgaben zu suchen pflegt.

Zweites Capitel.

Variationen der Ausdrücke, in denen Functionen einer einzigen Independenten, jedoch keine Integralien vorkommen.

§. 6.

I. Wir beginnen mit dem einfachsten Falle: es sei $U = F(x, y)$ gegeben, wobei y eine variirende Function von x vorstellt; man soll die im vorigen §. erklärte, mittelbare Variation δU darstellen.

Auflösung. Nach den vorausgeschickten Erklärungen geht U in $U + \delta U$ über, sobald man überall in $F(x, y)$ die Variable y in $y + \delta y$ übergehen läßt, d. h. sobald man das Variationsargument t, welches aber nirgends in $F(x, y)$ explicit vorhanden ist, sondern nur implicit in der variirenden Function $y = \Phi(x, t)$ gedacht wird, um ein Differenzial dt zunehmen läßt und dann $t = 0$ setzt. Es ist daher δU nichts anderes, als das nach t genommene Differenzial von U, insofern blos die in $F(x, y)$ erscheinende Variable y als variabel und selbst wieder als Function von t

gedacht wird. Indem man nun $F(x, y)$ blos nach y differenzirt, erhält man $\left(\frac{dU}{dy}\right)dy$ und da hierbei dy gleichbedeutend sein soll mit $\left(\frac{d\Phi(x,t)}{dt}\right)_0 dt$, so ist

$$\delta U = \frac{dU}{dy}\left(\frac{d\Phi(x,t)}{dt}\right)_0 dt = \frac{dU}{dy}\Omega(x)dt$$

d. h.

$$(1) \qquad \delta U = \frac{dU}{dy}\delta y$$

II. Es sei nun, um sogleich auch den allgemeinern Fall zu behandeln, U irgend eine gegebene Function der Variablen x, y, z und der Differenzialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = p \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = q \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = r \ldots$$

$$\frac{dz}{dx} = \mathfrak{p} \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = \mathfrak{q} \qquad \frac{d^3z}{dx^3} = \mathfrak{r} \ldots$$

wobei also y und z als gewiße, wiewohl noch unbestimmte Functionen der Independenten x, nämlich $y = f(x)$ und $z = \mathfrak{f}(x)$ gedacht werden mögen; man verlangt die mittelbare Variation δU.

Auflösung. Nehmen wir an, man erhalte durch Differenziation der gegebenen Function

$$U = F(x, y, p, q, \ldots z, \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \ldots)$$

einen Ausdruck von der Form

$$dU = M dx + N dy + P dp + Q dq + \ldots$$
$$+ \mathfrak{N} dz + \mathfrak{P} d\mathfrak{p} + \mathfrak{Q} d\mathfrak{q} + \ldots$$

wobei $M, N, P \ldots \mathfrak{N}, \mathfrak{P} \ldots$ lauter bestimmte und gegenwärtig sogar gegebene Functionen der in U erscheinenden Variablen $x, y, p, q, \ldots z, \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \ldots$ nämlich die partiellen Differenzialquotienten von U vorstellen, so daß

$$M = \frac{dU}{dx} = \partial_x U \qquad N = \frac{dU}{dy} = \partial_y U \qquad P = \frac{dU}{dp} = \partial_p U \ldots$$

$$\mathfrak{N} = \frac{dU}{dz} = \partial_z U \qquad \mathfrak{P} = \frac{dU}{d\mathfrak{p}} = \partial_{\mathfrak{p}} U \ldots$$

ist. Nun ist aber der festgestellten Definition zu Folge δU nichts anderes, als das einer unendlich kleinen Aenderung von t entsprechende Differenzial von U, sobald nach ausgeführter Differenziation dem Variationsargument t der Werth $t = 0$ beigelegt wird. Und obwohl in dem für U gegebenen Ausdruck diese Variable t gar nicht explicit vorhanden ist, sondern nur

implicit, insofern die in U erscheinenden Variablen y und z nebst ihren Differenzialquotienten als Functionen von t gedacht werden sollen; so läßt sich dennoch der in Beziehung auf dieses t genommene Differenzialquotient in entwickelter Form darstellen, sobald man nur bestimmt hat, was aus jenen Variablen $y, z, p, \mathfrak{p}, q$.. bei der gedachten Aenderung von t in $t + dt$ entstehen wird d. h. sobald man über die Variationen dieser Größen im Reinen ist. Denn überhaupt, wenn

$$u = \mathfrak{F}(t, x, y, v..)$$

gegeben ist und wenn die Argumente x, y, v.. dieser Function sämmtlich Functionen der Variablen t vorstellen, so daß

$$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad v = \chi(t) \quad \text{u. s. f.}$$

ist, so haben wir, indem wir nun u selbst als Function von t ansehen und das totale Differenzial durch $du = \frac{du}{dt} dt$ vorstellen, um es von dem partiellen Differenzial $\frac{du}{dt} dt$, bei dessen Herleitung man blos das in $\mathfrak{F}(t, x, y..)$ explicit vorhandene t im Auge hat, zu unterscheiden,

$$du = \frac{du}{dt} dt + \frac{du}{dx} \varphi'(t) dt + \frac{du}{dy} \psi'(t) dt + \frac{du}{dv} \chi'(t) dt + ..$$

oder

$$\frac{du}{dt} dt = \left[\frac{du}{dt} + \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{du}{dy} \frac{dy}{dt} + \frac{du}{dv} \frac{dv}{dt} + .. \right] dt$$

Da nun in unserm obigen Falle die Function $U = F(x, y, p, .. z, \mathfrak{p} ..)$ wirklich blos in so fern differenzirt werden soll, als sie innerhalb der Functionen $y, z, p, \mathfrak{p}$.. das Variationsargument t enthält, und da hierbei einerseits kein partieller Differenzialquotient $\frac{dU}{dt}$ möglich ist, andererseits auch die Independente x als unabhängig von t betrachtet werden soll, so daß $\frac{dx}{dt} = 0$ ist; so wird

$$\frac{dU}{dt} dt = N \frac{dy}{dt} dt + P \frac{dp}{dt} dt + Q \frac{dq}{dt} dt + ..$$
$$+ \mathfrak{N} \frac{dz}{dt} dt + \mathfrak{P} \frac{d\mathfrak{p}}{dt} dt + \mathfrak{Q} \frac{d\mathfrak{q}}{dt} dt + ..$$

Sobald man aber jetzt dem Variationsargument t, von welchem man sich denken muß, daß es noch in den aus $y = \Phi_1(x, t)$ und $z = \Phi_2(x, t)$

entsprungenen Differenzialquotienten

$$\frac{dy}{dt} \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dt} \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{d\frac{d^2y}{dx^2}}{dt} \ldots$$

$$\frac{dz}{dt} \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{d\frac{dz}{dx}}{dt} \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{d\frac{d^2z}{dx^2}}{dt} \ldots$$

enthalten sei, überall den Werth $t = 0$ beilegt, so gehen die Größen $\frac{dU}{dt}dt$ und

$$\frac{dy}{dt}dt,\ \frac{dp}{dt}dt,\ \frac{dq}{dt}dt \ldots \frac{dz}{dt}dt,\ \frac{dp}{dt}dt,\ \frac{dq}{dt}dt \ldots$$

der Reihe nach über in

$$\delta U,\ \delta y,\ \delta p,\ \delta q \ldots \delta z,\ \delta p,\ \delta q \ldots$$

demnach ist

$$\begin{aligned} \delta U = {} & N\delta y + P\delta p + Q\delta q + \ldots \\ & + \mathfrak{N}\delta z + \mathfrak{P}\delta p + \mathfrak{Q}\delta q + \ldots \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} \delta U = {} & \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dp}\delta p + \frac{dU}{dq}\delta q + \ldots \\ & + \frac{dU}{dz}\delta z + \frac{dU}{dp}\delta p + \frac{dU}{dq}\delta q + \ldots \end{aligned} \qquad (2)$$

Diese Formel läßt sich jedoch noch weiter umgestalten, wenn man auf den in §. 3. bewiesenen Lehrsatz Rücksicht nimmt, und zugleich beachtet, daß bei der gegenwärtigen Untersuchung die Aenderungen des Variations-Arguments t weder auf x noch auf dx irgend welchen Einfluß ausüben sollen. Man hat nämlich alsdann

$$\delta p = \delta \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx}\delta dy = \frac{d\delta y}{dx}$$

$$\delta q = \delta \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{dx^2}\delta d^2y = \frac{d^2\delta y}{dx^2}$$

$$\delta r = \delta \cdot \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{dx^3}\delta d^2y = \frac{d^3\delta y}{dx^3}$$

u. s. f.

und in gleicher Weise

$$\delta p = \frac{d\delta z}{dx},\ \delta q = \frac{d^2\delta z}{dx^2} \text{ u. s. f.}$$

wobei bekanntlich δy das Produkt einer ganz unbestimmten, in §. 2 durch $\Omega(x)$ bezeichneten Function von x mit dem verschwindenden Faktor dt vorstellt, und δz natürlich eine ganz entsprechende Bedeutung haben soll. Nach Einführung dieser Werthe aber verwandelt sich die obige Formel (2) sogleich in folgende:

$$\delta U = \partial_1 U \delta y + \partial_2 U \frac{d\delta y}{dx} + \partial_3 U \frac{d^2\delta y}{dx^2} + \ldots$$
$$+ \partial_1 U \delta z + \partial_2 U \frac{d\delta z}{dx} + \partial_3 U \frac{d^2\delta z}{dx^2} + \ldots \quad (3)$$

§. 7.

Da die unmittelbare Variation δy, so lange die Functionen, in welche $y = f(x)$ continuirlich übergehen soll, völlig unbestimmt gelaßen werden, jedesmal durch das Product einer gänzlich unbestimmten und beliebig anzunehmenden Function $\Omega(x)$ mit dem verschwindenden Faktor dt dargestellt wird, so muß die Größe $\frac{1}{dt} \cdot \delta y$ im Allgemeinen als eine endliche, aber ganz willkührliche Function von x gedacht werden, welche freilich unter besondern Umständen sich auf irgend eine constante Größe reduciren könnte. Ebenso enthält auch die mittelbare Variation δU, mit welcher wir uns im vorhergehenden §. beschäftigt haben, den unendlich klein machenden Faktor dt in der ersten Potenz, da δU aus $\frac{dU}{dt} dt$ dadurch entstanden ist, daß man $t = 0$ setzte; und deshalb kann dieser Faktor dt auch aus δU durch Division fortgeschafft werden. Solche Quotienten wie $\frac{1}{dt} \cdot \delta y$ und $\frac{1}{dt} \cdot \delta U$ kann man nun füglich, analog der in der Differenzialrechnung eingeführten Benennung, erste Variationsquotienten nennen, und sie sollen in Zukunft durchweg mit $\delta' y$, $\delta' U$ ꝛc. bezeichnet werden. Demgemäß erhält man, wenn $U = F(x, y)$ gegeben ist, wie im ersten Falle des vorhergehenden §., und y als eine noch unbestimmte Function von x gedacht werden soll, aus der Formel (1) sogleich

$$\delta' U = \left(\frac{dU}{dy}\right) \delta' y \quad (4)$$

Und da man ferner, wenn die unmittelbaren Variationen δy und δz, welche in der zweiten Aufgabe des vorhergehenden §. vorkamen, nach der

eigentlichen Independenten x differenziirt werden, das Differenzial dt fortwährend wie einen constanten Faktor zu behandeln hat (Vgl. §. 3.) so daß z. B. aus

$$\delta y = \Omega(x)dt = \delta' y \cdot dt$$

der Reihe nach erhalten wird

$$\begin{aligned} d\delta y &= dt d\Omega(x) = dt \cdot d\delta' y \\ d^2\delta y &= dt d^2\Omega(x) = dt \cdot d^2\delta' y \\ d^3\delta y &= dt d^3\Omega(x) = dt \cdot d^3\delta' y \end{aligned}$$

u. s. f.

so läßt sich auch aus sämmtlichen Gliedern der Formel (3) des vorhergehenden §. der Faktor dt durch Division fortschaffen, und man erhält alsdann

$$\begin{aligned} \delta' U = &\left(\frac{dU}{dy}\right)\delta' y + \left(\frac{dU}{dp}\right)\frac{d\delta' y}{dx} + \left(\frac{dU}{dq}\right)\frac{d^2\delta' y}{dx^2} + \left(\frac{dU}{dr}\right)\frac{d^3\delta' y}{dx^3} + \ldots . \\ &+ \left(\frac{dU}{dz}\right)\delta' z + \left(\frac{dU}{dp}\right)\frac{d\delta' z}{dx} + \left(\frac{dU}{dq}\right)\frac{d^2\delta' z}{dx^2} + \ldots . \end{aligned} \tag{5}$$

Hierbei sind also die in Parentheſe gesetzten partiellen Differenzialquotienten lauter gegebene Ausdrücke, worin die Variablen x, y, z und außerdem p, $\mathfrak{p}$, q, $\mathfrak{q}$ ... vorkommen; diese letztern bedeuten die Differenzialquotienten

$$\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots .$$

und werden freilich meistentheils, zumal am Anfange der Auflösung einer Aufgabe, unbekannte, aber doch als bestimmbar vorausgesetzte Functionen von x sein, — die Variationsquotienten $\delta' y$ und $\delta' z$ dagegen stellen ganz willkührliche Functionen von x vor.

Beiſpiel.

Wenn

$$U = 4az + \frac{3ayds - 4bxdy}{dx} + \frac{2(b^2dy^2 - z^2dx^2) - a^2d^2z}{dx^2}$$

gegeben wäre; so würde man dieſer Function die Form geben

$$U = 4az + 3ayp - 4bxp + 2b^2p^2 - 2z^2 - a^2q$$

und daraus die Werthe ableiten:

$$\left(\frac{dU}{dy}\right) = 3ap \qquad \left(\frac{dU}{dp}\right) = 4b(bp - x) \qquad \left(\frac{dU}{dq}\right) = 0$$

$$\left(\frac{dU}{dz}\right) = 4(a - z) \qquad \left(\frac{dU}{dp}\right) = 3ay \qquad \left(\frac{dU}{dq}\right) = -a^2$$

Also hat man mit Hülfe der Formel (2)

$$\delta U = 3ap\delta y + 4b(bp - x)\frac{d\delta y}{dx}$$
$$+ 4(a - z)\delta z + 3ay \cdot \frac{d\delta z}{dx} - a^2\frac{d^2\delta z}{dx^2}$$

und

$$\delta' U = 3a\frac{dz}{dx}\delta' y + 4b(b\frac{dy}{dx} - x)\frac{d\delta' y}{dx} + 4(a - z)\delta' z + 3ay\frac{d\delta' z}{dx} - a^2\frac{d^2\delta' z}{dx^2}$$

Hierin mögen y und z als Functionen von x gedacht werden, welche sich durch anderweite Bedingungen würden bestimmen laßen, die Größen $\delta' y$ und $\delta' z$ dagegen deuten zwei Functionen von x an, welche nicht etwa unbekannt sind, sondern deren Wesen gerade darin besteht, daß sie beliebig annehmbar sein sollen. Und erst nachdem man bestimmte Formen dafür angenommen hätte, würden auch die Differenzialquotienten $\frac{d\delta' y}{dx}, \frac{d\delta' z}{dx}, \frac{d^2\delta' z}{dx^2}$ bestimmte Form erhalten.

Uebrigens müßen wir wegen des zukünftigen Gebrauchs der Formel (5) nochmals daran erinnern, daß die in dieser Formel vorkommenden Differenzialquotienten

$$\frac{d\delta' y}{dx}, \frac{d^2\delta' y}{dx^2}, \frac{d^3\delta' y}{dx^3}, \ldots\ldots$$

nicht bloß als die aufeinanderfolgenden Differenzialquotienten der Function $\Omega(x) = \delta' y$, sondern auch, wenn man lieber will, umgekehrt als die Variationsquotienten der auf einander folgenden Differenzialquotienten, nämlich

$$\delta'\frac{dy}{dx}, \delta'\frac{d^2y}{dx^2}, \delta'\frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots$$

angesehen werden können, wie sich aus den der Formel (3) unmittelbar vorangehenden Gleichungen

$$\delta p = \delta\frac{dy}{dx} = \frac{d\delta y}{dx} \quad \text{u. s. f.}$$

auf der Stelle ergiebt, wenn man überall durch Division den unendlich klein machenden Factor dt fortschafft. Diese andere Auffaßung der in (5) vorkommenden Differenzialquotienten stützt sich auf die Nothwendigkeit, daß wenn sich die Form der Function y ändert, auch die Formen der Differenzialquotienten $p, q, \ldots$ variiren, oder anders ausgedrückt, daß wenn $y = \Phi(x, t)$ aufgefaßt wird, auch die aus dieser Gleichung entspringenden

Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ u. s. f. noch nach t differenziirt werden können.

§. 8.

Der hauptsächlichste Gebrauch, welchen man von der Variationsrechnung macht, und welcher eben zur Ausbildung dieses Theils der Analysis die eigentliche Veranlaßung gegeben hat*), besteht darin, diejenige Be-

*) Es geschah dies gegen das Ende des verflossenen Jahrhunderts durch Euler und Lagrange. Der erstgenannte große Geometer hatte bereits in seiner i. J. 1744 herausgegebenen Methodus inveniendi lineas curvas Maximi Minimive proprietate gaudentes eine große Anzahl von Aufgaben zusammengestellt, welche zur Variationsrechnung gehören, und mit denen sich theilweise schon im vorausgegangenen Jahrhundert, bald nach Erfindung des Infinitesimalcalkuls, einzelne Mathematiker, wie die Bernoulli, mit mehr oder weniger günstigem Erfolge beschäftigt hatten. Viele der in jenem berühmten Werke behandelten Aufgaben sind dieselben, deren wir uns noch heutiges Tages zur Erläuterung der zu entwickelnden Lehren am liebsten bedienen, aber die von Euler damals angewendeten Auflösungsmethoden waren noch unvollkommen. Im Jahr 1764 dagegen erschienen von ihm in den Novi Commentarii Acad. Petrop. (Tom. X) zwei ausführlichere Abhandlungen, wodurch die Methode wesentlich gefördert wurde: Elementa calculi Variationum, worin er bereits Gebrauch vom Zeichen δ macht, und Analytica explicatio methodi Maximorum et Minimorum, worin er eines zwischen ihm und Lagrange über diese Gegenstände Statt gehabten Briefwechsels gedenkt. Als eine Umarbeitung, in mancher Beziehung auch als Erweiterung dieser Abhandlungen kann man diejenige Darstellung der Variationsrechnung ansehen, welche er später (1770) dem dritten Theile seiner Integralrechnung (Institut. calc. integr. III. p. 461—596. Uebersetzung von Salomon III. p. 381—486) einverleibte. Und einige Zeit darauf (1771) gab er dann eine Abhandlung heraus, worin er sich bereits der Hülfsvariablen t (unseres Variationsarguments) bedient. (Nov. Comment. Acad. Petrop. T. XVI p. 35—70. Aufgenommen in der Salomon'schen Uebersetzung der Integralr. Bd. IV. p. 551—580).

Die auf diese Lehren bezüglichen ersten Arbeiten von Lagrange sind in den Schriften der Turiner Akademie (Miscellanea Taurinensia) enthalten. In einer im J. 1762 erschienenen Abhandlung: Essai d' une nouvelle méthode pour déterminer les Maxima et Minima des formules intégrales indéfinies (Tom. I der genannten Zeitschrift) führt er, mit Bezug darauf, was die von Euler in dem oben erwähnten Werke angewendeten Methoden noch zu wünschen übrig ließen, die Charakteristik δ ein, und entwickelt in Bezug auf die Variationen der Integralausdrücke die erforderlichen Gleichungen ganz so, wie wir sie im dritten Capitel aufstellen werden. Für weniger geübte Leser mochte aber freilich seine Darstellung in jener Zeit nicht leicht verständlich sein. In einem zweiten Memoire „sur la méthodedes variations“

schaffenheit einer oder mehrerer, der Form nach unbekannten, aber als bestimmbar gedachten Functionen einer independenten Variablen x zu ermitteln, welche bewirkt, daß irgend ein gegebener Ausdruck U, welcher nicht allein diese Variable x, sondern auch jene noch unbekannten Functionen

$$y = f(x), \qquad s = f(x), \text{ u. s. f.}$$

enthält, den möglichst größten oder kleinsten Werth U_0 annehme, während man der Independenten x selbst in Gedanken irgend einen beliebig gewählten Werth beilegt, — daß also U_0 größer oder kleiner sei als jeder andere Werth von U, in welchem $y, s \ldots$ Functionen von etwas geänderter Form sein würden, während x selbst in U denselben Werth haben soll wie in U_0.

Die Grundsätze, auf welche sich diese Anwendungen der Variationsrechnung stützen, sind mit den in der Differenzialrechnung bei der Lehre von den größten und kleinsten Werthen der Functionen entwickelten Principien ganz einerlei. Wenn nämlich

$$U = F(x, y, s, p, p, \ldots)$$

gegeben ist, und wenn man hierin der Independenten x irgend einen bestimmten Werth beilegt, und überdies für einen Augenblick annimmt, die gesuchte Form der unbekannten Functionen $y, s, p \ldots$ wäre bereits ermittelt, so daß diese Variablen sämmtlich bekannte Functionen der Independenten x wären; so erhält offenbar U selbst einen völlig bestimmten Werth (freilich als Function von x) welchen wir so eben durch U_0 vorgestellt haben und welcher das in Untersuchung stehende Maximum oder Minimum angiebt. Stellen wir uns jetzt vor, von diesem Ausgangspunkt an, welcher dem Werth des Variationsarguments $t = 0$ entspricht, fiengen die Functionen $y, s, p \ldots$ gleichzeitig an sich der Form nach zu ändern, so daß sie zunächst übergiengen in

$$y + \delta y = y + \delta' y dt$$
$$s + \delta s = s + \delta' s dt$$
$$p + \delta p = p + \delta' p dt$$

u. s. f.

wobei dem §. 7 zu Folge durch $\delta' y, \delta' s, \delta' p \ldots$ völlig willkührliche Functionen von x angedeutet sein sollen, und denken wir uns endlich es

(1770. T. IV) sucht er daher, nachdem er mit sichtbarer Freude der von Euler ihm schriftlich ausgedrückten Anerkennung seiner Methode Erwähnung gethan, einigen Entwickelungen eine noch größere Vollkommenheit zu geben, so wie einige Punkte, welche zu Misverständnissen Anlaß gewesen sein mochten, weiter aufzuklären.

habe das in den Functionen $y, z, p \ldots$ verborgene Variationsargument t von dem ursprünglichen Werthe $t = 0$ bis zu irgend einem beliebigen, nicht mehr unendlich kleinen, übrigens entweder positiven oder negativen Werthe $t = \tau$ continuirlich zugenommen, so daß die Functionen $y, z, p \ldots$ endliche Variationen (§. 2) erlitten haben mögen. Alsdann hat die Function U_0 selbst irgend eine endliche Aenderung erfahren, und wenn wir den neuen Werth mit U' bezeichnen, so ist dem Maclaurin'schen Lehrsatze zu Folge, da die Aenderungen der Function U diesmal blos von den Aenderungen des Variationsarguments t herrühren, da also alle übrigen in U erscheinenden Variablen, in so fern wir sie nicht zugleich mit t in unserer Vorstellung wachsen oder abnehmen zu laßen gezwungen sind, zwar als unbestimmte aber diesmal nicht variirende Größen angesehen werden sollen, oder, um es kurz zu sagen, da U diesmal blos als Function von t zu behandeln ist,

$$U' = U_0 + \left(\frac{dU}{dt}\right)_0 \tau + \left(\frac{d^2U}{dt^2}\right)_0 \frac{\tau^2}{1.2} + \left(\frac{d^3U}{dt^3}\right)_0 \frac{\tau^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

wobei wir durch die den partiellen Differenzialquotienten seitlich angefügten Nullen andeuten, daß nach ausgeführter Differenziation $t = 0$ zu setzen sei.

Nun richtet sich aber bei hinreichend kleinen Werthen von τ das Vorzeichen der Summe aller auf irgend ein vorhergehendes Glied folgender Glieder jedesmal nach demjenigen, welches die niedrigste Potenz von τ mit sich führt; setzt man daher das eine Mal für τ eine hinlänglich kleine und positive, das andere Mal eine hinlänglich kleine aber negative Größe, so wird, es mag nun die kein τ enthaltende Größe $\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$ an und für sich positiv oder negativ ausfallen, das eine Mal U_0 um etwas vermehrt, das andere Mal aber vermindert, und deswegen kann U_0 weder ein Maximum noch ein Minimum der gegebenen Function U angeben, wenn $\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$ von Null verschieden ist (und nicht etwa Unendlich wird). Offenbar ist aber $\left(\frac{dU}{dt}\right)_0$ ganz gleichbedeutend mit δU, weil um $\delta U = \frac{1}{dt} \cdot dU$ zu erhalten, ebenfalls nach t differenziirt und dann $t = 0$ gemacht werden muß; also muß für den Fall des Maximums oder Minimums $\delta U = 0$ oder $= \infty$ sein.

Da die Größe δU, wie die Formeln (4) und (5) des vorher-

gehenden Paragraphen erkennen laßen, im Allgemeinen sich als eine Function von $x, y, z, p, p \ldots$ herausstellt, so erhält man, mag man nun $\delta U = 0$, oder $\delta U = \infty$ d. h. $\frac{1}{\delta U} = 0$ setzen, eine Gleichung, oder, wie wir in der Folge sehen werden, manchmal mehrere Gleichungen von der Form

$$\Gamma_1(x, y, z, p, p, \ldots) = 0$$
$$\Gamma_2(x, y, z, p, p, \ldots) = 0$$

u. s. f.

aus welchen man $y, z, p \ldots$ entwickeln und somit diejenige Form dieser Größen, als Functionen von x, feststellen wird, welche denselben beigelegt werden muß, damit die gegebene Function U in dem am Anfange des gegenwärtigen Paragraphen erklärten Sinne ein Maximum oder Minimum wird. Da sich jedoch wenig Gelegenheit darbieten wird, aus der Annahme $\delta U = \infty$ brauchbare Resultate herzuleiten, so haben wir unser Augenmerk hauptsächlich darauf zu richten, auf welche Weise man, sobald man die Gleichung $\delta U = 0$ gebildet hat, die Untersuchung weiter zu führen und sich zu vergewißern habe, ob dieselbe wirklich zu einem größten oder kleinsten Werthe von U verholfen habe, und welches von beiden, ob ein Maximum oder ein Minimum, gefunden worden sei. Die Entscheidung hierüber hängt zunächst ab von der Beschaffenheit des zweiten Variationsquotienten $\left(\frac{d^2U}{dt^2}\right)_0 = \delta^2 U$, oder auch eines der folgenden $\left(\frac{d^3U}{dt^3}\right)_0 = \delta^3 U$ u. s. f.

§. 9.

Die analytische Darstellung der Größe $\left(\frac{d^2U}{dt^2}\right)_0 = \delta^2 U$ kann in keinem Falle Schwierigkeit machen, sobald man nur hier wieder, wie in §. 6. vor allen Dingen darüber mit sich in's Reine gekommen ist, welche von den verschiedenen in U vorkommenden Variablen bei der nach dem Variations-Argument t vorzunehmenden Differenziation sich ändern sollen, und welche nicht. Denn eben so gut, als man aus der in §. 2. erklärten Gleichung

$$y = \Phi(x, t)$$

durch einmaliges Differenziiren das Differenzial $\left(\frac{d\Phi(x, t)}{dt}\right)dt$ erhielt, welches sich, sobald $t = 0$ gemacht wird, in $\Omega(x)dt = dy$ verwandelt, so erhält man auch, wenn man, bevor $t = 0$ gemacht worden, zum zweiten Male

nach t differenzirt, wobei dt als Differenzial einer absolut independenten Variablen wie ein constanter Faktor zu behandeln ist, das Differenzial $\left(\frac{d^2\Phi(x,t)}{dt^2}\right)dt^2$ und dieses verwandelt sich, wenn $t=0$ gesetzt wird, in das Produkt irgend einer, wiewohl völlig unbestimmten Function von x mit dem Faktor dt^2, welches die zweite Variation von y zu nennen, und durch $\delta^2 y$ zu bezeichnen sein wird. Nun ist klar, daß man auf gleiche Weise zu den höheren Variationen $\delta^3 y$, $\delta^4 y$ ... fortschreiten könne, so wie, daß die Größen $\frac{1}{dt^2}\cdot\delta^2 y$, $\frac{1}{dt^3}\cdot\delta^3 y$ u. s. f. lauter endliche, aber völlig unbestimmte Functionen von x vorstellen müßen, welche in Uebereinstimmung mit der in §. 8. festgestellten Bezeichnung durch $\delta'^2 y$, $\delta'^3 y$ ... angedeutet und zweiter, dritter u. s. w. Variations-Quotient genannt werden sollen. Wir werden später (§. 14 fgg.) diese höheren Variationsquotienten von y wieder benutzen, um eine kleine, jedoch endliche Variation νy, welche einem kleinen aber endlichen Werthe τ des Variationsarguments t entspricht, nach dem Taylor'schen Lehrsatze zu entwickeln, nämlich

$$\nu y = \delta' y\cdot\tau + \delta'^2 y\cdot\frac{\tau^2}{1.2} + \delta'^3 y\cdot\frac{\tau^3}{1.2.3} + \cdots$$

Man wird deshalb wohlthun sich schon gegenwärtig mit dem Gedanken vertraut zu machen, daß diese Größen $\delta'^2 y$, $\delta'^3 y$ ... von $\delta' y$ so wie von einander ganz unabhängig sind und beliebig angenommen werden können. Zwar wenn man blos im Allgemeinen die Relationen

$$y=\Phi(x,t) \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{d\Phi(x,t)}{dt} \qquad \delta' y=\left(\frac{d\Phi(x,t)}{dt}\right)_0=\Omega(x)$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d^2\Phi(x,t)}{dt^2} \qquad \delta'^2 y=\left(\frac{d^2\Phi(x,t)}{dt^2}\right)_0=\Psi(x)$$

überblickt, so möchte $\Psi(x)$ von $\Omega(x)$, also $\delta'^2 y$ von $\delta' y$ abhängig erscheinen. Sieht man aber, nachdem man diese oder jene zweckmäßige Annahme über $\Phi(x,t)$ gemacht hat, näher zu, so verschwindet dieser Anschein. Man nehme z. B.

$$y=\Phi(x,t)+t^2\mathrm{F}(x) \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{d\Phi(x,t)}{dt}+2t\mathrm{F}(x)$$

so wird

$$\delta' y=\left(\frac{d\Phi(x,t)}{dt}\right)_0=\Omega(x) \quad \text{unabhängig von } \mathrm{F}(x)$$
$$\delta'^2 y=\left(\frac{d^2\Phi(x,t)}{dt^2}\right)_0+2\mathrm{F}(x) \quad \text{abhängig von } \mathrm{F}(x)$$

also findet kein Zusammenhang zwischen δy und $\delta^2 y$ Statt. Und in gleicher Weise könnte man offenbar den Beweis führen, daß $\delta^3 y$, $\delta^4 y \ldots$ sowohl mit δy als unter sich in keinem Zusammenhang stehen.

Da ferner, so lange y in seiner Allgemeinheit als variirende Function $\Phi(x, t)$ gedacht werden soll (§. 1 und 2) auch die Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=q$, $\frac{d^3y}{dx^3}=r$ ꝛc. als variirende Functionen von x, also zugleich mit t sich ändernd gedacht werden müßen, so kommen allen diesen Functionen ebenfalls im Allgemeinen höhere Variationen

$\delta^2 p$, $\delta^3 p$, $\delta^4 p$, ..., $\delta^2 q$, $\delta^3 q$, $\delta^4 q$, ..., $\delta^2 r$, $\delta^3 r$, $\delta^4 r$ .....

und höhere Variationsquotienten

$\delta^2 p$, $\delta^3 p$, $\delta^4 p$, ..., $\delta^2 q$, $\delta^3 q$, $\delta^4 q$, ..., $\delta^2 r$, $\delta^3 r$, $\delta^4 r$, ...

zu, und diese letztere sind, gerade wie die Variationsquotienten von y im Allgemeinen als unbestimmte Functionen von x zu denken, können sich aber in besondern Fällen auch wohl auf Null oder auf andere constante Werthe reduciren.

Wenn daher, wie im ersten Fall des §. 6, die gegebene Function U blos x und y enthält, so giebt die erste Differenziation nach t

$$\frac{dU}{dt}=\left(\frac{dU}{dy}\right)\frac{dy}{dt}$$

Hier hat man sich $\left(\frac{dU}{dy}\right)$ als eine gegebene Function vorzustellen, welche im Allgemeinen noch y, also implicit t enthalten wird, während in $\frac{dy}{dt}$ das Variationsargument t noch explicit vorhanden sein kann. Daher giebt die zweite Differenziation

$$\begin{aligned}\frac{d^2U}{dt^2}&=\left(\frac{dU}{dy}\right)\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d\left(\frac{dU}{dy}\right)}{dt}\\&=\left(\frac{dU}{dy}\right)\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)\frac{dy}{dt}\\&=\left(\frac{dU}{dy}\right)\frac{d^2y}{dt^2}+\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)\frac{dy^2}{dt^2}\end{aligned}$$

und wenn man jetzt $t=0$ macht

$$(5.\alpha)\qquad \left(\frac{d^2U}{dt^2}\right)_0=\delta^2 U=\left(\frac{dU}{dy}\right)\delta^2 y+\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)\delta y^2$$

Man hätte diese Formel aber auch aus der bereits hinlänglich bekannten

Formel (§. 6. I)

$$\delta U = \frac{dU}{dy}\delta y$$

ableiten können, wenn man sich hierin t noch nicht annullirt denkt, und die zwei Größen $\frac{dU}{dy}$ und δy beide noch als Functionen von t behandelt, von denen die erstere nur implicit t enthält, und deren Differenzialien, nach t genommen, beziehungsweise $\frac{d^2U}{dy^2}\delta y$ und $\delta^2 y$ sind. Die Differenziation giebt dann

$$(5.\beta) \qquad \delta^2 U = \frac{d^2U}{dy^2}\delta y^2 + \frac{dU}{dy}\delta^2 y$$

und wenn man durch dt^2 dividirt und $t = 0$ macht

$$\delta'^2 U = \frac{d^2U}{dy^2}\delta' y^2 + \frac{dU}{dy}\delta'^2 y$$

wie vorher.

Dieser zweite Weg ist aber augenscheinlich in Rücksicht auf die Bezeichnung der verschiedenen in die Rechnung eingehenden Größen merklich einfacher als der vorher betretene, und auch für die praktische Ausführung des Variirens bequemer, weil man an wiederholtes Differenziiren vorliegender Functionen schon gewöhnt ist, und diesmal nur an den Stellen, wo man sonst zur Bezeichnung der aufeinander folgenden Differenzialien von y das Symbol d setzen würde, ein δ zu schreiben hat. Deswegen werden wir in Zukunft überall zur Darstellung der höheren Variationsquotienten diesen zweiten Weg einschlagen, dessen Eigenthümlichkeit, wie man sieht, in dem Kunstgriff besteht, daß man, um von δU zu $\delta^2 U$ fortzuschreiten, sich alles vorher vorhanden gewesene t nicht schon nach dem ersten Differenziiren gleich Null gesetzt denkt, sondern erst nach der zweiten oder dritten u. s. f. Differenziation diesen bestimmten Werth $t = 0$ überall einführt.

Aus der Formel $(5.\beta)$ würde man demgemäß, zu den höheren Variationen von U fortschreitend, erhalten

$$\begin{aligned}\delta^3 U &= \delta\left[\frac{d^2U}{dy^2}\delta y^2 + \frac{dU}{dy}\delta^2 y\right] \\ &= \frac{d^3U}{dy^3}\delta y^3 + 2\frac{d^2U}{dy^2}\delta y\delta^2 y + \frac{d^2U}{dy^2}\delta y\delta^2 y + \frac{dU}{dy}\delta^3 y \\ &= \frac{d^3U}{dy^3}\delta y^3 + 3\frac{d^2U}{dy^2}\delta y\delta^2 y + \frac{dU}{dy}\delta^3 y\end{aligned}$$

und (6) $\delta^3 U = \frac{d^3U}{dy^3}\delta y^3 + 3\frac{d^2U}{dy^2}\delta y\delta^2 y + \frac{dU}{dy}\delta^3 y$

Ferner $\delta^4 U = \delta\left[\frac{d^3U}{dy^3}\delta y^3 + 3\frac{d^2U}{dy^2}\delta y\delta^2 y + \frac{dU}{dy}\delta^3 y\right]$

u. s. f.

Und ganz auf gleiche Weise wird man denn auch in dem allgemeineren Fall des §. 6 (und §. 7), wo vorausgesetzt wurde, daß die gegebene Function U mehrere Variablen y, z als unbestimmte Functionen der Independenten x und auch wohl noch die Differenzialquotienten

$$p = \frac{dy}{dx},\quad q = \frac{d^2y}{dx^2},\quad r = \frac{d^3y}{dx^3},\ldots\quad \mathfrak{p} = \frac{dz}{dx},\quad \mathfrak{q} = \frac{d^2z}{dx^2},\ldots\ldots$$

enthielte, zu den höheren Variationen $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, ... und den höheren Variationsquotienten $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, ... fortschreiten. Freilich vermehrt sich die Zahl der einzelnen Glieder alsdann um ein beträchtliches; denn das erste Glied rechter Hand in der Formel (2) liefert, wenn es variirt wird, folgendes Aggregat

$$\left[\frac{d^2U}{dy^2}\delta y + \frac{d^2U}{dydz}\delta z + \frac{d^2U}{dydp}\delta p + \frac{d^2U}{dyd\mathfrak{p}}\delta\mathfrak{p} + \cdots\right]\delta y + \frac{dU}{dy}\delta^2 y$$

oder in der etwas bequemeren Bezeichnung der partiellen Differenzialquotienten

$$\left[\partial^2{}_{yy}U\delta y + \partial^2{}_{yz}U\delta z + \partial^2{}_{yp}U\delta p + \partial^2{}_{y\mathfrak{p}}U\delta\mathfrak{p} + \cdots\right]\delta y + \partial_y U\delta^2 y$$

das zweite Glied der Formel (2) liefert in gleicher Weise das Aggregat

$$\left[\partial^2{}_{yp}U\delta y + \partial^2{}_{pz}U\delta z + \partial^2{}_{pp}U\delta p + \partial^2{}_{p\mathfrak{p}}U\delta\mathfrak{p} + \cdots\right]\delta p + \partial_p U\delta^2 p$$

und jedes der folgenden Glieder

$$\frac{dU}{dq}\delta q,\quad \frac{dU}{dr}\delta r,\ldots\ldots\quad \frac{dU}{dz}\delta z,\quad \frac{dU}{d\mathfrak{p}}\delta\mathfrak{p},\ldots$$

wird offenbar ein eben solches Aggregat liefern. Da aber diese Andeutungen schon hinreichen, um in allen besondern Fällen, wie sie bei den Anwendungen der Variationsrechnung vorkommen mögen und bei den verschiedenen in den folgenden Paragraphen zu bearbeitenden Aufgaben sich darbieten werden, die höheren mittelbaren Variationen $\delta^2 U$, $\delta^3 U$, ... durch die höheren unmittelbaren Variationen

$$\begin{array}{l}\delta y,\ \delta^2 y,\ \delta^3 y,\ldots\ldots\ \delta z,\ \delta^2 z,\ \delta^3 z,\ldots\ldots\\ \delta p,\ \delta^2 p,\ \delta^3 p,\ldots\ldots\ \delta\mathfrak{p},\ \delta^2\mathfrak{p},\ \delta^3\mathfrak{p},\ldots\ldots\\ \delta q,\ \delta^2 q,\ \delta^3 q,\ldots\ldots\ \delta\mathfrak{q},\ \delta^2\mathfrak{q},\ \delta^3\mathfrak{q},\ldots\ldots\end{array}$$

darzustellen; so würde es keinen besondern Nutzen gewähren, wenn wir

hier ganz allgemeine und eben dieser Allgemeinheit wegen übermäßig weitläuftige Formeln für jene höheren Variationen δ^2U, δ^3U, ... construiren wollten.

§. 10.

Von den höhern Variationsquotienten δ^2U, δ^3U.... wird aber, wie bereits am Schluße des §. 8 bemerkt wurde, zunächst Gebrauch gemacht bei der Entscheidung der Frage, ob die Gleichung $\delta U = 0$ auf ein Maximum oder Minimum oder auf keines von beiden geführt habe. Es ist nämlich aus der in der Differenzialrechnung behandelten Lehre von den größten und kleinsten Werthen der Functionen bekannt, und kann auch aus der im §. 8 aufgestellten Reihe

$$U' = U_0 + \delta^2U\frac{\tau^2}{1.2} + \delta^3U\frac{\tau^3}{1.2.3} + \delta^4U\frac{\tau^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

(aus welcher das Glied mit der ersten Potenz von τ gegenwärtig wegen der Gleichung $\delta U = 0$ weggefallen ist) ohne Mühe ersehen werden, daß U_0 dann ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ ist, wenn δ^2U einen $\left\{\begin{matrix}\text{negativen}\\\text{positiven}\end{matrix}\right\}$ Werth hat, weil dann jeder benachbarte, einem hinreichend kleinen Werthe von τ entsprechende Werth von U im algebraischen Sinne $\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{größer}\end{matrix}$ als U_0 ist. In dem besondern Falle aber, daß δ^2U gleich Null, also weder eine positive noch negative Größe sein sollte, würde U_0 weder ein Maximum noch ein Minimum sein, wenn nicht zugleich δ^3U sich ebenfalls auf Null reducirte. Und, um es möglichst allgemein auszusprechen, man kann überhaupt nur dann ein Maximum oder Minimum gefunden zu haben erwarten, wenn der erste nicht verschwindende Variationsquotient von gerader Ordnung ist, weil nur diese Variationsquotienten

$$\delta^2U = \left(\frac{d^2U}{dt^2}\right)_0 \qquad \delta^4U = \left(\frac{d^4U}{dt^4}\right)_0 \qquad \delta^6U = \left(\frac{d^6U}{dt^6}\right)_0 \text{ u. s. f.}$$

in dem obigen Ausdrucke für U' mit einer geraden Potenz von τ multiplicirt sind. Wenn dieser Umstand aber wirklich Statt findet, so ist U_0 im algebraischen Sinne ein $\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}$ je nachdem der gedachte erste nicht verschwindende Variationsquotient eine $\begin{matrix}\text{negative}\\\text{positive}\end{matrix}$ Größe vorstellt.

Bei den Anwendungen des Variationscalculs auf geometrische oder

mechaniſche Aufgaben wird man nun zwar nicht leicht in den Fall kommen, bis zum vierten, oder ſechſten ꝛc. Variationsquotienten fortſchreiten zu müßen; ſo günſtig dieſer Umſtand aber auch für die Unterſcheidung des Maximums vom Minimum ſein mag, ſo bietet ſich doch häufig von einer anderen Seite her eine neue und eigenthümliche Schwierigkeit dar. Der zu unterſuchende Variationsquotient von gerader Ordnung — in der Regel wird dies alſo der zweite $\delta^2 U$ ſein — beſteht nämlich hier keineswegs immer aus lauter conſtanten Größen, wie dies bei den Anwendungen der Differenzialrechnung auf die Beſtimmung der größten und kleinſten Werthe einer gegebenen Function $u = f(x)$ ſich bei dem zweiten Differenzialquotienten $\frac{d^2u}{dx^2}$ ereignet, ſobald man den aus der Gleichung $\frac{du}{dx} = 0$ gefundenen conſtanten Werth von x ſubſtituirt hat, ſondern jener zweite Variationsquotient muß im Allgemeinen als eine Function von x gedacht werden, wird alſo in vielen Fällen dieſe Variable wirklich enthalten; und dann kann der misliche Umſtand eintreten, daß wenn man x bald größer, bald kleiner, bald poſitiv bald negativ annehmen wollte, die Function $\delta^2 U$ das eine Mal poſitiv, das andere Mal negativ ausfiele, mithin kein recht beſtimmtes, für alle beliebigen Werthe von x ungeändert bleibendes Vorzeichen erhielte. Denn legen wir uns nur den einfachen Fall vor, der gegebene Ausdruck U enthielte blos die Independente x und die Dependente y, und man ſollte die Function $y = f(x)$ ſo beſtimmen, daß U für jeden beliebigen Werth von x größer oder kleiner würde, als die nächſt anliegenden Werthe von U, welche für den nämlichen Werth von x erhalten würden, ſobald ſich die Form der Function $y = f(x)$ zu ändern angefangen hat; ſo würden wir, dem §. 8. zu Folge, die geſuchte Form dieſer Function $f(x)$ beſtimmen aus der Gleichung

$$\delta U = 0 \qquad \text{d. h.} \quad \left(\frac{dU}{dy}\right) \delta y = 0$$

und weil hier δy eine ganz willkührliche, jedoch reelle, Function $\Omega(x)$ bedeuten ſoll, für welche man demnach, wenn man will, auch beliebige conſtante Größen zu ſetzen berechtigt iſt, ſo muß $y = f(x)$ aus der Gleichung

$$\frac{dU}{dy} = 0$$

beſtimmt werden. Nun hatten wir im vorigen Paragraphen für die hier vorausgeſetzte Beſchaffenheit von U überhaupt gefunden

$$\delta^2 U = \frac{d^2U}{dy^2}\delta y^2 + \frac{dU}{dy}\delta^2 y$$

folglich würden wir gegenwärtig haben

$$\delta^2 U = \frac{d^2U}{dy^2}\delta y^2$$

und jetzt käme es darauf an, da der Faktor δy^2 eine positive Größe ist, zu entscheiden, ob die Größe $\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)$, sobald man für das darin vielleicht noch vorkommende y den aus $\left(\frac{dU}{dy}\right) = 0$ gefundenen Ausdruck $y = f(x)$ substituirt, etwas Positives oder Negatives vorstelle. Es wird sich nun in manchen Fällen, bei einer gewissen, besondern Form der Function U allerdings ereignen, daß sich diese zu prüfende Größe $\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)$ auf eine Constante reducirt, und alsdann wird der Augenschein lehren, ob diese Constante eine positive oder negative Zahl sei. Der allgemeinere Fall aber ist offenbar, daß in $\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)$ noch x enthalten sei; und wenn alsdann ungerade Potenzen z. B. x^3, $\frac{a^2}{x^5}$ u. s. f., welche bei negativen Werthen von x ihr Vorzeichen ändern, oder irrationale Functionen von x mit geradem Wurzelexponenten z. B. $\sqrt[4]{x^4 + x^4}$ u. dgl., welchen man mit gleichem Rechte das Vorzeichen (+) wie das Vorzeichen (—) vorsetzen dürfte, in $\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)$ vorkommen, so kann es schwierig oder auch unmöglich sein, zu beweisen, daß $\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)$ für alle beliebigen Werthe von x eine positive oder negative Größe darstellen müße.

Für solche Fälle also, daß in $\delta^2 U$ die Variable x enthalten sei, stellen wir noch folgende allgemeinen Regeln auf, welche jedoch nicht blos für die eben vorausgesetzte einfachere Beschaffenheit der gegebenen Function U, sondern auch für jedes andere U gültig sind:

1) Es giebt eine unzählige Menge von Functionsformen, von welchen man für jeden beliebigen reellen Werth der Independenten x mit Bestimmtheit aussagen kann, ob sie eine positive oder negative Größe vorstellen; z. B.

$$x^2(4b^2 + \tfrac{2}{3}x^2), \qquad \frac{3b^4}{8x^4}\cdot\sqrt[3]{a^3 + \tfrac{2}{3}bx^2}$$

u. dgl.

Wenn nun $\delta^2 U$ (oder allgemeiner der erste nicht verschwindende Variationsquotient gerader Ordnung) aus einer derartigen Function gebildet ist, so fällt die eben gedachte Schwierigkeit in Betreff des zweideutigen Vorzeichens dieser Größe von selbst weg.

2) Selbst in solchen Fällen, daß entweder wegen ungerader Potenzen von x oder auch wegen Radikalien mit einem geraden Wurzelexponenten, welche als Faktoren in dem für $\delta^2 U$ gefundenen Ausdrucke auftreten, diese Größe an und für sich ein zweideutiges Vorzeichen erhielte, kann man häufig die entstandene Schwierigkeit dadurch umgehen, daß man zuvörderst untersucht, ob die Größe U_0, welche den in Frage stehenden größten oder kleinsten Werth von U angeben soll, an und für sich ein bestimmtes Vorzeichen erhalte oder ob deren Vorzeichen ebenfalls zweideutig sei. Es wird nämlich häufig dieselbe Wurzelgröße, welche die Function $\delta^2 U$ zweideutig macht, auch in U_0 erscheinen und daselbst einen gleichen Einfluß auf das Vorzeichen ausüben; — oder auch eine ungerade Potenz von x, sowohl in U_0 wie in $\delta^2 U$ als Faktor vorkommend, wird bewirken, daß gleichzeitig U_0 und $\delta^2 U$ ihr Vorzeichen ändern, wenn man das Vorzeichen der independenten Variablen x ändert. Und so oft nun eine derartige wechselseitige Beziehung zwischen U_0 und $\delta^2 U$ Statt findet, daß, je nachdem man über den Werth von x und über das Vorzeichen der zweideutigen Wurzelgröße verfügt, U_0 und $\delta^2 U$ entweder gleichzeitig positiv und gleichzeitig negativ sein müßen, wie dies z. B. mit folgenden zwei Functionen

$$\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{(b+x)^2} \quad \text{und} \quad \frac{x^3}{(b+x)^4\sqrt{a^2 - x^2}}$$

der Fall sein würde, — oder auch eine solche Beziehung, daß $\delta^2 U$ negativ ist, wenn U_0 als positiv angenommen wird und umgekehrt, wie dies z. B. mit den zwei Functionen

$$\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{(b+x)^2} \quad \text{und} \quad \frac{-a^2x}{(b+x)^4\sqrt{a^2 - x^2}}$$

offenbar der Fall ist; so wird man, eben weil U_0 nun selbst ein zweideutiges Vorzeichen hat, die Idee eines Maximums oder Minimums im algebraischen Sinne aufgeben, und sich blos die Frage über ein Maximum oder Minimum im arithmetischen Sinne vorlegen. Offenbar ist

der absolute Werth von U_0 ein $\left.\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ je nachdem U_0 und $\delta^2 U$ $\left.\begin{matrix}\text{einerlei}\\ \text{entgegengesetztes}\end{matrix}\right\}$ Vorzeichen erhalten. Und hiernach beantwortet sich die vorgelegte Frage.

3) Wenn aber $\delta^2 U$ an und für sich mit einem zweideutigen Vorzeichen behaftet ist, und wenn eine solche wechselseitige Beziehung zwischen U_0 und $\delta^2 U$, wie sie so eben vorausgesetzt worden ist, nicht nachgewiesen werden kann; so läßt sich auch im Allgemeinen nicht annehmen, daß die Gleichung $\delta U = 0$ wirklich zu einem größten oder kleinsten Werth der gegebenen Function U geführt habe, und man kann höchstens sich dahin aussprechen, daß so lange die Independente x innerhalb gewißer, aus der Beschaffenheit des für $\delta^2 U$ gefundenen Ausdrucks näher zu bestimmender Grenzwerthe angenommen werde, U_0 größer resp. kleiner sei als jeder durch Variation zu erhaltende Werth U'.

§. 11.

Endlich aber glauben wir bei diesen Betrachtungen über die Entscheidung der Frage, ob die Gleichung $\delta U = 0$ auf ein Maximum oder ein Minimum oder auf keines von beiden geführt habe, auch des Umstands gedenken zu müßen, welcher freilich aus der in der Differenzialrechnung entwickelten Lehre über die größten und kleinsten Werthe einer Function schon bekannt ist, daß man nämlich, wenn der Gleichung $\delta U = 0$ oder auch der Gleichung $\delta U = \frac{1}{0}$ Genüge geleistet und durch die so eben erklärten oder andere später noch auseinander zu setzende Proben erkannt worden ist, daß man wirklich zu einem größten oder kleinsten Werthe von U gelangt sei, nicht nothwendig ein absolutes $\left.\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ gefunden habe, d. h. den $\left.\begin{matrix}\text{größten}\\ \text{kleinsten}\end{matrix}\right\}$ unter allen möglichen Werthen, deren U für irgend einen fix angenommenen Werth von x überhaupt fähig ist, sondern daß man sich nur davon überzeugt halten dürfe, daß der gefundene Werth U_0 in Vergleichung mit den nächst vorhergehenden und nächst folgenden Werthen U' ein $\left.\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ sei. Denn es önnte immer noch unter den unzähligen verschiedenen Werthen, welche U

überhaupt für den fix angenommenen Werth von x aber bei geänderter Beschaffenheit von y erhält, einen oder auch viele geben, welche noch $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\\text{kleiner}\end{matrix}\right.$ als das gefundene $\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}$ U_0 wären. Dieser Umstand wird in der That eintreten, so oft entweder die Gleichung $\delta U = 0$ mehrere Auflösungen zuläßt, oder so oft man neben dieser Gleichung auch noch aus der Gleichung $\delta U = \infty$ d. h. $\frac{1}{\delta U} = 0$ brauchbare Auflösungen erhält, von denen einige den an ein Maximum, die andern den an ein Minimum zu machenden Anforderungen Genüge leisten. In solchen Fällen kann man dann noch eine besondere Untersuchung darüber anstellen, welches unter den verschiedenen für U erhaltenen $\begin{matrix}\text{Maxima}\\\text{Minima}\end{matrix}$ das $\begin{matrix}\text{allergrößte}\\\text{allerkleinste}\end{matrix}$ sei. Der eigentliche Grund aber, warum es unbeschadet der Voraussetzung, daß $\delta U = 0$ und $\delta^2 U$ eine $\begin{matrix}\text{negative}\\\text{positive}\end{matrix}$ Größe, also U_0 ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}\right.$ sei, dennoch andere Werthe U′ geben könne, welche sowohl im arithmetischen wie im algebraischen Sinne noch $\begin{matrix}\text{größer}\\\text{kleiner}\end{matrix}$ als U_0 sind, und warum diese Thatsache nicht etwa als mit unsern früheren Schlüßen (§. 8) in Widerspruch stehend angesehen werden darf, beruht einfach darin, daß aus der Formel

$$U' = U_0 + \tau^2\left[\frac{\delta^2 U}{1.2} + \frac{\delta^3 U}{1.2.3}\tau + \frac{\delta^4 U}{1.2.3.4}\tau^2 + \ldots\right]$$

nur in so fern, als wir unter τ uns hinreichend kleine Werthe von t vorstellen, die Größe

$$\tau^2\left[\frac{\delta^2 U}{1.2} + \frac{\delta^3 U}{1.2.3}\tau + \frac{\delta^4 U}{1.2.3.4}\tau^2 + \ldots\ldots\right]$$

das nämliche Vorzeichen, wie ihr erstes Glied $\frac{\delta^2 U}{1.2}\tau^2$ haben muß. Denn es ist leicht zu denken, daß bei dem fortwährenden Wachsen von τ und unter sonst geeigneten Umständen die in Parenthese geschloßene Summe irgend einmal das entgegengesetzte Vorzeichen von $\delta^2 U$ annehmen kann; und alsdann wird die Differenz $U' - U_0$ eine $\begin{matrix}\text{positive}\\\text{negative}\end{matrix}$ Größe, nachdem sie vorher eine $\begin{matrix}\text{negative}\\\text{positive}\end{matrix}$ Größe gewesen ist. Uebrigens versteht

es sich von selbst, daß wenn U zuerst für $t = 0$ ein Maximum gewesen, also bei den nächsten positiven oder negativen Werthen von t abgenommen haben, demnächst aber während der continuirlichen Veränderung von t wieder größer als das bei $t = 0$ gefundene Maximum werden soll, nothwendig auf dieses Maximum erst ein Minimum gefolgt sein müße, u. s. w.

§. 12.

Um jetzt den Gang des in den vorhergehenden Paragraphen angedeuteten Calculs noch beßer aufzuklären, und den Gebrauch der aufgestellten Regeln sichtbar zu machen, wollen wir beispielsweise einige einfachere Aufgaben behandeln.

Erste Aufgabe. Welche unter allen auf dasselbe rechtwinklige Coordinatensystem bezogenen ebenen Curven hat die Eigenschaft, daß sie in jedem ihrer Punkte das Produkt der Ordinate und der um die Ordinate verminderten Abscisse größer macht, als es an der nämlichen Abscisse irgend eine andere Curve machen kann?

Auflösung. Man hat hier $U = y(x - y)$ und es kommt darauf an, für y eine solche Function von x zu ermitteln, daß dieser Ausdruck für eine beliebig angenommene Abscisse einen größern Werth erhalte, als wenn für y andere Functionen von x angenommen würden. Wir setzen also

$$\delta U = \frac{dU}{dy}\delta y = 0$$

woraus, da δy eine willkührliche Größe bedeuten soll, sogleich

$$\frac{dU}{dy} = 0 \qquad \text{d. h.} \qquad x - 2y = 0$$

folgt. Dies ist bereits die gesuchte Gleichung zwischen x und y, man erhält aus derselben

$$y = \tfrac{1}{2}x$$

und sieht also, daß die gesuchte Curve nichts anderes ist, als eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten O und unter einem solchen Winkel POM (Fig. 3) gegen die Abscissenaxe gezogene Gerade, daß $\frac{MP}{OP} = \frac{1}{2}$ ist. Dieser Winkel ist beiläufig $26^0\,33'$ groß. — Um zu entscheiden, ob ein Maximum oder Minimum gefunden worden sei, leiten wir aus

$$\delta U = (x - 2y)\delta y$$

gemäß der in §. 9 erläuterten Vorschrift sofort ab

$$\delta^2 U = -2\delta y^2 + (x - 2y)\delta^2 y$$

und weil wir hierin für y den gefundenen Werth $y = \frac{1}{2}x$ zu setzen haben, so reducirt sich $\delta^2 U$ auf die Größe $-2.\delta y^2$, welche kein x enthält, also für jeden beliebigen Werth von x negativ ist und deshalb unzweideutig anzeigt, daß die Gleichung $y = \frac{1}{2}x$ zu einem Maximum von U (im algebraischen Sinne) geführt hat.

Es ist übrigens in der gegenwärtigen Aufgabe sehr leicht, sich auch direkt von der Richtigkeit dieser Resultate zu überzeugen. Denn es sei (Fig. 3) $MP = y'$ die zu $OP = x$ gehörige Ordinate an irgend einer andern Curve, so ist, wenn man $Pq = PM'$ abgeschnitten und auch $q'n' = Pq'$ gemacht hat, das Rechteck $Oq'n's'$ der neue Werth von $U' = x(x - y')$, während das auf analoge Weise construirte Quadrat $Oqns$ die Größe des ursprünglichen $U = x(x-y) = \frac{1}{2}x^2$ darstellt. Nun ist aber jedesmal $Oq' + q'n' = Oq + qn = OP$, und man weiß, daß wenn eine gegebene Linie OP in zwei Theile zerlegt wird, das aus beiden Theilen gemachte Rechteck dann seinen größten Werth erhält, wenn beide Theile Oq und qP einander gleich sind.

Zweite Aufgabe. Es soll eine ebene Curve bestimmt werden, welche auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem bezogen, die Eigenschaft besitzt, daß für einen beliebigen Punkt derselben das von der Normale und den beiden Coordinatenaxen eingeschloßene Dreieck NOQ (Fig. 4) größer oder kleiner wird, als für einen der nämlichen Abscisse OP zugehörigen aber auf einer beliebigen Nachbarcurve liegenden Punkt, mit der näheren Bestimmung jedoch, daß sowohl bei der gesuchten als bei den in Betrachtung zu ziehenden Nachbarcurven der Unterschied zwischen dem Quadrat der Abscisse und dem Produkt der Abscisse in die Subtangente TP einen gegebenen positiven oder negativen Werth A habe.

Auflösung. I) Man wird leicht für die hier in Betrachtung kommenden Linien folgende Ausdrücke finden:

$$TP = y\frac{dx}{dy} \qquad ON = x + y\frac{dy}{dx} \qquad OQ = ON \,.\, \mathrm{Cotg}\, MTN = x\frac{dx}{dy} + y$$

also ist, wenn man zugleich $\frac{dy}{dx} = p$ setzt

$$(1) \qquad U = \tfrac{1}{2}(x + py)\left(\frac{x}{p} + y\right) = \frac{1}{2p}(x + py)^2$$

und außerdem, zu Folge der besondern Bedingung,

$$(2) \qquad x^2 - \frac{xy}{p} = A$$

Sucht man aus dieſer letztern Gleichung den Werth für $p = \frac{xy}{x^2 - A}$ und ſubſtituirt denſelben in (1), ſo wird

$$(3) \qquad U = \frac{x(x^2 + y^2 - A)^2}{2y(x^2 - A)}$$

Hieraus fließt $\delta U = \frac{x}{x^2 - A} \cdot \frac{3y^2 - x^2 + A}{2y^2} (x^2 + y^2 - A) \cdot \delta y$

Aus der Bedingungsgleichung $\delta U = 0$ erhält man nun

entweder (4) $x^2 + y^2 - A = 0$

oder (5) $3y^2 - x^2 + A = 0$

die Bedingung $\delta U = \infty$ dagegen würde erfüllt werden durch die Annahmen $x = \sqrt{A}$ oder $y = 0$. Dieſe Annahmen würden, wie man aus (3) erſieht, für jedes beliebige x den Werth von U_0 ſelbſt unendlich machen, und in ſo fern allerdings ein Maximum von U (im arithmetiſchen Sinne) herbeiführen. Für die geometriſche Auslegung aber ſagt dieſe Auflöſung nichts anders, als daß, wenn man alle Punkte M {auf einer mit der Ordinatenaxe parallelen Geraden / auf der Abſciſſenaxe ON} annehmen wollte (Fig. 4), die Normale MN parallel zur {Abſciſſenaxe ON / Ordinatenaxe OQ} ausfallen und deswegen das Dreieck ONQ in einen unendlichen Flächenſtreifen übergehen würde.

II) Die Gleichung (4) bezieht ſich augenſcheinlich auf einen Kreis, der um den Urſprung der Coordinaten mit dem Halbmeßer $\sqrt{A}$ beſchrieben werden müßte, alſo nur in den Fällen auf eine reelle Curve, wenn die gegebene Größe A poſitiv iſt. Alsdann wird aber der zugehörige Werth von U, nämlich U_0, ſelbſt gleich Null, wovon man ſich auch durch die geometriſche Betrachtung überzeugt, daß alsdann die beiden Punkte N und Q fortwährend mit dem Anfangspunkt der Coordinaten O zuſammenfallen; man hat alſo im arithmetiſchen Sinne ein Minimum von U gefunden. Die Gleichung (2) ſtimmt mit (4) überein, weil durch Differenziation von (4)

$$p = -\frac{x}{y} \qquad \text{alſo} \qquad x^2 - \frac{xy}{p} = x^2 + y^2 = A$$

erhalten wird.

III) Wir haben uns alſo nur noch mit der durch die Gleichung (5) dargebotenen Auflöſung unſerer Aufgabe zu beſchäftigen. Dieſe Gleichung

giebt $y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}(x^2 - A)}$ und bezieht sich auf eine Hyperbel, deren Mittelpunkt sich im Ursprung der Coordinaten befindet, und deren Queraxe entweder mit der Abscissenaxe oder mit der Ordinatenaxe zusammenfällt, je nachdem die gegebene Größe A positiv oder negativ ist. Die Gleichung (2) wird diesmal mit (5) identisch, weil aus (5)

$$p = \tfrac{1}{3}\frac{x}{y} \quad , \quad \text{also} \quad x^2 - \frac{xy}{p} = x^2 - 3y^2 = A$$

folgt; der betreffende Werth von U aber, nämlich U_0, reducirt sich, wie man aus (3) findet, auf

$$U_0 = \frac{x \,.\, (4y^2)^2}{2y \,.\, 3y^2} = \tfrac{8}{3}xy = \pm\tfrac{8}{3}x\sqrt{\tfrac{1}{3}(x^2 - A)}$$

Um zu entscheiden, ob dieser Werth ein Maximum oder Minimum sei, wollen wir in $\delta^2 U$ die gefundene Function $y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}(x^2 - A)}$ substituiren. Aus $\delta U = \frac{dU}{dy}\delta y$ folgt nun (§. 9 Formel 5.β)

$$\delta^2 U = \frac{d^2U}{dy^2}\delta y^2 + \frac{dU}{dy}\delta^2 y$$

Vermöge der Bedingung $\delta U = 0$ verschwindet aber hierin der zweite (mit $\delta^2 y$ multiplicirte) Bestandtheil, und den übrig bleibenden wird man leicht auf die Form bringen

$$\delta^2 U = \frac{2x}{x^2 - A}\left[\frac{y^2 - x^2 + A}{y} + \frac{(y^2 + x^2 - A)^2}{2y^3}\right]\delta y^2$$

Dieser Ausdruck zieht sich, sobald man für das Binom $x^2 - A$ überall $3y^2$ einsetzt, zusammen in

$$\delta^2 U = \frac{2x}{3y^2}\left(-\frac{2y^2}{y} + \frac{8y^4}{y^3}\right)\delta y^2 = \frac{4x}{y}\delta y^2$$

also ist, wenn man in Gedanken durch dt^2 dividirt (§. 9)

$$\delta^2 U = \frac{4x}{y} \cdot \delta^2 y^2 = \frac{4x}{\pm\sqrt{\frac{1}{3}(x^2 - A)}}\delta^2 y^2$$

Nun ändert sich zwar das Vorzeichen dieser Größe, je nachdem man x positiv oder negativ und die Wurzelgröße mit dem oberen oder untern Vorzeichen nehmen will, und deshalb fällt die Frage nach der Existenz eines Maximums oder Minimums im algebraischen Sinne weg. Die Vergleichung mit dem oben gefundenen Werthe

$$U_0 = \tfrac{8}{3}xy = \pm\tfrac{8}{3}x\sqrt{\tfrac{1}{3}(x^2 - A)}$$

lehrt aber, daß das Vorzeichen von $\delta^2 U$, mag man nun für x und y

positive oder negative Werthe annehmen, mit dem Vorzeichen von U_0 immer übereinstimmt; und aus diesem Umstande schließen wir, daß U_0 im arithmetischen Sinne ein Minimum ist (§. 10).

IV) Daß jede der beiden Gleichungen (4) und (5) mit der gegebenen Bedingungsgleichung (2) übereinstimmt, haben wir, obwohl man es als etwas selbstverständliches hätte ansehen können, direct dadurch bewiesen, daß wir (4) resp. (5) differenziirten und daraus die Gleichung (2) herleiteten. Dieser letztern als einer Differenzialgleichung entsprechen daher (4) und (5) als zwei verschiedene Integrale, und zwar als zwei partikuläre Integrale, die aus dem allgemeinen Integrale durch Annahme bestimmter Werthe für die willkührliche Constante hervorgehen.

Sobald man nämlich die Gleichung (2) auf die Form bringt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - A} \qquad \text{oder} \qquad \frac{dy}{y} = \frac{xdx}{x^2 - A}$$

und integrirt, so erhält man

$$\mathrm{l}y = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{l}(x^2 - A) + \mathrm{Const} = \mathrm{l}\cdot\sqrt{\frac{x^2 - A}{C}}$$

oder (6) $$y^2 = \frac{1}{C}(x^2 - A)$$

und je nachdem man hierin der willkührlichen Integrationsconstanten C den Werth -1 oder $+3$ ertheilt, entsteht die Gleichung (4) oder (5).

Dieses Sachverhältnis veranlaßt uns zu der Bemerkung, daß man zur Auflösung der vorliegenden Aufgabe noch auf einem ganz andern Wege hätte gelangen können, und daß man ebenso bei anderen Aufgaben, welche mit der hier behandelten von gleicher Beschaffenheit sind, die Wahl zwischen zwei verschiedenen Auflösungsmethoden hat. Man kann nämlich mit der Integration der Bedingungsgleichung (2) beginnen und nachdem man die aus dem allgemeinen Integrale (6) fließenden Werthe

$$y = \frac{1}{\sqrt{C}}\sqrt{x^2 - A} \qquad p = \frac{1}{\sqrt{C}}\frac{x}{\sqrt{x^2 - A}}$$

in den Ausdruck U, wie er ursprünglich in (1) vorlag, eingesetzt hat, wird man den dadurch hervorgehenden Ausdruck als Function der noch unbestimmten Größe C ansehen und denjenigen (oder diejenigen) Werthe von C aufsuchen, welche U zu einem Maximum oder Minimum machen. Auf diese Weise erhält man zunächst

$$U = \frac{1}{2p}(x + yp)^2 = \frac{(1 + C)^2 x\sqrt{x^2 - A}}{2C^{\frac{3}{2}}}$$

und die Bedingungsgleichung für das Maximum oder Minimum

$$\frac{dU}{dC} = \left[\frac{1+C}{C^{\frac{1}{2}}} - \frac{3}{4}\frac{(1+C)^2}{C^{\frac{1}{2}}}\right] x\sqrt{x^2 - A} = 0$$

führt zu der quadratischen Gleichung

$$(1+C)(C-3) = 0$$

deren Wurzeln die vorhin besprochenen Werthe $C = -1$ und $C = +3$ sind. Hätte man dagegen $\frac{dU}{dC} = \frac{1}{0}$ setzen wollen, so würde auch U unendlich geworden sein. — Dieses sind genau dieselben Resultate, wie die vorhin auf anderm Wege gewonnenen.

§. 13.

Die beiden im vorigen §. behandelten Aufgaben gehörten in sofern zu verschiedenen Classen, als bei der zweiten außer dem Ausdruck $U = F(x, y, p, q \ldots)$, welcher zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden sollte, noch ein anderer Ausdruck $\Theta(x, y, p \ldots)$ gegeben war, welcher für alle die in Betrachtung zu ziehenden Curven einerlei Werth $= A$ behalten sollte*). Da in den Fällen, wenn in U und Θ Differenzialquotienten höherer Ordnung vorkommen, dem am Ende des vor. §. gedachten Versuche, die Gleichung

$$\Theta(x, y, p \ldots) - A = 0$$

zu integriren, leicht mancherlei Schwierigkeiten entgegentreten, so wird man bei Aufgaben dieser Art die genannte Bedingungsgleichung überhaupt dazu benutzen, um aus U den einen oder andern der Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ zu eliminiren. Zu diesem Zwecke kann es unter Umständen nützlich sein die Gleichung $\Theta - A = 0$ zuvörderst zu differenziiren; wie z. B. wenn in U enthalten wären x, y, p, q dagegen in Θ nur x, y, p, so würde man mittelst der beiden Gleichungen

$$\Theta - A = 0 \qquad \text{und} \qquad d\Theta = 0$$

aus U die beiden Differenzialquotienten p und q zu eliminiren suchen.

Ist nun aber eine solche nähere Bedingung $\Theta = A$ entweder gar

*) Dieser Werth war in der vorhergehenden Aufgabe als gegeben anzusehen. Wenn dagegen blos gefordert wird, daß für alle variirenden Nachbarcurven der Ausdruck Θ einerlei Werth behalten soll, ohne daß dieser Werth ($= A$) gegeben ist, so gehört die Aufgabe zu den später in §. 18. II zu betrachtenden.

nicht in der Aufgabe enthalten, oder hat man den gegebenen Ausdruck in Gemäßheit dieser Bedingung zuvörderst so umgestaltet, wie wir es eben andeuteten; so stützt sich dann die weitere Rechnung, um der Gleichung $\delta U = 0$ Genüge zu leisten, auf folgenden allgemeinen Lehrsatz:

Wenn die Gleichung

$$(1)\quad X_0 + X_1\delta y + X_2\frac{d\delta y}{dx} + X_3\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \cdots + X_{m+1}\frac{d^m\delta y}{dx^m} = 0$$

für jede beliebige Beschaffenheit der Function $\delta y = \Omega(x)$ Statt finden soll, wobei $X_0, X_1, \ldots X_{m+1}$ irgend welche Coefficienten vorstellen, welche entweder aus unbestimmten Constanten bestehen oder auch die Variable x enthalten mögen, jedoch mit $\delta y = \Omega(x)$ in keinem Zusammenhang stehen: so muß nothwendig

$$X_0 = 0 \qquad X_1 = 0 \qquad X_2 = 0 \quad \ldots \quad X_{m+1} = 0$$

sein.

Beweis. Da die Gleichung (1), oder wenn wir die Differenzialquotienten von $\Omega(x)$ durch $\Omega'(x)$, $\Omega''(x)\ldots$ bezeichnen, die Gleichung

$$X_0 + X_1.\Omega(x) + X_2.\Omega'(x) + X_3.\Omega''(x) + \cdots = 0$$

für jede beliebige Beschaffenheit der Function $\Omega(x)$ Statt finden soll, so muß sie

erstens bestehen, wenn man für $\Omega(x)$ irgend eine beliebige Constante C_1 setzt. Alsdann ist aber $\Omega'(x) = 0$, $\Omega''(x) = 0$, $\Omega'''(x) = 0$ u. s. f. und man hat die Bedingung

$$X_0 + X_1.C_1 = 0$$

woraus wegen der beliebig annehmbaren Größe von C_1 sofort

$$X_0 = 0 \qquad X_1 = 0$$

folgt.

Aus diesem Grunde reducirt sich die Gleichung (1) auf

$$X_2.\Omega'(x) + X_3.\Omega''(x) + X_4.\Omega'''(x) + \cdots = 0$$

und da diese für jede beliebige Beschaffenheit von $\Omega(x)$ halten soll, so muß sie

zweitens bestehen, wenn man

$$\Omega(x) = C_1 + C_2x$$

annimmt, unter C_1 und C_2 zwei beliebige Constanten verstehend. Dadurch wird aber

$$\Omega'(x) = C_2 \qquad \Omega''(x) = 0 \qquad \Omega'''(x) = 0 \qquad \text{u. s. f.}$$

und man hat die Bedingung $X_2C_2 = 0$, woraus

$$X_2 = 0$$

folgt. — Aus dieſem Grunde reducirt ſich die Gleichung (1) auf

$$X_3.\Omega'(x) + X_4.\Omega'''(x) + \cdots\cdots = 0$$

und indem man nun ſucceſſive

$$\Omega(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2$$
$$\Omega(x) = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3$$

u. ſ. f. annimmt, gelangt man durch Wiederholung der nämlichen Schlüße offenbar zu

$$X_3 = 0 \qquad X_4 = 0 \qquad \text{u. ſ. f.}$$

II) In allen Fällen alſo, wenn diejenige Function $y = f(x)$ geſucht werden ſoll, durch welche ein gegebener Ausdruck

$$U = F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) = F(x, y, p, q, \ldots)$$

zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden ſoll, und wenn dabei die Variationen $\delta y, \delta p, \ldots$ gar keiner näheren Beſchränkung unterliegen, wird man, weil $\delta U = \left(\frac{dU}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dU}{dp}\right)\frac{d\delta y}{dx} + \cdots$ für jeden Werth von x verſchwinden ſoll, in der Zuſammenſtellung von

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{dU}{dy} &= 0 \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{0} \\ \frac{dU}{dp} &= 0 \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{0} \\ \frac{dU}{dq} &= 0 \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{0} \end{aligned}$$

. . . . . .

die nöthigen Bedingungsgleichungen zur Auflöſung des Problems beſitzen. Man wird alſo, wenn dieſe Gleichungen ſich untereinander nicht vertrügen, ſo daß es unmöglich wäre, allen gleichzeitig Genüge zu leiſten, ſich dahin erklären, daß gar keine Function $y = f(x)$ von der verlangten Eigenſchaft exiſtire. Dieſer Umſtand mag um ſo leichter ſcheinen eintreten zu können, als die Größen $p, q, \ldots$ keineswegs untereinander und von y unabhängig, vielmehr, ſobald $y = f(x)$ gefunden iſt, ganz beſtimmte Functionen von x ſind, ſo daß der Fall ein ganz anderer iſt als wenn man eine Anzahl algebraiſcher Gleichungen mit eben ſo viel Unbekannten aufzulöſen hätte.

Andererſeits iſt jedoch nicht zu überſehen, daß häufig, obwohl in U die Function y und ihre Differenzialquotienten

$$y,\ p,\ q,\ \cdots y^{(t)},\ y^{(t+1)} \cdots y^{(m)}$$

nämlich $$y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2} \cdots \frac{d^ty}{dx^t},\ \frac{d^{t+1}y}{dx^{t+1}} \cdots \frac{d^my}{dx^m}$$

enthalten sind, die Natur der Aufgabe doch erfordern wird, daß blos einige Glieder dieser Reihe variiren, und dagegen andere, etwa $y^{(t)}$, $y^{(l)}$.. keine Variationen zulassen, d. h. daß

$$\delta.y^{(t)} = \frac{d^t\delta y}{dx^t} = 0 \qquad \delta.y^{(l)} = \frac{d^l\delta y}{dx^l} = 0 \quad \text{u. s. f.}$$

sei (§. 17). Da in einem solchen Falle in dem Aggregat (1) die mit $\frac{d^t\delta y}{dx^t}, \frac{d^l\delta y}{dx^l} \cdots$ multiplicirten Glieder von selbst herausfallen, so sind blos diejenigen Differenzialquotienten

$$\frac{dU}{dy},\ \frac{dU}{dp}, \cdots \frac{dU}{d.y^{(t-1)}},\ \frac{dU}{d.y^{(t+1)}}, \cdots$$

welche mit den nicht verschwindenden Variationsquotienten multiplicirt sind, gleich Null resp. $= \frac{1}{0}$ zu setzen; hierdurch vermindert sich die Anzahl der Bedingungsgleichungen, und die Möglichkeit ihres gleichzeitigen Bestands wird erleichtert.

III) Was nun die weitere Behandlung dieser Gleichungen (2) anbelangt, so wird man, je nach der Natur des einzelnen Falls, jedesmal den am bequemsten scheinenden Weg leicht finden, weshalb es hinreichen wird den folgenden Beispielen nur noch die allgemeine Bemerkung vorauszuschicken, daß man

entweder einen in $\frac{dU}{dy}, \frac{dU}{dp} \cdots$ gemeinschaftlich enthaltenen Factor gleich Null resp. $= \frac{1}{0}$ setzen wird;

oder daß man die eine oder andere der Gleichungen (2) zu integriren und die dadurch eintretenden unbestimmten Integrationsconstanten so zu bestimmen suchen wird, daß den übrigen Forderungen ebenfalls Genüge geleistet werde;

oder endlich, daß man zuvörderst den einen oder andern Differenzialquotienten p, q,.. aus diesen Gleichungen eliminirt und dadurch zu einer Differenzialgleichung niederer Ordnung, ja wohl gar zu einer endlichen Gleichung zwischen x und y gelangt.

In Betreff der Gleichungen

$$(3) \qquad \frac{dU}{dy}=\infty \qquad \frac{dU}{dp}=\infty \qquad \frac{dU}{dq}=\infty \qquad \text{u. f. f.}$$

machen wir jedoch noch darauf aufmerksam, daß sie zumeist dahin führen, den einen oder andern aus variablen Größen gebildeten Ausdruck, welcher in den für diese partiellen Differenzialquotienten erhaltenen Formeln im Nenner auftritt, gleich Null zu setzen, daß dadurch aber in der Regel auch U selbst unendlich gemacht werden wird, und daß aus diesem Grunde, insofern das gesuchte Maximum oder Minimum einen endlichen Werth besitzen soll, die Bedingungsgleichungen (3) zu verwerfen sind. Dieser Fall wird namentlich dann eintreten, wenn der gedachte variable Ausdruck bereits in U selbst, gleichviel ob mit einem ganzen oder gebrochenen Potenzexponenten behaftet, im Nenner stand, oder wenn der Logarithmus von einem solchen Ausdruck im Zähler stand u. s. f. Und so oft wir daher bei der Behandlung von Aufgaben, welche unsern weiteren Untersuchungen zur Erläuterung dienen sollen, uns blos an die Gleichungen

$$(4) \qquad \frac{dU}{dy}=0 \qquad \frac{dU}{dp}=0 \qquad \frac{dU}{dq}=0 \qquad \text{u. f. f.}$$

halten, und die Gleichungen (3) stillschweigend übergehen, so wird das geschehen, weil die Auflösung $U=\infty$ zu welcher diese letztern hingeführt haben würden, unbrauchbar oder doch keiner besondern Erwähnung werth erschien.

§. 14.

Sobald man nun auf die eine oder andere Weise eine Function $y=f(x)$ ermittelt hat, welche den im vorigen §. besprochenen Bedingungsgleichungen Genüge leistet, so darf man erwarten, daß diese den gegebenen Ausdruck

$$(1) \qquad U=F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ ..\right)=F(x,\ y,\ p,\ q,\ ..)$$

wirklich entweder zu einem Maximum oder zu einem Minimum mache, aus bekannten Gründen (§. 10) kann man sich jedoch nicht immer darauf verlassen. Um hierüber Gewißheit zu erlangen, so wie auch um das Maximum vom Minimum zu unterscheiden, gedenken wir daher folgender Hülfsmittel:

I) Aus der Beschaffenheit der Aufgabe kann man oft unmittelbar mit Sicherheit schließen, daß nur ein einziges Maximum (resp. Minimum) möglich sei, und dieses muß also, wenn die Gleichung $\delta U=0$

(oder $\delta U = \frac{1}{0}$) nur eine einzige Auflösung zuließ, wirklich gefunden sein.

II) Man kann den Ausdruck für $\delta^2 U$ nach den Regeln des §. 9 bilden, und zusehen, ob für alle in Betrachtung zu ziehenden Werthe von x dieser Ausdruck durch die für $y, p, q..$ gefundenen Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)...$ einen positiven oder negativen Werth erhalte. — Dieses Verfahren haben wir bei den in §. 12 behandelten Aufgaben angewendet.

III) Der gegebene Ausdruck für U verwandelt sich durch Einführung der gefundenen Function $y = f(x)$, wodurch auch $p = f'(x)$, $q = f''(x)$ u. s. f. lauter bestimmte Functionen von x werden, in eine genau bestimmte Function der einzigen Variablen x, so daß man hat $U_0 = \Phi(x)$. Sobald man aber die Function $f(x)$, welche dem Werthe $t = 0$ entspricht, variiren läßt, indem man in Gedanken dem Variationsargument einen beliebigen, jedoch hinlänglich kleinen Zahlwerth τ beilegt; so geht y über in

$$y + \nabla y = y + \delta y . \tau + \tfrac{1}{2} \delta^2 y . \tau^2 + \cdots$$

(§. 9) und die Functionen $p, q..$ gehen über in

$$p + \nabla p = p + \delta p . t + \tfrac{1}{2} \delta^2 p . \tau^2 + \cdots$$
$$q + \nabla q = q + \delta q . \tau + \tfrac{1}{2} \delta^2 q . \tau^2 + \cdots$$

u. s. f.

Man kann daher auch den Weg einschlagen, daß man in (1) an die Stelle von $y, p, q..$ zunächst die Binome $y + \nabla y$, $p + \nabla p$, $q + \nabla q..$ substituirt, den hierdurch entstehenden Ausdruck nach den aufsteigenden Potenzen der Variationen ∇y, ∇p, $\nabla q...$ (im Allgemeinen also mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes) entwickelt, und dann für $y, p, q....$ die gefundenen Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)...$ einsetzt. Derjenige Theil des hierdurch erhaltenen Aggregats, welcher ∇y, ∇p, ∇q, ... gar nicht enthält, ist dann offenbar das in Frage stehende Maximum (resp. Minimum) U_0, alle übrigen Bestandtheile aber bilden den Werth von ∇U_0. Darin werden selbstverständlich, in so fern $y, p, q...$ die Gleichungen (4) des vorigen §. erfüllen, alle Glieder mit den ersten Potenzen von ∇y, ∇p, $\nabla q...$ fehlen, und man wird also zunächst die Summe Σ_2 derjenigen Glieder in das Auge zu faßen haben, welche in Beziehung auf die genannten Variationen von der zweiten Dimension sind. Selbst dann würde dieses Verfahren anwendbar sein, wenn sich $U_0 + \nabla U_0$, wie es ausnahmsweise und nach Behandlung der Gleichung $\delta U = \frac{1}{0}$ der Fall

sein kann, nicht nach ganzen positiven Potenzen von ∇y, ∇p, ∇q.. entwickeln ließe, indem man nur die mit den niedrigsten Potenzen dieser Variationen versehenen Glieder in Hinsicht auf ihr Vorzeichen zu untersuchen hätte. Im Allgemeinen aber ist

$$\begin{aligned} \Sigma_2 = \mathfrak{A}\nabla y^2 &+ \mathfrak{B}\nabla y\nabla p + \mathfrak{D}\nabla y\nabla q + \mathfrak{G}\nabla y\nabla r + \cdot\cdot \\ &+ \mathfrak{C}\nabla p^2 + \mathfrak{E}\nabla p\nabla q + \mathfrak{H}\nabla p\nabla r + \cdot\cdot \\ &+ \mathfrak{F}\nabla q^2 + \mathfrak{J}\nabla q\nabla r + \cdot\cdot \\ &+ \mathfrak{K}\nabla r^2 + \cdot\cdot \\ &+ \cdot\cdot \end{aligned} \qquad (2)$$

worin $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... gegebene Functionen von x vorstellen; und es kommt dann darauf an zuzusehen, ob ein solcher Ausdruck sowohl für positive als für negative Werthe von ∇y, ∇p, ∇q.... und für beliebige Verhältnisse dieser Variationen fortwährend entweder einen positiven oder fortwährend einen negativen Werth erhalte.

Wenn hier blos drei Glieder vorkommen, d. h. wenn entweder

$$\Sigma_2 = \mathfrak{A}\nabla y^2 + \mathfrak{B}\nabla y\nabla p + \mathfrak{C}\nabla p^2$$

oder

$$\Sigma_2 = \mathfrak{A}\nabla p^2 + \mathfrak{B}\nabla p\nabla q + \mathfrak{C}\nabla q^2$$

oder dgl. ist; so müßen erstens $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ in Rücksicht auf das Vorzeichen Größen von einerlei Art sein, d. h. beide $\left.\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ je nachdem ∇U_0 $\left.\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ werden soll, außerdem aber muß bekanntlich auch die Differenz $\mathfrak{C} - \frac{\mathfrak{B}^2}{4\mathfrak{A}}$ mit $\mathfrak{A}$ gleichartig sein, weil man z. B. das erste Trinom auf die Form

$$\Sigma_2 = \left[\mathfrak{A}\left(\frac{\nabla y}{\nabla p} + \frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}}\right)^2 + \left(\mathfrak{C} - \frac{\mathfrak{B}^2}{4\mathfrak{A}}\right)\right]\nabla p^2$$

bringen kann und weil sich hier nach Belieben das Verhältnis $\frac{\nabla y}{\nabla p}$ in Gedanken entweder so einrichten läßt, daß $\mathfrak{A}\left(\frac{\nabla y}{\nabla p} + \frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}}\right)^2$ verschwindet, also ∇U_0 mit $\left(\mathfrak{C} - \frac{\mathfrak{B}^2}{4\mathfrak{A}}\right)$ einerlei Vorzeichen hat, — oder gerade im Gegentheil so, daß $\mathfrak{A}\left(\frac{\nabla y}{\nabla p} + \frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}}\right)^2$ die von $\frac{\nabla y}{\nabla p}$ unabhängige Größe $\left(\mathfrak{C} - \frac{\mathfrak{B}^2}{4\mathfrak{A}}\right)$ bei weitem übertrifft, in welchem Falle das Vorzeichen von ∇U_0 mit dem Vorzeichen von $\mathfrak{A}$ übereinstimmt.

Da man die Entwickelung von Σ_2 auch nach dem (sogenannten erweiterten) Taylor'schen Lehrsatze vornehmen kann, so sieht man, daß $\mathfrak{A}$

diejenige Function von x ist, in welche $\left(\frac{d^2U}{dy^2}\right)\frac{1}{1.2} = \frac{1}{2}\partial^2_{yy}U$ übergeht, sobald man die darin vorkommenden Buchstaben $y, p, q \ldots$ durch die gefundenen Functionen $f(x), f'(x), f''(x) \ldots$ ersetzt, und daß in gleicher Weise $\mathfrak{B}$ aus $\partial^2_{yp}U$, $\mathfrak{C}$ aus $\frac{1}{2}\partial^2_{pp}U$ u. s. f. entspringen. Uebrigens ist die Forderung, daß $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{A}$ einerlei Vorzeichen besitzen soll, in der anderen Bedingung, daß $\mathfrak{C} - \frac{\mathfrak{B}^2}{4\mathfrak{A}}$ mit $\mathfrak{A}$ gleichartig sein müße, schon einbegriffen; und es reicht also hin, diese letztere im Auge zu behalten, welche sich auch dadurch ausdrücken läßt, daß man sagt, es müße das Produkt $\mathfrak{A}\left(\mathfrak{C} - \frac{\mathfrak{B}^2}{4\mathfrak{A}}\right) = \mathfrak{A}\mathfrak{C} - \frac{1}{4}\mathfrak{B}\mathfrak{B}$ positiv, also $4\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ positiv und größer als $\mathfrak{B}^2$ sein.

Zu dem nämlichen Resultate gelangt man ohne Mühe, wenn man mit Hülfe unbestimmter Coefficienten $\mathfrak{Z}_2$ in eine Summe von Gliedern umzugestalten sucht, deren jedes ein, mit einem Coefficienten versehenes Quadrat sein soll, wie an dem Trinome

$$\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{A}\nabla p^2 + \mathfrak{B}\nabla p\nabla q + \mathfrak{C}\nabla q^2 \tag{3}$$

gezeigt werden möge. Setzen wir hier

$$\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{A}(\nabla p + \alpha\nabla q)^2 + \mathfrak{A}'\nabla q^2 \tag{4}$$

wobei $\mathfrak{A}'$ und α näher zu bestimmen sind, so leuchtet sofort ein, daß für jedes zwischen ∇p und ∇q anzunehmende Verhältnis ∇U $\left.\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ aus- fallen, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ beide $\left.\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ sind. Die Vergleichung von (3) und (4) giebt aber

$$\mathfrak{B} = 2\mathfrak{A}\alpha \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{A}\alpha^2 + \mathfrak{A}'$$

also (5) $\alpha = \frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{A}' = \mathfrak{C} - \frac{\mathfrak{B}^2}{4\mathfrak{A}}$

wie vorher.

Und in gleicher Weise, wie hier mit dem Trinom (3) geschehen ist, wird es auch gelingen den allgemeinen Ausdruck (2) umzugestalten. Wir können nämlich setzen

$$\begin{aligned}\mathfrak{Z}_2 = \mathfrak{A}(\nabla y + \alpha\nabla p + \beta\nabla q + \gamma\nabla r + \cdots)^2 \\ + \mathfrak{A}'(\nabla p + \beta'\nabla q + \gamma'\nabla r + \cdots)^2 \\ + \mathfrak{A}''(\nabla q + \gamma''\nabla r + \cdots)^2 \\ + \mathfrak{A}'''(\nabla r + \cdots)^2\end{aligned} \tag{6}$$

u. ſ. f. und ſobald ſich hierin für

$$\begin{array}{cccc} \alpha & \beta & \gamma' & \cdot\ \cdot \\ \mathfrak{A}' & \beta' & \gamma' & \cdot\ \cdot \\ & \mathfrak{A}'' & \gamma'' & \cdot\ \cdot \\ & & \mathfrak{A}''' & \cdot\ \cdot \end{array}$$

endliche und reelle Werthe ergeben, ſo wird offenbar ∇U_0, deſſen Vorzeichen ſich für hinlänglich kleine Werthe der Variationen ∇y, $\nabla p \ldots$ nach Σ_2 richtet, $\left.\begin{matrix}\text{poſitiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ alſo U_0 ein $\left.\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right\}$ ſein, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}''' \ldots$ ſämmtlich $\left.\begin{matrix}\text{poſitive}\\ \text{negative}\end{matrix}\right\}$ Größen ſind. Wenn dagegen dieſe Bedingungen nicht erfüllt ſind, ſo wird man ſich von der Exiſtenz eines $\left.\begin{matrix}\text{Minimums}\\ \text{Maximums}\end{matrix}\right\}$ noch nicht überzeugt halten. Aus der Vergleichung von (6) und (2) entſpringen nun die Formeln

$$\alpha = \frac{\mathfrak{B}}{2\mathfrak{A}} \qquad \beta = \frac{\mathfrak{D}}{2\mathfrak{A}} \qquad \gamma = \frac{\mathfrak{G}}{2\mathfrak{A}}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}' &= \mathfrak{C} - \mathfrak{A}\alpha^2 \\ &= \mathfrak{C} - \frac{\mathfrak{B}^2}{4\mathfrak{A}}\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned}\beta' &= \frac{1}{2\mathfrak{A}}(\mathfrak{E} - 2\mathfrak{A}\alpha\beta) \\ &= \frac{1}{2\mathfrak{A}}\left(\mathfrak{E} - \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{D}}{2\mathfrak{A}}\right)\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned}\gamma' &= \frac{1}{2\mathfrak{A}}(\mathfrak{H} - 2\mathfrak{A}\alpha\gamma) \\ &= \frac{1}{2\mathfrak{A}}\left(\mathfrak{H} - \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{G}}{2\mathfrak{A}}\right)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A}'' &= \mathfrak{F} - \mathfrak{A}\beta^2 - \mathfrak{A}'\beta'^2 \\ &= \mathfrak{F} - \frac{\mathfrak{D}^2}{4\mathfrak{A}} - \frac{1}{4\mathfrak{A}'}\left(\mathfrak{E} - \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{D}}{2\mathfrak{A}}\right)^2\end{aligned}\right\} \quad \gamma'' = \frac{1}{2\mathfrak{A}''}(\mathfrak{J} - 2\mathfrak{A}\beta\gamma - 2\mathfrak{A}'\beta'\gamma')$$

$$\mathfrak{A}''' = \mathfrak{K} - \mathfrak{A}\gamma^2 - \mathfrak{A}'\gamma'^2 - \mathfrak{A}''\gamma''^2$$

u. ſ. f.

Die Anwendbarkeit dieſes Verfahrens bedingt alſo, wie man hieraus erſieht, nur daß keiner der Coefficienten $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}''', \ldots$ ſich auf Null reducirt.

§. 15.

Wir werden nun die Anwendung der in den beiden letzten Paragraphen entwickelten allgemeinen Regeln an zwei Beiſpielen zeigen.

Erſte Aufgabe: Es ſeien zwei Punkte A und B und zwei durch dieſe feſten Punkte laufende Parallellinien gegeben, man ſoll durch A und B eine ſolche Curve conſtruiren, daß wenn man auf ihr einen beliebigen Punkt M annimmt, und von dem zu M gehörigen Krümmungsmittel-

punkt O die Perpendikel OR und OS auf die beiden gegebenen Parallellinien fällt, das Produkt dieser Perpendikel OR×OS ein Maximum (oder Minimum) werde, nämlich einen größern (oder kleinern) Werth erhalte, als wenn man für die jedesmal gewählte Abscisse den Punkt M auf einer anderen, der gesuchten Curve nächstanliegenden Nachbarcurve annehmen wollte.

Auflösung. Wir wollen (Fig. 5) den einen der beiden gegebenen Punkte, A, zum Anfangspunkt der Coordinaten machen, und es seien die Coordinaten des andern Punkts

$$\mathrm{AK}=\alpha \qquad \mathrm{KB}=\beta$$

wobei wir die eine der beiden gegebenen Parallellinien zur Abscissenaxe wählen. Es sei ferner

$$\mathrm{AP}=x \qquad \mathrm{PM}=y$$

so sind bekanntlich die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts O folgende

$$\mathrm{AR}=x-\left\{\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}\right\}\frac{dy}{dx} \qquad \mathrm{RO}=y+\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$$

Hieraus folgt

$$\mathrm{OS}=\beta-y-\frac{dx^2+dy^2}{d^2y}$$

also haben wir, wenn wir das zu einem Maximum (oder Minimum) zu machende Produkt OR×OS durch U vorstellen und wieder $dy=pdx$, $d^2y=qdx^2$ setzen,

$$(1)\quad \mathrm{U}=\left(y+\frac{1+p^2}{q}\right)\left(\beta-y-\frac{1+p^2}{q}\right)$$

Die Variation hiervon ist

$$\begin{aligned}\delta\mathrm{U}&=\left(y+\frac{1+p^2}{q}\right)\left(-\delta y-\frac{2p\delta p}{q}+(1+p^2)\frac{\delta q}{q^2}\right)\\&\quad+\left(\beta-y-\frac{1+p^2}{q}\right)\left(\delta y+\frac{2p\delta p}{q}-(1+p^2)\frac{\delta q}{q^2}\right)\\&=2\left(\tfrac{1}{2}\beta-y-\frac{1+p^2}{q}\right)\left(\delta y+\frac{2p}{q}\delta p-\frac{1+p^2}{q^2}\delta q\right).\end{aligned}$$

also ist

$$(2)\quad \delta^{\prime}\mathrm{U}=2\left(\tfrac{1}{2}\beta-y-\frac{1+p^2}{q}\right)\left(\delta^{\prime}y+\frac{2p}{q}\delta^{\prime}p-\frac{1+p^2}{q^2}\delta^{\prime}q\right)$$

Dieses Produkt kann sich aber, da in dem letzten Factor die willkührlichen Functionen $\delta^{\prime}y=\Omega(x)$, $\delta^{\prime}p=\frac{d\delta^{\prime}y}{dx}$, $\delta^{\prime}q=\frac{d^2\delta^{\prime}y}{dx^2}$ vorkommen, nur

dann bei jeder beliebigen Beschaffenheit von d^2y auf Null reduciren, wenn

$$\tfrac{1}{2}\beta - y - \frac{1+p^2}{q} = 0$$

d. h. (3) $$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = (\tfrac{1}{2}\beta - y)\frac{d^2y}{dx^2}$$

ist. Um diese Gleichung zu integriren, geben wir ihr die Form

$$\frac{\frac{dp}{dx}}{1+p^2} = \frac{1}{\frac{1}{2}\beta - y}$$

und multipliciren mit $pdx = dy$, wodurch wir erhalten

$$\frac{pdp}{1+p^2} = \frac{dy}{\frac{1}{2}\beta - y}$$

Das Integral hiervon ist

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{l}(1+p^2) = \mathrm{l}\left(\frac{\mathrm{C}}{\frac{1}{2}\beta - y}\right)$$

wenn C eine willkührliche Constante anzeigt. Also hat man auch

$$\sqrt{1+p^2} = \frac{\mathrm{C}}{\frac{1}{2}\beta - y}$$

Dies ist eine Differenzialgleichung erster Ordnung, welche sich, nach p aufgelöst, in

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{\mathrm{C}^2 - (\frac{1}{2}\beta - y)^2}}{\frac{1}{2}\beta - y}$$

oder, wenn man im Sinne behält, daß die Wurzelgröße sowohl mit dem einen als mit dem andern Vorzeichen genommen werden könne, in

$$dx = \frac{(\frac{1}{2}\beta - y)dy}{\sqrt{\mathrm{C}^2 - (\frac{1}{2}\beta - y)^2}}$$

verwandelt. Das Integral hiervon ist

$$x - \mathrm{B} = \sqrt{\mathrm{C}^2 - (\tfrac{1}{2}\beta - y)^2}$$

worin B eine zweite Integrationsconstante bezeichnet; und diese Gleichung, welcher man auch die Gestalt

(4) $$(y - \tfrac{1}{2}\beta)^2 + (x - \mathrm{B})^2 = \mathrm{C}^2$$

geben kann, sagt aus, daß die gesuchte Curve ein Kreis ist, mit dem Radius C und einem durch die Coordinaten B, $\frac{1}{2}\beta$ bestimmten Mittelpunkt. Dieser Mittelpunkt muß also auf einer durch die Mitte von $\mathrm{KB} = \beta$ mit der Abscissenaxe parallel zu ziehenden Geraden liegen; die zwei Constanten B und C aber werden sich aus der Forderung, daß die Curve

durch die zwei gegebenen Punkte A $\begin{vmatrix} x=0 \\ y=0 \end{vmatrix}$ und B $\begin{vmatrix} x=\alpha \\ y=\beta \end{vmatrix}$ laufen soll, bestimmen laßen. Denn vermöge dieser zwei Bedingungen zieht man aus (4) die Gleichungen

$$\tfrac{1}{4}\beta^2 + B^2 = C^2$$
$$\tfrac{1}{4}\beta^2 + (\alpha - B)^2 = C^2$$

Die zweite von der ersten subtrahirt, giebt

$$2\alpha B - \alpha^2 = 0$$

also $$B = \tfrac{1}{2}\alpha = \tfrac{1}{2}\overline{AK}$$

und nach Substitution dieses Werths für B in die erste Gleichung erhält man

$$C = \tfrac{1}{2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \tfrac{1}{2}\overline{AB}$$

Demnach ist die gesuchte Curve derjenige Kreis, welcher vom Halbirungspunkt der Geraden AB als Centrum durch die gegebenen Punkte A und B zu beschreiben ist und durch die Gleichung

$$(5) \qquad (y - \tfrac{1}{2}\beta)^2 + (x - \tfrac{1}{2}\alpha)^2 = \tfrac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2)$$

vollkommen bestimmt wird.

Mag man auf der Peripherie dieses Kreises einen Punkt M annehmen, wo man will, immer befindet sich der zugehörige Krümmungsmittelpunkt in dem unveränderlichen Centrum O (Fig. 6), also ist jedesmal das Produkt $OR \times OS = U_0 = \tfrac{1}{4}\beta^2$. Bei einer geänderten Curve dagegen würden voraussichtlich die beiden Factoren OR und OS nicht einander gleich, also ihr Produkt, falls O zwischen den Parallellinien AX und BW liegt, positiv aber *kleiner* als $\tfrac{1}{4}\beta^2$ sein; wenn dagegen O unterhalb AX fiele, so würde OR negativ und $OS = \beta - \overline{OR}$ positiv, und wenn O oberhalb BW läge, würde umgekehrt $OR > \beta$ positiv, aber OS negativ, das Produkt dieser beiden Factoren also in beiden Fällen *negativ* sein. Daher ist $U_0 = \tfrac{1}{4}\beta^2$ ein *Maximum* im algebraischen Sinn.

Uebrigens gelangt man zu eben diesem Ergebnis auch durch die Betrachtung des zweiten Variationsquotienten $\delta^2 U$. Denn aus (3) würde allgemein, gleichviel was für Functionen von x durch y, p, q vorgestellt werden, nach §. 9 folgen

$$\delta^2 U = 2\left(-\delta^2 y - \frac{2p}{q}\delta^2 p + \frac{1+p^2}{q^2}\delta^2 q\right)\left[\delta^2 y + \frac{2p}{q}\delta^2 p - \frac{1+p^2}{q^2}\delta^2 q\right]$$
$$+ 2\left(\tfrac{1}{2}\beta - y - \frac{1+p^2}{q}\right)\left[\delta^2 y + \delta^2\left(\frac{2p}{q}\delta^2 p\right) - \delta^2\left(\frac{1+p^2}{q^2}\delta^2 q\right)\right]$$

Nun soll aber gegenwärtig y diejenige Function von x sein, für welche

$$\tfrac{1}{2}\beta - y - \frac{1+p^2}{q} = 0$$

ist, denn dieses war unsere ursprüngliche Differenzialgleichung (3). Daher fällt in dem für $\delta^2 U$ gefundenen Ausdruck der zweite Summand weg, und man erhält

$$(6) \qquad \delta^2 U = -2\left(\delta y + \frac{2p}{q}\delta p - \frac{1+p^2}{q^2}\delta q\right)^2$$

Dieser Ausdruck, worin man freilich an die Stelle von p und q streng-genommen die aus der Gl. (5) abzuleitenden Functionen von x zu setzen hätte, läßt aber ohne alle weitere Behandlung erkennen, daß $\delta^2 U$ für jede beliebige (reelle) Beschaffenheit von $\delta y, \delta p, \delta q$ einen negativen Werth besitzt.

Man könnte endlich auch das im vor. §. unter III) besprochene Verfahren zur Entscheidung der Frage, ob ein Maximum oder Minimum gefunden sei, ziemlich bequem auf den vorliegenden Fall anwenden. Zu diesem Zwecke bemerke man, daß der bei (1) aufgestellte Ausdruck für U sich auch in folgender Gestalt schreiben läßt:

$$U = -\left(\tfrac{1}{2}\beta - y - \frac{1+p^2}{q} - \tfrac{1}{2}\beta\right)\left(\tfrac{1}{2}\beta - y - \frac{1+p^2}{q} + \tfrac{1}{2}\beta\right)$$
$$= \tfrac{1}{4}\beta^2 - \left(\tfrac{1}{2}\beta - y - \frac{1+p^2}{q}\right)^2$$

Hierin soll y, p, q variiren, wodurch

$$(7) \quad U + \nabla U = \tfrac{1}{4}\beta^2 - \left[\tfrac{1}{2}\beta - (y+\nabla y) - \frac{1+p^2+2p\nabla p+\nabla p^2}{q+\nabla q}\right]^2$$

entsteht. Da man nun, sobald ∇U nach den aufsteigenden Potenzen von $\nabla y, \nabla p, \nabla q$ entwickelt ist, diejenigen Glieder, welche in Beziehung auf diese Incremente von einer höheren als der zweiten Ordnung sind, nicht mehr brauchen wird, so reicht es hin, von dem in Parentheſe eingeschloßenen Trinom nur diejenigen Glieder zu entwickeln, welche zur ersten Dimension in Bezug auf $\nabla y, \nabla p, \nabla q$ gehören, weil noch eine Erhebung in's Quadrat nachfolgen soll. Es ist aber

$$\frac{1}{q+\nabla q} = \frac{1}{q}\cdot\frac{1}{1+\frac{\nabla q}{q}} = \frac{1}{q} - \frac{\nabla q}{q^2} + \cdots$$

folglich

$$\frac{1+p^2+2p\nabla p}{q+\nabla q} = \frac{1+p^2}{q} + \frac{2p}{q}\nabla p + \cdots$$
$$- \frac{1+p^2}{q^2}\nabla q + \cdots$$

Setzt man diesen Werth in (7) und führt zugleich, um zu $U_0 + \nu U_0$ überzugehen, für $\frac{1}{2}\beta - y$ vermöge (2) den Werth $\frac{1+p^2}{q}$ ein, so erhält man

$$U_0 + \nu U_0 = \tfrac{1}{4}\beta^2 - \left[-\nu y - \frac{2p}{q}\nu p + \frac{1+p^2}{q^2}\nu q\right]^2 + \ldots$$

d. h es ist $U_0 = \frac{1}{4}\beta^2$, und die im vorigen §. durch Σ_2 bezeichnete Größe ist

$$-\left(\nu y + \frac{2p}{q}\nu p - \frac{1+p^2}{q^2}\nu q\right)^2$$

also negativ; folglich wird für hinlänglich kleine Werthe der Variationen νy, νp, νq auch νU_0 negativ sein.

Zweite Aufgabe. Man soll eine Curve von der Eigenschaft bestimmen, daß wenn man auf derselben einen Punkt M beliebig annimmt, den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt O bestimmt und denselben mit zwei gegebenen festen Punkten A und B geradlinig verbindet, die Summe der Quadrate dieser Verbindungslinien $\overline{AO}^2 + \overline{BO}^2$ größer oder kleiner sei als für einen der nämlichen Abscisse zugehörigen aber auf einer andern Curve liegenden Punkt.

Auflösung. Indem wir die Abscissenaxe durch die gegebenen Punkte A und B legen und den einen Punkt, A, zum Ursprung der Coordinaten annehmen, ist der andere Punkt B durch seine Abscisse $x = AB = \beta$ bestimmt. Mit Hülfe der schon in der vorigen Aufgabe benutzten Formeln für die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts O erhält man nun

$$\overline{AO}^2 = \left(x - \frac{p}{q}[1+p^2]\right)^2 + \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)^2$$

$$\overline{BO}^2 = \left(x - \frac{p}{q}[1+p^2] - \beta\right)^2 + \left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)^2$$

also

$$U = 2\left(x - \frac{p}{q}[1+p^2]\right)^2 + 2\left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)^2 - 2\beta\left(x - \frac{p}{q}[1+p^2]\right) + \beta^2$$

Wenn wir hier zur Abkürzung

$$(1) \qquad \frac{1+p^2}{q} = w$$

setzen, so wird

(2) $U = 2(x - pw)^2 + 2(y + w)^2 - 2\beta(x - pw) + \beta^2$

Hieraus fließt

$$\delta U = [-4(x - pw) + 2\beta](p\delta w + w\delta p) + 4(y + w)(\delta y + \delta w)$$

oder, wenn man für δw den Werth $\frac{2p}{q}\delta p - (1 + p^2)\frac{\delta q}{q^2} = \frac{2p}{q}\delta p - \frac{w\delta q}{q}$ substituirt,

$$\delta U = (2\beta - 4x + 4pw)\left(\frac{2p^2}{q}\delta p - \frac{pw}{q}\delta q + w\delta p\right) + 4(y + w)\left(\delta y + \frac{2p}{q}\delta p - \frac{w}{q}\delta q\right)$$

also, wenn man nach den Variationen δy, δp, δq ordnet und in Gedanken durch dt dividirt,

$$\delta' U = 4(y + w)\delta' y + \left[(2\beta - 4x + 4pw)\left(\frac{2p^2}{q} + w\right) + 8(y + w)\frac{p}{q}\right]\delta' p - \left[(2\beta - 4x + 4pw)\frac{pw}{q} + 4(y + w)\frac{w}{q}\right]\delta' q$$

Hier müßen nun, wie im vorigen §. gezeigt worden, die Coefficienten der 3 Variationsquotienten $\delta' y$, $\delta' p$, $\delta' q$ sich einzeln auf Null reduciren, d. h. es muß sein

$$y + w = 0$$
$$(\beta - 2x + 2pw)(2p^2 + qw) + 4(y + w)p = 0$$
$$(\beta - 2x + 2pw)pw + 2(y + w)w = 0$$

Wegen der ersten dieser drei Bedingungen reduciren sich die beiden letzten auf

$$(\beta - 2x - 2py)(2p^2 + qw) = 0$$
$$(\beta - 2x - 2py)py = 0$$

und wenn man nun noch in die erste und zweite für w den Werth $\frac{1 + p^2}{q}$ aus (1) substituirt, so hat man die drei Bedingungsgleichungen

(3) $$yq + 1 + p^2 = 0$$
(4) $$(\beta - 2x - 2py)(3p^2 + 1) = 0$$
(5) $$(\beta - 2x - 2py)py = 0$$

Wir dürfen hier, so wie auch in ähnlichen Fällen bei anderen Aufgaben, die erste Gleichung $y + w = 0$, obwohl sie bereits benutzt worden war um den in w enthaltenen Differenzialquotienten q aus den beiden anderen zu eliminiren, doch nicht bei Seite werfen, sondern sie muß fortwährend noch mitzählen, weil sobald man $y = f(x)$ gefunden hat, daraus für p und q durch Differenziation ganz bestimmte Ausdrücke $f'(x)$ und $f''(x)$

hervorgehen werden, von denen sich dann noch fragt, ob sie der Bedingung $yq + 1 + p^2 = 0$ Genüge leisten. Dieses wird ganz klar durch die Ueberlegung, daß eigentlich jede der drei Gleichungen, als Differenzialgleichung für y, sich müßte benutzen laßen um zu einer Gleichung $y = f(x)$ zu gelangen. — Die Elimination des höchsten Differenzialquotienten ist in solchen Fällen rathsam nicht blos deshalb, um eine Differenzialgleichung niedrigerer Ordnung vor sich zu haben, sondern auch weil in $f(x)$ desto mehr anfangs unbestimmte Integrationsconstanten eintreten, je höher die Ordnungszahl der Differenzialgleichung ist, so daß abgesehen von den etwa vermehrten Schwierigkeiten der Integration, auch noch die Ausmittelung der passenden Werthe für diese Constanten zu schaffen macht. So würde im gegenwärtigen Falle allerdings die Gleichung (3), nachdem man sie mit dx multiplicirt und wegen $pdx = dy$, $qdx = dp$ in der Gestalt

$$ydp + pdy = -dx$$

geschrieben hätte, durch Integration sofort zu

$$yp = \text{Const.} - x$$

führen; und dieses stimmt in der Form genau mit unserer sogleich folgenden Gleichung (6) überein, zur vollkommenen Identität gehört aber, daß man für Const. den Werth $\frac{1}{2}\beta$ aufgefunden habe. —

Aus (5) folgt nun

entweder . . . . . $y = 0$

— durch diese Gleichung würde die Abscissenaxe angezeigt, und es wäre dann auch $p = 0$, $q = 0$, aber diese Werthe leisten den Gleichungen (3) und (4) nicht Genüge, und sind daher unbrauchbar; —

oder. . . . . $p = 0$

dann ist $y = \text{Const.}$, $q = 0$, wodurch ebenfalls weder (3) noch (4) erfüllt wird; —

oder endlich (6) $\beta - 2x - 2py = 0$

Hierdurch ist unmittelbar auch Gl. (4) erfüllt; und die Differenziation führt zu

$$-2(1 + pp + yq) = 0$$

was mit (3) identisch ist. Diese Gleichung (6) liefert also die richtige und einzige Auflösung. Sie läßt sich zuvörderst umschreiben in

$$ydy = -(x - \tfrac{1}{2}\beta)\,dx$$

und giebt durch Integration

(7) $$y^2 + (x - \tfrac{1}{2}\beta)^2 = A^2$$

wenn man die willkührliche Constante durch A^2 vorstellt. Diese Gleichung bezeichnet einen Kreis, dessen Mittelpunkt durch die Coordinaten $x = \frac{1}{2}\beta$, $y = 0$ bestimmt ist, also in der Mitte zwischen den gegebenen Punkten A und B liegt, dessen Halbmeßer übrigens beliebig angenommen werden kann.

Es ist offenbar, daß was man auch immer für einen Punkt M auf der Peripherie eines solchen Kreises wählen mag, der zugehörige Krümmungsmittelpunkt O sich unveränderlich im Halbirungspunkte von AB befindet, und daß also die Quadratsumme $AO^2 + \overline{BO^2} = \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{1}{4}\beta^2$ d. h.

$$U_0 = \tfrac{1}{2}\beta^2$$

sein wird. Denkt man sich nun, zu einer variirenden Curve fortschreitend, der Punkt O rücke aus dieser Stelle fort, aber zunächst noch in der Geraden AB, so daß etwa

$$AO = \tfrac{1}{2}\beta - m \qquad BO = \tfrac{1}{2}\beta + m$$

wäre, so würde

$$U = \tfrac{1}{2}\beta^2 + 2m^2$$

also $> U_0$ werden. Fiele aber O gar außerhalb AB, so würde $\overline{AO^2} + \overline{BO^2}$ wieder größer als $(\frac{1}{2}\beta - m)^2 + (\frac{1}{2}\beta + m)^2$, also umsomehr $U > U_0$ sein. Hieraus sieht man, daß die Gleichung (6) zu einem absoluten Minimum von U geführt hat; und wir können uns darum der Mühe überheben, den zweiten Variationsquotienten darzustellen und in demselben aus (7) die Werthe

$$y = \pm\sqrt{A^2 - (x - \tfrac{1}{2}\beta)^2}$$

$$p = -\frac{x - \frac{1}{2}\beta}{y}$$

$$q = -\frac{1}{y} + \frac{x - \frac{1}{2}\beta}{yy}p = -\frac{1 + p^2}{y}$$

zu substituiren.

§. 16.

Wir haben bereits in §. 13. II) darauf hingewiesen, daß bei Behandlung der Gleichung $\delta U = 0$ manchmal, obwohl in dem gegebenen Ausdrucke U die Functionen

$$y,\quad p,\quad q,\quad \ldots\ldots\quad y^{(l)},\quad y^{(l+1)},\quad \ldots\ldots\quad y^{(m)}$$

nämlich

$$y,\quad \frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \ldots\ldots\quad \frac{d^ly}{dx^l},\quad \frac{d^{l+1}y}{dx^{l+1}},\quad \ldots\ldots\quad \frac{d^my}{dx^m}$$

enthalten seien, dennoch der in Beziehung auf die eine oder andere dieser

Variablen genommene Differenzialquotient z. B. $\frac{dU}{dy^{(t)}}$ nicht gleich Null gesetzt werden dürfe, insofern die Natur der Aufgabe verlangen könne, daß die betreffende Variation $\delta.y^{(t)} = \frac{d^t \delta y}{dx^t}$ gleich Null sein solle. Diese Andeutung bedarf wohl um so mehr einer weiteren Erläuterung, als ein solches Verschwinden von $\delta y^{(t)}$ logisch auf zwei ganz verschiedene Weisen möglich erscheint, nämlich entweder so, daß die Bedingung $\delta.y^{(t)} = 0$ zugleich die nachfolgenden $\delta.y^{(t+1)} = 0$, $\delta.y^{(t+2)} = 0$ u. s. w. bis zu $\delta.y^{(m)} = 0$ nach sich ziehe, oder ohne diese Folge.

I) Wenn z. B. bei einer geometrischen Untersuchung die sich an die gesuchte Curve anschließenden Nachbarcurven nicht ganz willkührlich, sondern in der Art übereinander her laufen sollen, daß fortwährend für alle Werthe der Abscisse x die Tangente der variirenden Curve parallel zur Tangente der eigentlich gesuchten Curve $y = f(x)$ liege, so würde man offenbar $p = \frac{dy}{dx}$ als eine Function $f'(x)$ zu denken haben, welche sich bei dem Uebergange von der gesuchten zu einer nächst anliegenden gar nicht ändern sollte, es wäre also fortwährend für alle Werthe von x $\delta p = \frac{d\delta y}{dx} = 0$, was freilich so viel ist, als δy gar nicht mehr für eine Function von x anzusehen. Hieraus würde zunächst $\delta q = \frac{d\delta p}{dx} = 0$ folgen, was die geometrische Consequenz enthielte, daß auch für jede beliebige Abscisse die Krümmungshalbmeßer der gesuchten und der nächstanliegenden Curve gleiche Größe besäßen, — ferner $\delta r = \frac{d\delta q}{dx} = 0$ u. s. f. Auch würde, wenn $p = f'(x)$ als nicht variirende, folglich als eine bestimmte wiewohl noch unbekannte Function von x gedacht wird, die durch Integration hieraus zu erhaltende Gleichung $y = \int f'(x)\,dx + \text{Const.} = f(x) + \text{Const.}$ lehren, daß jede nächstanliegende Nachbarcurve der gesuchten Curve an Gestalt völlig gleich sei und nur in Beziehung auf die Abscissenaxe eine etwas höhere oder tiefere Lage einnehme. Doch dürften Aufgaben dieser Art sich nicht leicht darbieten.

II) Um uns dagegen auf den andern, im vorhergehenden angedeuteten und ergiebigeren Standpunkt zu versetzen, nehmen wir zuvörderst an, es solle der gegebene Ausdruck U ein Minimum werden, man ver-

lange aber nicht, daß die gesuchte Curve verglichen werde mit allen überhaupt möglichen nächstanliegenden Curven, sondern die Aufgabe sei etwa mit folgenden Worten gefaßt:

wenn man auf der gesuchten Curve einen Punkt M beliebig annimmt, und durch diesen hindurch eine der gesuchten nächstanliegende Curve zieht, so soll U in Beziehung auf diese letztere einen größern Werth erhalten als in Beziehung auf die gesuchte Curve.

Da man bei allen Untersuchungen dieser Art immer damit anzufangen hat, in Gedanken der Abscisse x irgend einen beliebig zu wählenden aber dann festzuhaltenden Werth beizulegen (§. 8) und hierauf erst sowohl an dem zugehörigen, auf der gesuchten Curve befindlichen Punkte M als auch an dem zugehörigen, in der variirenden Curve gelegenen Punkte M' die durch den Ausdruck U vorgeschriebenen Constructionen auszuführen; so würde man im vorliegenden Falle, weil für die angenommene Abscisse x die Ordinate der variirenden Curve dieselbe Größe wie die Ordinate der gesuchten Curve besitzen soll, $\delta y = \Omega(x)$ nur als eine solche Function zu denken haben, welche für den eben angenommenen Werth von x sich auf Null reducirte. Zugleich müßten in der Formel (§. 9)

$$\Delta y = \delta y.\tau + \delta^2 y \frac{\tau^2}{1.2} + \delta^3 y \frac{\tau^3}{1.2.3} + \cdots$$

wegen $\Delta y = 0$ sogar alle höheren Variationsquotienten $\delta^2 y$, $\delta^3 y$, .. verschwinden. Dagegen würde man der variirenden Curve in demselben Punkte M eine etwas andere Richtung zuzuschreiben haben, als der gesuchten Curve, es würde also der Winkel, unter welchem die Tangente gegen die Abscissenaxe geneigt ist, eine variirende Größe sein, und deshalb würde $\delta p = \frac{d\Omega(x)}{dx}$ für den angenommenen Werth von x keineswegs gleich Null zu denken sein. Ebenso wenig würde hier $\frac{d^2\delta y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3\delta y}{dx^3} = 0$ u. s. f. eine Consequenz von $\delta y = 0$ sein, doch könnte die Aufgabe allerdings noch ausdrücklich die eine oder andere dieser Bedingungen in sich einschließen.

III) Nehmen wir ferner an, um einen andern Fall zu betrachten, es werde wieder, während für den gegebenen Ausdruck U ein Minimum zu suchen ist, nicht verlangt, daß die gesuchte Curve mit allen überhaupt möglichen nächstanliegenden Curven verglichen werde, sondern die Aufgabe laute etwa wie folgt:

wenn man eine Abſciſſe x beliebig angenommen hat, zu welcher auf der geſuchten Curve der Punkt M gehören möge, und wenn man eine ſolche nächſtanliegende Curve zieht, welche in dem zur ſelbigen Abſciſſe gehörigen Punkt M′ dieſelbe Richtung (aber nicht nothwendig dieſelbe Krümmung) wie die geſuchte Curve beſitzt, ſo daß alſo die Tangente in M′ parallel zur Tangente in M liegt, ſo ſoll U, für den Punkt M und aus der geſuchten Gleichung $y = f(x)$ berechnet, kleiner ausfallen als für den Punkt M′ und in Beziehung auf die variirende Curve.

Hier würde $\delta' y$ und φy keineswegs gleich Null wie vorher bei II), dagegen würde $\delta' p = \frac{d\delta' y}{dx}$ als eine ſolche Function $\Omega'(x)$ zu denken ſein, welche für den angenommenen Werth von x ſich auf Null reducirte. Freilich würde man alſo, je nachdem man die anfänglich auszuwählende Abſciſſe größer oder kleiner angenommen hätte, auch einer der in $\Omega'(x)$ verwebten Conſtanten einen größern oder kleinern Werth in Gedanken beizulegen haben. Allein man faßt hier $\delta' p$ immer noch als eine Function von x auf, und aus $\delta' p = 0$ folgt alſo nicht etwa $\delta' q = \frac{d\delta' p}{dx} = 0$, $\delta' r = \frac{d^2\delta' p}{dx^2} = 0$ u. ſ. f. wie in I).

IV) Man wird nunmehr ſehr leicht auch eine ſolche Aufgabe ſich denken können, daß gleichzeitig $\delta' y = 0$ und $\delta' p = 0$ aber $\delta' q$, $\delta' r$,.. von Null verſchieden, oder daß gleichzeitig $\delta' y = 0$, $\delta' q = 0$ aber $\delta' p$ von Null verſchieden ſei. Und überhaupt wird durch dieſe Betrachtungen deutlich geworden ſein, wie die Aufgabe, einen gegebenen Ausdruck

$$U = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right)$$

zu einem Minimum oder Maximum zu machen, zugleich die Forderung in ſich aufnehmen könne, daß von den Variationen

$$\delta y, \ \delta\frac{dy}{dx}, \ \delta\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots.$$

irgend welche gleich Null zu ſetzen ſeien. Es läßt ſich alsdann eben wegen dieſer näheren Bedingungen und aus den in §. 13. II) angegebenen Gründen oft eine Auflöſung finden, welche gar nicht exiſtiren würde, wenn die geſuchte Curve mit allen überhaupt möglichen Nachbarcurven verglichen werden ſollte. Zur Erläuterung wollen wir eine Aufgabe dieſer Art in dem folgenden Paragraphen behandeln.

§. 17.

Aufgabe. Es sind auf die Abscissenaxe in zwei festen Punkten H und K, zu welchen die Abscissen $x=0$ und $x=\xi>0$ gehören mögen, Perpendikel errichtet worden, und man verlangt eine Curve von der Eigenschaft, daß wenn man an einem beliebig in ihr angenommenen Punkte M die Tangente construirt, welche die gedachten Perpendikel in R und S durchschneiden möge, das Produkt der Stücke HR und KS einen kleinern (oder größern) Werth erhalte, als wenn man durch denselben Punkt M irgend eine nächstanliegende Curve ziehen wollte, welcher eine andere Richtung, also auch eine andere Tangente zukäme.

1) Die Gleichung der Tangente ist

$$y'-y=\frac{dy}{dx}(x'-x)=p(x'-x)$$

und hieraus folgt, wenn wir $x'=0$ setzen und den zugehörigen Werth $y'=\mathrm{HR}$ suchen,

$$\mathrm{HR}=y-xp$$

Ebenso erhalten wir

$$\mathrm{KS}=y+(\xi-x)p$$

also (1) $\mathrm{U}=(y-xp)[y+(\xi-x)p]$

Da nun δy für den angenommenen Punkt M verschwinden soll, so haben wir die einzige Bedingungsgleichung

$$\frac{d\mathrm{U}}{dp}=(y-xp)(\xi-x)-(y+\xi p-xp)x=0$$

oder (2) $(\xi-2x)y-2(\xi-x)xp=0$

Hier laßen sich die Variablen absondern, nämlich

$$2\frac{dy}{y}=\frac{\xi-2x}{x(\xi-x)}dx$$

und als Integral erhält man

(3) $y^2=\mathrm{C}x(\xi-x)$

Dieses ist die Gleichung einer Ellipse oder einer Hyperbel, je nachdem die Integrationsconstante C eine positive oder negative Größe vorstellt. In jedem Falle sind aber die beiden gegebenen Punkte H und K die Scheitel dieses Kegelschnitts. Die Constante C bleibt unbestimmt, so ange nicht noch irgend eine weitere Bedingung in die Aufgabe verwebt ist; würde aber z. B. außer H und K noch irgend ein dritter Punkt $x=\alpha$, $y=\beta$ gegeben, durch welchen die gesuchte Curve laufen sollte, so würde offenbar C einen bestimmten Werth erhalten, und zwar einen

positiven, wenn $\xi > \alpha > 0$, dagegen einen negativen, wenn entweder $\alpha > \xi$ oder $\alpha < 0$ gegeben wäre.

II) Obgleich die Ableitung dieser Gleichung (3) in Rücksicht auf Einfachheit nichts zu wünschen übrig läßt, so wird es doch gut sein noch ein anderes Verfahren zu bemerken, das bei ähnlichen Aufgaben die Schwierigkeit, auf welche man bei unmittelbarer Behandlung der zu integrirenden Differenzialgleichung leicht stoßt, zu ebnen behülflich sein kann.

Da nämlich

$$\partial_x U = -[2y + (\xi - 2x)p]p$$
$$\partial_y U = \quad [2y + (\xi - 2x)p]$$

ist, so sieht man, mit Rücksicht auf $dy = pdx$, daß die Summe

$$\partial_x U dx + \partial_y U dy$$

identisch gleich Null ist; und wegen der Bedingungsgleichung (2) nämlich $\partial_p U = 0$ wird man hieraus schließen

$$\partial_x U dx + \partial_y U dy + \partial_p U dp = dU = 0$$

folglich $$U = A$$

wobei A eine noch unbestimmte Constante anzeigt. Es muß also in der gesuchten Curve das Produkt HR×KS für alle Punkte M einerlei Werth besitzen. — Aus (2) folgt nun

$$p = \frac{(\xi - 2x)y}{2(\xi - x)x}$$

also $$(\xi - x)p = \frac{(\xi - 2x)y}{2x} \qquad y + (\xi - x)p = \frac{\xi y}{2x}$$

$$xp = \frac{(\xi - 2x)y}{2(\xi - x)} \qquad y - xp = \frac{\xi y}{2(\xi - x)}$$

und indem man diese Werthe in den Ausdruck (1) einsetzt, hat man als gesuchte Gleichung zwischen x und y

$$\frac{\xi^2 y^2}{4x(\xi - x)} = A$$

welche mit (3) übereinstimmt, sobald man $A = \frac{1}{4}C\xi^2$ annimmt.

III) Um zu entscheiden, ob die gefundene Gleichung (3) ein Maximum oder ein Minimum liefere, wenden wir das in §. 14 unter II. beschriebene Verfahren an, und erhalten

$$U + \nabla U = (y - xp - x\nabla p)[y + (\xi - x)p + (\xi - x)\nabla p]$$
$$= (y - xp)[y + (\xi - x)p]$$
$$+ [\xi y - 2xy - 2(\xi - x)xp]\nabla p - x(\xi - x)\nabla p^2$$

Hierin reducirt sich der Coefficient von ∇p, wie es sein muß, der Gleichung

(2) zu Folge auf Null, der Coefficient von νp^2 aber ist wegen (3) gleich $-\frac{y^2}{C}$, also

$$U_0 + \nu U_0 = U_0 - \frac{y^2}{C}\nu p^2$$

Dieser Werth läßt erkennen, daß U_0 ein $\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}$ wird, je nachdem C $\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right.$ ist d. h. je nachdem man es mit einer $\begin{matrix}\text{Ellipse}\\ \text{Hyperbel}\end{matrix}$ zu thun hat.

Um das gesuchte Maximum resp. Minimum selbst zu finden, setzen wir in

$$\begin{aligned} U &= (y - xp)(y + (\xi - x)p) \\ &= y^2 + [(\xi - 2x)\,y - x(\xi - x)p]\,p \end{aligned}$$

für p den aus (3) fließenden Werth $p = \frac{C(\xi - 2x)}{2y}$ und erhalten

$$U_0 = y^2 + (\xi - 2x)\left[y - \frac{Cx(\xi - x)}{2y}\right]\frac{C(\xi - 2x)}{2y}$$

oder mit Rücksicht auf (3)

$$\begin{aligned} U_0 &= y^2 + \tfrac{1}{4}C(\xi - 2x)^2 \\ &= Cx(\xi - x) + \tfrac{1}{4}C(\xi - 2x)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}C\xi^2 \end{aligned}$$

Bezeichnen wir aber die beiden Halbaxen des Kegelschnitts durch a und b, so ist

$$\tfrac{1}{4}\xi^2 = a^2 \qquad \text{und für} \quad \begin{cases} \text{Ellipse} & C = +\frac{b^2}{a^2} \\ \text{Hyperbel} & C = -\frac{b^2}{a^2} \end{cases}$$

und in beiden Fällen erhält also U_0 den einfachen Werth b^2, nur ist dieser für die Hyperbel mit dem Vorzeichen (—) behaftet. Da aber ein im algebraischen Sinne gefundenes Minimum, welches negativ ist, in Vergleichung mit den benachbarten ebenfalls negativen Werthen, wenn man vom Vorzeichen absieht, doch ein Maximum ist, so kann man beide Resultate zusammenfassend auch sagen, daß sowohl auf der Ellipse wie auf der Hyperbel das Produkt HR×KS für jeden beliebigen Punkt M einen größern Werth erhalte, als wenn man durch diesen Punkt eine andere Curve zöge, deren Tangente von der Richtung RMS abwiche. Daß das fragliche Produkt den constanten Werth b^2 besitzt, ist ein Satz, welchen

man in der Lehre von den Kegelschnitten zu erweisen pflegt, daß dieser Werth aber zugleich ein Maximum sei, ist eine merkwürdige, von Lagrange*) entdeckte Eigenschaft dieser Curven.

IV.) Wenn man aber in dieser Aufgabe die variirende Curve nicht der Beschränkung unterworfen hätte, daß sie durch den auf der gesuchten Curve angenommenen Punkt M laufen solle, wenn man also verlangt hätte, die gesuchte mit allen möglichen, nächstanliegenden Curven zu vergleichen, so würde sich weder ein Maximum noch ein Minimum haben finden laßen. Denn da in diesem Falle zu der festen Abscisse x, für welche man den Werth von U zu berechnen beabsichtigt, auf der variirenden Curve ein Punkt M′ beliebig höher oder tiefer als M gedacht werden dürfte, und da zugleich der diesem Punkte M′ entsprechenden Tangente eine beliebig abweichende Richtung angewiesen werden könnte, so sieht man leicht, daß man das Produkt HR×KS durch gleichzeitige Variationen von y und p einerseits bis $+\infty$ continuirlich wachsen, andererseits bis $-\infty$ continuirlich abnehmen laßen könnte. In der That, die Bedingung

$$\delta U = \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dp}\delta p = 0$$

würde unter diesen Umständen (§. 13) nicht allein die Gleichung (2), sondern auch noch $\frac{dU}{dy} = 0$ nach sich ziehen. Man hätte also zu erfüllen die beiden Gleichungen

$$(\xi - 2x)y - 2(\xi - x)xp = 0$$
$$2y + (\xi - 2x)p = 0$$

Multiplicirt man, um p zu eliminiren, die erste mit $(\xi - 2x)$, die andere mit $2(\xi - x)x$ und addirt, so ergiebt sich

$$4x(\xi - x)y + (\xi - 2x)^2 y = 0$$

oder

$$\xi^2 y = 0$$

*) Théorie des fonctions analytiques, No. 167. Es giebt aber zu diesem Satze noch ein interessantes Seitenstück. Legt man sich nämlich die Aufgabe vor, das Produkt der von den gegebenen Punkten H, K auf die Tangente gefällten Perpendikel zu einem Maximum zu machen, jedoch mit derselben Beschränkung wie in der vorhergehenden Aufgabe, nämlich daß $\delta y = 0$ sei, so wird man ebenfalls zu einer Ellipse oder Hyperbel hingeführt, deren Brennpunkte in H und K liegen. Bekanntlich besitzt aber das Produkt der von den Brennpunkten eines Kegelschnitts auf die Tangente gefällten Perpendikel ebenfalls den constanten Werth gleich dem Quadrat der halben kleinen Axe (resp. halben Nebenaxe).

also müßte man von der Gleichung

$$(4) \qquad y = 0$$

welches die Gleichung für die Abscissenaxe ist und zugleich $p = 0$ liefert, das verlangte Maximum oder Minimum erwarten. Dieses würde vermöge der Gl. (1) ebenfalls gleich Null sein. Allein wenn man in (1) $y + \nabla y$, $p + \nabla p$ an die Stelle von y und p schreibt, und dann $y = 0$, $p = 0$ setzt, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} U_0 + \nabla U_0 &= (\nabla y - x\nabla p)[\nabla y + (\xi - x)\nabla p] \\ &= \nabla y^2 + (\xi - 2x)\nabla y \nabla p - x(\xi - x)\nabla p^2 \end{aligned}$$

und da, wenn man dieses Trinom durch $\mathfrak{A}\nabla y^2 + \mathfrak{B}\nabla y\nabla p + \mathfrak{C}\nabla p^2$ vorstellt, der Coefficient $\mathfrak{A}$ positiv, aber die Differenz $\mathfrak{C} - \frac{\mathfrak{B}^2}{4\mathfrak{A}} = -\frac{1}{4}\xi^2$ negativ ist, so kann für beliebige Verhältnisse von ∇y und ∇p die variirende Größe $U_0 + \nabla U_0$ nicht durchgängig positiv oder negativ ausfallen (§. 14) folglich kann $U = 0$ nicht für ein Maximum oder Minimum ausgegeben werden.

V) Uebrigens hätte man diese Aufgabe auch so faßen können, wie wir in §. 16 unter III) angedeutet haben, nämlich, daß zwar y variiren, aber die Tangente in **M'** parallel zur Tangente in **M** liegen solle. Man würde unter diesen Umständen wieder nur eine einzige Bedingungsgleichung, nämlich

$$\frac{dU}{dy} = 2y + (\xi - 2x)p = 0$$

zu erfüllen haben. Hieraus folgt aber durch Absonderung der Variablen

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{2x - \xi} = \frac{dx}{x - \frac{1}{2}\xi}$$

also durch Integration

$$(5) \qquad y = \mathfrak{A}(x - \tfrac{1}{2}\xi)$$

Diese Gleichung gehört einer Geraden an, welche die Abscissenaxe in einem Punkte $x = \frac{1}{2}\xi$ schneidet, d. h. durch den Halbirungspunkt von **HK** hindurchgeht. Wäre etwa noch ein fester Punkt $x = \alpha$, $y = \beta$ gegeben, durch welchen die gesuchte Minimumscurve (resp. Maximumscurve) hindurchgezogen werden sollte, so würde die Integrationsconstante $\mathfrak{A}$ einen bestimmten Werth erhalten. Setzt man nun

$$\left.\begin{aligned} y + \nabla y &= \mathfrak{A}(x - \tfrac{1}{2}\xi) + \nabla y \\ p &= \mathfrak{A} \end{aligned}\right\} \text{an die Stelle von } y \text{ und } p \text{ in (1)}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} U_0 + \nabla U_0 &= (-\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\xi + \nabla y)(\tfrac{1}{2}\mathfrak{A}\xi + \nabla y) \\ &= -\tfrac{1}{4}\mathfrak{A}^2\xi^2 + \nabla y^2 \end{aligned}$$

woraus man erkennt, daß $U = -\frac{1}{4}\mathfrak{A}^2\xi^2$ im algebraischen Sinne ein Minimum, aber zugleich negativ, folglich im arithmetischen Sinne ein Maximum sei. In der That, da RS durch den Halbirungspunkt von HK geht, so wird $HR = KS = \frac{1}{2}\mathfrak{A}\xi$ sein, — wir sehen hier von den entgegengesetzten Vorzeichen dieser beiden Linien ab — und wenn eine mit RS parallel gezogene Gerade die Durchschnittspunkte R′ und S′ anstatt R und S liefert, so würden HR′ und KS′ nicht gleiche Größe haben, aber ihre Summe HR′ + KS′ wird gleich der Summe HR + KS sein, folglich das Produkt $U_0 + \delta U_0 = HR' \times KS'$ kleiner als das Produkt $U_0 = HR \times KS$ ausfallen.

§. 18.

I) Es ließen sich auch solche Aufgaben denken und nach den im Vorhergehenden entwickelten Grundsätzen auflösen, wo die gesuchte Curve deshalb nicht aus allen beliebigen Nachbarcurven ausgesucht werden dürfte, weil das Gesetz des Variirens dadurch bestimmt wäre, daß die Variationsquotienten δy, δp .... bestimmte Functionen von x sein sollten. Würde z. B. gefordert, daß $\delta y = Ax^n$ genommen werde, so würde hieraus folgen

$$\delta p = nAx^{n-1} \qquad \delta q = n(n-1)Ax^{n-2} \quad \ldots$$

und durch Einsetzen dieser Werthe in die den Betrachtungen des §. 13 zu Grunde gelegte Gleichung

$$X_1\delta y + X_2\frac{d\delta y}{dx} + X_3\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \ldots = 0$$

oder

$$\frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dp}\delta p + \frac{dU}{dq}\delta q + \ldots = 0$$

würde sich sofort die Differenzialgleichung für y ergeben.

II) Praktischer jedoch als diese hier gedachten sind wohl solche Aufgaben wo δy nicht geradezu als eine bestimmte Function von x gegeben ist, sondern wo nur zur Bedingung gemacht wird, daß für den jedesmal gewählten Werth von x die variirende Function

$$y + \delta y = f(x) + \delta y.\tau + \delta^2 y.\frac{\tau^2}{1.2} + \ldots$$

einem gegebenen Ausdrucke

$$\Theta\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots\right)$$

worin wie in U die Function y und deren Differenzialquotienten enthalten sind, oder auch wohl mehreren solchen Ausdrücken Θ_1, Θ_2.. dieselben Werthe ertheile, wie die gesuchte Function $y=f(x)$. So könnte z. B. bei einer geometrischen Untersuchung verlangt werden, daß die gesuchte Curve, welche U zu einem Maximum oder Minimum U_0 machen soll, nur mit solchen nächstanliegenden Curven verglichen werden solle, welche für die angenommene Abscisse dieselbe Krümmung besitzen, so daß der Krümmungshalbmeßer

$$\Theta = -\frac{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

für die gesuchte und für die variirende Curve einerlei Werth erhalte. Dieser Werth ist zu denken als eine vorläufig nicht näher gegebene Function von x, und hierdurch unterscheiden sich die Aufgaben dieser Art von jenen im Anfange von §. 13 besprochenen, zu welchen die zweite Aufgabe in §. 12 gehörte. Man kann daher gegenwärtig auch keinen der Differenzialquotienten p, q,... aus U eliminiren.

Indem man nun aber y, p,... in $y+\nabla y$, $p+\nabla p$,.... übergehen läßt, verwandelt sich Θ in

$$\Theta+\frac{d\Theta}{dy}\nabla y+\frac{d\Theta}{dp}\nabla p+\cdots+\frac{d^2\Theta}{dy^2}\frac{\nabla y^2}{1.2}+\frac{d^2\Theta}{dydp}\nabla y\,\nabla p+\cdots$$

und die Forderung, daß dieser Werth von dem ursprünglichen Θ nicht verschieden sei, führt zur Bedingungsgleichung

$$(1)\qquad \frac{d\Theta}{dy}\nabla y+\frac{d\Theta}{dp}\nabla p+\cdots+\frac{d^2\Theta}{dy^2}\frac{\nabla y^2}{1.2}+\cdots=0$$

und wenn man hier die Formeln (§. 9)

$$\nabla y=\delta y.\tau+\delta^2 y.\frac{\tau^2}{1.2}+\cdots$$

$$\nabla p=\delta p.\tau+\delta^2 p.\frac{\tau^2}{1.2}+\cdots$$

u. s. f. substituirt und nach den Potenzen des Variationsarguments τ ordnet, so sieht man sogleich, daß einzeln

$$(2)\qquad \frac{d\Theta}{dy}\delta y+\frac{d\Theta}{dp}\delta p+\frac{d\Theta}{dq}\delta q+\cdots=0$$

$$(3)\qquad \left.\begin{aligned} &\frac{d\Theta}{dy}\delta^{\prime 2}y + \frac{d\Theta}{dp}\delta^{\prime 2}p + \cdots \\ &+\frac{d^2\Theta}{dy^2}\delta^{\prime}y^2 + 2\frac{d^2\Theta}{dydp}\delta^{\prime}y\,\delta^{\prime}p + \cdots\cdots \end{aligned}\right\} = 0$$

u. s. f.

sein muß. Vermöge (2) ist von den Variationsquotienten $\delta^{\prime}y$, $\delta^{\prime}p$, $\delta^{\prime}q\ldots$ einer durch die übrigen bestimmt, und läßt sich also aus der für das Maximum oder Minimum von U bestehenden Gleichung

$$\frac{dU}{dy}\delta^{\prime}y + \frac{dU}{dp}\delta^{\prime}p + \cdots\cdots = 0$$

eliminiren. Dadurch aber wird die Anzahl der einzelnen Bedingungsgleichungen, welche wir im §. 13 II) aufgestellt hatten, gerade so gut um eine Einheit verkleinert, als wenn eine der Bedingungen $\delta^{\prime}y = 0$ oder $\delta^{\prime}p = 0$ u. s. f. in der Aufgabe eingeschloßen gewesen wäre, welchen Fall wir in §. 16 unter II) bis IV) besprochen haben. Man sieht auch, daß diese in §. 16 in Erwägung gezogenen Beschränkungen der variirenden Curven bloß besondere Fälle der gegenwärtig vorausgesetzten sind; denn z. B. die in der Aufgabe des §. 17 vorgeschriebene Bedingung, daß $\delta^{\prime}y = 0$ gedacht werde, ist einerlei mit der Forderung, daß ein gegebener Ausdruck $\Theta(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots)$ für die variirende Curve denselben Werth erhalte wie für die gesuchte, — es reducirt sich dabei nur der allgemeine Ausdruck Θ auf die einzige Variable y, und wegen $\frac{d\Theta}{dy} = 1$ reducirt sich die Bedingungsgleichung (2) auf $\delta^{\prime}y = 0$.

Würde aber gefordert, daß zwei solche Ausdrücke

$$\Theta_1(x, y, p, \ldots) \qquad \Theta_2(x, y, p, \ldots)$$

für die variirende Curve denselben Werth wie für die gesuchte besitzen sollten, so würde das für die weitere Rechnung einen ähnlichen Einfluß ausüben, als zwei von den Bedingungen $\delta^{\prime}y = 0$, $\delta^{\prime}p = 0$ u. s. f. Es versteht sich, daß die Anzahl n solcher Bedingungen

$$(4)\qquad \delta^{\prime}\Theta_1 = 0 \qquad \delta^{\prime}\Theta_2 = 0 \ldots\ldots \qquad \delta^{\prime}\Theta_n = 0$$

allemal wenigstens um eine Einheit kleiner sein müße als die Anzahl m der in U, Θ_1, $\Theta_2\ldots$ vorkommenden Functionen

$$y \qquad \frac{dy}{dx} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} \qquad \cdots \qquad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

III) Am bequemsten wird man sich übrigens bei einer solchen Rech-

nung, anſtatt geradezu einige von den Variationsquotienten δy, δp, ... aus δU mittelſt der Bedingungsgleichungen

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\partial_y\Theta_1.\delta y + \partial_p\Theta_1.\delta p + \partial_q\Theta_1.\delta q + \cdots = 0\\ &\partial_y\Theta_2.\delta y + \partial_p\Theta_2.\delta p + \partial_q\Theta_2.\delta q + \cdots = 0\\ &\quad\cdot\cdot \qquad\quad \cdot\cdot \qquad\quad \cdot\cdot \qquad\quad \cdot\cdot\cdot \end{aligned}$$

zu eliminiren, unbeſtimmter Factoren λ_1, λ_2 ... bedienen, welche man ſich als vorläufig noch willkührliche aber alsbald gewißen Bedingungsgleichungen zu unterwerfende Functionen von x denken muß und mit welchen man die Gleichungen (5) multiplicirt, um ſie ſodann zu δU zu addiren. Hierdurch wird

$$(6)\qquad \begin{array}{l|l|l|l|l} \delta U = & \partial_y U & \delta y + & \partial_p U & \delta p + \quad \partial_q U \quad \delta q + \cdot\cdot \\ & + \lambda_1\partial_y\Theta_1 & + \lambda_1\partial_p\Theta_1 & + \lambda_1\partial_q\Theta_1 & + \cdot\cdot \\ & + \lambda_2\partial_y\Theta_2 & + \lambda_2\partial_p\Theta_2 & + \lambda_2\partial_q\Theta_2 & + \cdot\cdot \\ & + \quad\cdot & + \quad\cdot & + \quad\cdot & + \cdot\cdot \\ & + \quad\cdot & + \quad\cdot & + \quad\cdot & + \cdot\cdot \end{array} = 0$$

Jetzt kann man nun, wenn n die Anzahl der Bedingungsgleichungen $\delta\Theta_1 = 0$, $\delta\Theta_2 = 0$, ... alſo auch die Anzahl der Multiplikatoren λ_1, λ_2 ... angiebt, n beliebige von den Variationsquotienten δy, δp, ... aus dieſen n Bedingungsgleichungen und der Gl. $\delta U = 0$ auf die Art eliminiren, daß man ihre Coefficienten in (6) gleich Null ſetzt, wodurch man alſo zunächſt n Bedingungsgleichungen für λ_1, λ_2 ... λ_n erhält. Da aber alsdann die übrig bleibenden Variationsquotienten als von einander unabhängige Größen anzuſehen ſind, ſo fordert die Bedingung $\delta U = 0$ vermöge des Lehrſatzes in §. 13 I) daß man auch die Coefficienten dieſer übrigen in (6) vorkommenden Variationsquotienten einzeln gleich Null ſetze. Daher gelangt man im Ganzen zu dem Syſtem folgender Gleichungen

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\partial_y U + \lambda_1\partial_y\Theta_1 + \lambda_2\partial_y\Theta_2 + \cdot\cdot = 0\\ &\partial_p U + \lambda_1\partial_p\Theta_1 + \lambda_2\partial_p\Theta_2 + \cdot\cdot = 0\\ &\partial_q U + \lambda_1\partial_q\Theta_1 + \lambda_2\partial_q\Theta_2 + \cdot\cdot = 0\\ &\quad\cdot\cdot \qquad\quad \cdot\cdot \qquad\quad \cdot\cdot \qquad\quad \cdot\cdot \end{aligned}$$

d. h. man kann geradezu die Coefficienten aller in (6) vorkommenden Variationsquotienten einzeln gleich Null ſetzen. Sobald hieraus λ_1, λ_2, ... eliminirt werden, hat man entweder eine einzige Gleichung mit x, y, p, q ... durch deren Integration man die geſuchte Function $y = f(x)$ und das geſuchte Maximum oder Minimum U_0 zu erhalten hoffen darf, — oder man erhält mehrere ſolche Diffe-

renzialgleichungen, welche sich jedoch, wofern die vorgelegte Aufgabe möglich sein soll, untereinander vertragen müßen (Vgl. §. 13 II).

IV) Sobald nun $y = f(x)$ bestimmt worden ist, — wobei wir annehmen wollen, daß auch die anfangs in $f(x)$ vorhandenen Integrationsconstanten mittelst besonderer Bedingungen der Aufgabe, z. B. daß die gesuchte Curve durch gegebene Punkte hindurch laufen solle, vollkommen bestimmt worden seien — so werden auch $p = f'(x)$, $q = f''(x)$.... völlig bestimmte Functionen von x sein und durch Substitution dieser Ausdrücke für $y, p, q \ldots$ in $\partial_y \Theta$, $\partial_p \Theta \ldots$ wird sich die Gleichung (2) in eine gewöhnliche Differenzialgleichung zwischen x als independenter Variablen und δy als Function umgestalten, etwa

$$(8) \qquad \Phi_1(x)\delta y + \Phi_2(x)\frac{d\delta y}{dx} + \Phi_3(x)\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \ldots = 0$$

Es könnte bei dem ersten Anblick scheinen, als wenn hierdurch eine weit größere Abhängigkeit der Größen $\delta y, \delta p, \ldots$ untereinander gesetzt wäre als wir gemeint haben, — als wenn nämlich nicht, wie wir oben sagten, vermöge dieser Bedingungsgleichung eine der Größen $\delta y, \delta p \ldots$ bestimmt wäre, sobald man den andern beliebige Werthe zugewiesen hätte, sondern als wenn sich bestimmte Werthe für alle ergeben müßten. Dieser Anschein verschwindet aber, sobald man auf die bei der Integration von (8) neu eintretenden Integrationsconstanten achtet. Denn gesetzt es wären in Θ vorhanden gewesen y, p und q, so würde man aus (8) durch Integration eine Gleichung zwischen x, δy und zwei willkührlichen Constanten A_1, A_2 gewinnen und daraus etwa herleiten können

$$\delta y = \varphi(x, A_1, A_2)$$

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx} = \varphi'(x, A_1, A_2)$$

$$\delta q = \frac{d^2\delta y}{dx^2} = \varphi''(x, A_1, A_2)$$

Die Unbestimmtheit von A_1 und A_2 gestattet aber jetzt, daß man, sobald der Variablen x in Gedanken irgend ein bestimmter Werth beigelegt worden ist, auch noch zwei von den Größen $\delta y, \delta p, \delta q$ beliebige Werthe ertheile, worauf dann A_1 und A_2 und der dritte der genannten Variationsquotienten bestimmte Größen sein werden.

V) Ob nun das der gefundenen Gleichung $y = f(x)$ entsprechende U_0 ein Maximum oder Minimum sei, wird bei Aufgaben dieser Art auf folgende Weise zu entscheiden sein.

Es ist im Allgemeinen (S. §. 14 III)

$$
\begin{aligned}
\nabla U_0 = {} & \partial_y U \nabla y + \partial_{yy}^2 U \frac{\nabla y^2}{1.2} + \cdots \\
& + \partial_p U \nabla p + \partial_{yp}^2 U \nabla y \nabla p + \cdots \\
& + \partial_q U \nabla q + \partial_{pp}^2 U \frac{\nabla p^2}{1.2} + \cdots \\
& + \partial_{yq}^2 U \nabla y \nabla q + \cdots \\
& + \partial_{pq}^2 U \nabla p \nabla q + \cdots \\
& + \partial_{qq}^2 U \frac{\nabla q^2}{1.2} + \cdots \\
& + \cdots \quad + \quad \cdots \quad + \cdots
\end{aligned} \tag{9}
$$

wo man für y, p ... bereits $f(x)$, $f''(x)$ .... eingesetzt denken muß. Die Bedingungen $\nabla\Theta_1 = 0$, $\nabla\Theta_2 = 0$ u. s. f. geben aber, wie bereits bei (1) erinnert worden ist,

$$
0 = \left| \begin{array}{l}
\partial_y\Theta_1 \nabla y + \partial_{yy}^2\Theta_1 \frac{\nabla y^2}{1.2} + \cdots \\
+ \partial_p\Theta_1 \nabla p + \partial_{yp}^2\Theta_1 \nabla y \nabla p + \cdots \\
+ \partial_q\Theta_1 \nabla q + \partial_{pp}^2\Theta_1 \frac{\nabla p^2}{1.2} + \cdots \\
\quad \cdots \quad + \partial_{yq}^2\Theta_1 \nabla y \nabla q + \cdots \\
\qquad + \quad \cdots \quad + \cdots
\end{array} \right.
\qquad
0 = \left| \begin{array}{l}
\partial_y\Theta_2 \nabla y + \cdots \\
+ \partial_p\Theta_2 \nabla p + \cdots \\
+ \partial_q\Theta_2 \nabla q + \cdots \\
\quad \cdots \quad + \cdots \\
\qquad + \cdots
\end{array} \right.
$$

u. s. f.

Wenn man nun diese Bedingungsgleichungen der Reihe nach mit den frühern Multiplikatoren λ_1, λ_2 .... multiplicirt und die Produkte zu (9) addirt, so reduciren sich die Coefficienten der ersten Potenzen von ∇y, ∇p, ∇q u. s. f. vermöge der Gleichungen (7) sämmtlich auf Null, und man erhält

$$
\nabla U_0 = \mathfrak{A}.\nabla y^2 + \mathfrak{B}.\nabla y \nabla p + \mathfrak{C}.\nabla p^2 + \cdots\cdots \tag{10}
$$

wobei

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= \tfrac{1}{2}[\partial_{yy}^2 U + \lambda_1 \partial_{yy}^2 \Theta_1 + \lambda_2 \partial_{yy}^2 \Theta_2 + \cdots] \\
\mathfrak{B} &= \quad [\partial_{yp}^2 U + \lambda_1 \partial_{yp}^2 \Theta_1 + \lambda_2 \partial_{yp}^2 \Theta_2 + \cdots] \\
\mathfrak{C} &= \tfrac{1}{2}[\partial_{pp}^2 U + \lambda_1 \partial_{pp}^2 \Theta_1 + \lambda_2 \partial_{pp}^2 \Theta_2 + \cdots] \\
\mathfrak{D} &= \quad [\partial_{yq}^2 U + \lambda_1 \partial_{yq}^2 \Theta_1 + \lambda_2 \partial_{yq}^2 \Theta_2 + \cdots] \\
\mathfrak{E} &= \quad \text{u. s. f.}
\end{aligned}
$$

ist. Hierin sind vermöge der Gleichungen (7) in Verbindung mit dem gefundenen $y = f(x)$, $p = f'(x)$ u. s. f. zunächst λ_1, λ_2 ..., also dann auch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ u. s. f. bestimmte Functionen von x, und es ist somit ∇U_0 auf die in §. 14 III) näher besprochene Form gebracht worden.

Lieſt man aber auf der rechten Seite der Formel (10) blos diejenigen Glieder aus ∇y^2, $\nabla y \nabla p$, ∇p^2 u. ſ. f. zuſammen, welche mit τ^2 multiplicirt ſind, ſo erhält man wegen $\nabla U_0 = \delta' U \frac{\tau^2}{1.2} + \delta'^3 U \frac{\tau^3}{1.2.3}$ u. ſ. w. ſogleich

$$\tfrac{1}{2}\delta'^2 U = A\delta' y^2 + B\delta' y \delta' p + C\delta' p^2 + \cdots$$

und hierin wird man nun ſchließlich mit Benutzung der Bedingungsgleichungen (5), wenn deren Anzahl $= n$ iſt, für n von den Variationsquotienten $\delta' y$, $\delta' p$, .. ihre Werthe, durch die übrigen ausgedrückt, einſetzen und dann nach §. 14 III) prüfen, ob das erhaltene Aggregat eine poſitive oder negative oder doch eine mit U_0 im Vorzeichen übereinſtimmende Größe ſei.

VI) Wir werden dieſe Regeln nun an einer ſpeciellen Aufgabe erläutern. Nach Uebereinkunft darüber, daß wenn $OP = x$ und $PM = y$ rechtwinklige Coordinaten eines beliebigen Punkts M der geſuchten Curve $y = f(x)$ ſind, und wenn MT die demſelben Punkte zugehörige Tangente iſt, die Subtangente PT einen $\begin{matrix}\text{poſitiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}$ Werth erhalte, je nachdem die Differenz $\overline{OP} - \overline{OT}$ $\begin{matrix}\text{poſitiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$ iſt, werde verlangt diejenige Curve zu finden, für welche die Subnormale möglichſt klein ausfalle; die Auswahl ſoll jedoch nur unter denjenigen Curven geſchehen, für welche das Produkt $y.\overline{OT}$ einerlei Werth hat. Es iſt hier

$$U = y\frac{dy}{dx} = yp$$

$$\Theta = y\left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = y\left(x - \frac{y}{p}\right)$$

und man findet das Syſtem der beiden Bedingungsgleichungen

$$p + \lambda\left(x - \frac{2y}{p}\right) = 0$$

$$y + \frac{\lambda y^2}{p^2} = 0$$

woraus λ zu eliminiren iſt. Subſtituirt man den aus der letzteren fließenden Werth $\lambda = -\frac{p^2}{y}$ in die erſte, ſo erhält man

$$p\left(3 - \frac{px}{y}\right) = 0$$

und wenn man also von der Auflösung $p = 0$, $y = \text{Const.}$ absieht, wozu $U = 0$ (für jeden Werth von x) und $\Theta = \infty$ (oder auch wohl $0 \times \infty$) gehört: so haben wir die Differenzialgleichung

$$\frac{3}{x} - \frac{p}{y} = 0$$

deren Integral $3lx - ly = \text{Const.} = lA$

oder $$y = \frac{x^3}{A}$$

zeigt, daß die gesuchte Curve eine cubische Parabel ist. Dieselbe besteht aus zwei in O zusammenstoßenden, ihre convexe Seite gegen die Abscissenaxe zukehrenden Zweigen, von denen der eine nach der Seite der positiven, der andere von O aus rückwärts nach der Seite der negativen X sich erstreckt. Ertheilt man der Constanten A einen positiven Werth, so liegt der erstgedachte Zweig auf Seite der positiven Y, der andere auf Seite der negativen Y; bei einem negativen Werthe von A würde das Umgekehrte hiervon Statt finden.

Der zugehörige Werth von U, nämlich die Subnormale dieser Parabel ist nun

$$U_0 = \frac{3x^5}{A^2}$$

und Θ erhält den Werth $\frac{2}{3}xy$ oder $\frac{2}{3}\frac{x^4}{A}$. Um zu entscheiden, ob U_0 ein Maximum oder Minimum sei, setzen wir die mit Benutzung von $\lambda = -\frac{p^2}{y}$ zu erhaltenden Werthe

$$\frac{d^2U}{dy^2} = 0 \qquad \lambda\frac{d^2\Theta}{dy^2} = \frac{2p}{y} = \frac{6}{x}$$

$$\frac{d^2U}{dydp} = 1 \qquad \lambda\frac{d^2\Theta}{dydp} = -2$$

$$\frac{d^2U}{dp^2} = 0 \qquad \lambda\frac{d^2\Theta}{dp^2} = \frac{2y}{p} = \frac{2}{3}x$$

in die Formel (10). Dies giebt

$$\nabla U_0 = \frac{3}{x}\nabla y^2 - \nabla y \nabla p + \frac{x}{3}\nabla p^2$$

und wenn man dieses Trinom durch

$$\mathfrak{A}.\nabla y^2 + \mathfrak{B}\nabla y \nabla p + \mathfrak{C}.\nabla p^2$$

vorstellt, so erkennt man nach der in §. 14 III) entwickelten Regel, weil $4\mathfrak{A}\mathfrak{C} = 4$ positiv und größer als $\mathfrak{B}^2 = 1$ ist, sofort daß ∇U_0 für jede be-

liebige Annahme von νy und νp einerlei Vorzeichen mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{E}$, d. h. mit x, also auch einerlei Vorzeichen mit $U_0 = \frac{3x^5}{A^2}$ habe. Und deshalb ist im arithmetischen Sinne (§. 10. Nr. 2) U_0 ein Minimum. — Man würde aber ebenso leicht aus $\delta\Theta = 0$ die Relation $3\delta y + x\delta p = 0$ und mit deren Hülfe den Werth $\frac{1}{2}\delta^2 U = \frac{9}{x}\delta y^2$ finden.

§. 19.

Es giebt auch solche Aufgaben, bei denen der zu einem Maximum (Minimum) zu machende Ausdruck U nicht blos die gesuchte Function $y = f(x)$ nebst deren Differenzialquotienten, sondern auch noch die Größen

$$y_\alpha = f(\alpha) \qquad \left[\frac{dy}{dx}\right]_\alpha = f'(\alpha) \qquad \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_\alpha = f''(\alpha) \quad \text{u. s. f.}$$

oder außerdem auch wohl noch

$$y_\xi = f(\xi) \qquad \left[\frac{dy}{dx}\right]_\xi = f'(\xi) \qquad \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_\xi = f''(\xi) \quad \text{u. s. f.}$$

enthält, nämlich diejenigen Werthe, welche $f(x)$ und die Differenzialquotienten dieser noch unbekannten Function für bestimmte gegebene Werthe ($x = \alpha$ resp. $x = \xi$) der Independenten erhalten. Dieser Fall tritt z. B. dann ein, wenn eine Curve von solcher Beschaffenheit gesucht werden soll, daß wenn man an ihr im Punkte M, welchem die Coordinaten x und $y = f(x)$ entsprechen, die Tangente construirt und von denjenigen beiden, auf der gesuchten Curve liegenden Punkten A und B, welche zu den Abscissen $x = \alpha$, $x = \xi$ gehören, Perpendikel auf diese Tangente fällt, irgend ein vorgeschriebener und von der Länge dieser Perpendikel abhängiger Ausdruck größer oder kleiner werde, als bei einer der variirenden Nachbarcurven. Wenn hier die beiden Punkte A und B nicht etwa fest gegeben sind, so daß sämmtliche variirende Curven durch diese festen Punkte hindurchgezogen werden sollen, sondern wenn nur die Abscissen $x = \alpha$ und $x = \xi$ fix gegeben sind und die zugehörigen Ordinaten $f(\alpha)$ und $f(\xi)$ gerade wie die jeder andern Abscisse zugehörige Ordinate $f(x)$ in den Zustand des Variirens versetzt werden sollen; so variirt der gedachte Ausdruck nicht blos deshalb, weil die im Punkte x, y zu ziehende Tangente veränderlich ist, sondern auch deshalb weil in zwei aufeinander folgenden Nachbarcurven, selbst wenn die erwähnte Tangente die nämliche geblieben wäre, doch noch die Längen der beiden Perpendikel verschieden sein würden.

Aus dem gegebenen Ausdruck

$$U = F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots y_\alpha,\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_\alpha,\ \ldots y_\xi,\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_\xi,\ \ldots\right)$$

$$= F\left(x,\ y,\ p,\ q,\ \ldots y_\alpha,\ p_\alpha,\ \ldots y_\xi,\ p_\xi\ \ldots\right)$$

folgt nun

$$\begin{aligned}\delta U = &\frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dp}\delta p + \frac{dF}{dq}\delta q + \ldots\\ &+ \frac{dF}{dy_\alpha}\delta y_\alpha + \frac{dF}{dp_\alpha}\delta p_\alpha + \frac{dF}{dq_\alpha}\delta q_\alpha + \ldots\\ &+ \frac{dF}{dy_\xi}\delta y_\xi + \frac{dF}{dp_\xi}\delta p_\xi + \ldots \quad \ldots\end{aligned}$$

worin δy_α, $\delta p_\alpha \ldots \delta y_\xi$, $\delta p_\xi \ldots$ die Werthe anzeigen, welche die Variationen $\delta y = \Omega(x)dt$, $\delta p = \Omega'(x)dt \ldots$ für $x = \alpha$ resp. $x = \xi$ erhalten Die weitere Behandlung einer solchen Aufgabe beruht aber darauf, daß für den Fall eines Maximums oder Minimums von U sämmtliche Glieder des vorstehenden Aggregats (wenn wir von $\delta^1 U = \frac{1}{0}$ absehen) einzeln gleich Null sein müßen. Es läßt sich nämlich folgender, auch später noch von uns zu benutzender Lehrsatz aufstellen:

Wenn in dem Aggregate $\delta^1 U =$

$$\begin{aligned}(1)\quad &A_1\delta^1 y_\alpha + A_2\left[\frac{d\delta^1 y}{dx}\right]_\alpha + A_3\left[\frac{d^2\delta^1 y}{dx^2}\right]_\alpha + \ldots\\ &+ B_1\delta^1 y_\xi + B_2\left[\frac{d\delta^1 y}{dx}\right]_\xi + B_3\left[\frac{d^2\delta^1 y}{dx^2}\right]_\xi + \ldots\\ &+ X_1\delta^1 y + X_2\frac{d\delta^1 y}{dx} + X_3\frac{d^2\delta^1 y}{dx^2} + \ldots\end{aligned}$$

$\delta^1 y$ eine beliebig annehmbare Function $\Omega(x)$ bedeuten soll, während die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots B_1, B_2, \ldots X_1, X_2, \ldots$ bestimmte Ausdrücke vorstellen, welche theils gegebene theils unbestimmte Constanten und außerdem x und unbekannte Functionen von x enthalten mögen, aber von $\delta^1 y$ unabhängig gedacht werden sollen, so ist der Forderung $\delta^1 U = 0$ nur dadurch Genüge zu leisten, daß sämmtliche Glieder dieses Aggregats einzeln verschwinden; es muß also entweder der Werth eines der Differenzialquotienten z. B. $\left[\frac{d^i\delta^1 y}{dx^i}\right]_\alpha$ gleich Null sein, wie es in vielen Fällen die

Natur der Aufgabe wirklich erheischt, — oder es muß, wenn $\left[\frac{d^t\delta y}{dx^t}\right]_\alpha$ einen unbestimmten Werth hat, der zugehörige Coefficient A_{t+1} annullirt werden.

I) Um dieses zu beweisen, legen wir der Variablen x in Gedanken einen beliebigen, der Natur der Aufgabe nach zulässigen Werth $x = \zeta$ bei, und setzen zuvörderst den Fall voraus, daß die in dem Aggregat (1) vorkommenden Größen

$$\begin{array}{lll} \delta y_\alpha & \left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_\alpha & \left[\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right]_\alpha \cdots \\ \delta y_\xi & \left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_\xi & \left[\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right]_\xi \cdots \\ \delta y_\zeta & \left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_\zeta & \left[\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right]_\zeta \cdots \end{array}$$

deren Anzahl $= n$ sein möge, sämmtlich als von Null verschieden angesehen werden müßten. Wollte man alsdann für δy etwa eine ganze rationale Function von x mit n (oder noch mehr) unbestimmten Constanten setzen,

$$\delta y = C_1 x^\mu + C_2 x^\nu + C_3 x^\pi + \cdots$$

oder auch noch specieller

$$\delta y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + \cdots$$

so würde man gewiß diese Constanten so annehmen können, daß von den genannten n Größen alle, bis auf eine einzige, nach Belieben auszuwählende, etwa $\left[\frac{d^t\delta y}{dx^t}\right]_\alpha$ sich auf Null reduciren, diese eine aber nicht gleich Null wird, sondern einen beliebig angenommenen Werth K erhält. Denn man sieht aus den Formeln

$$\begin{aligned} \delta y &= C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + \cdots \\ \frac{d\delta y}{dx} &= C_2 + 2C_3 x + 3C_4 x^2 + \cdots \\ \frac{d^2\delta y}{dx^2} &= 2C_3 + 6C_4 x + \cdots \end{aligned}$$

u. s. f.

daß die zu diesem Zwecke anzusetzenden n Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2\zeta + C_3\zeta^2 + \cdots \\ 0 &= C_2 + 2C_3\zeta + \cdots \end{aligned}$$

u. s. f.

in Beziehung auf die zu suchenden Werthe der in δy enthaltenen Constanten C_1, C_2, ... C_n sämmtlich vom ersten Grade, also ohne Schwierigkeit und unzweideutig auflösbar sein werden. Nähme man aber in δy noch mehr als n Constanten an, so dürfte man einigen derselben sogar beliebige Werthe ertheilen und könnte dann immer noch die übrigen nach Maßgabe vorstehender Bedingungsgleichungen bestimmen. Die Gleichung $\delta U = 0$ zieht sich unter diesen Umständen zusammen in

$$A_{t+1}\left[\frac{d^t\delta y}{dx^t}\right]_a = A_{t+1}\,K = 0$$

woraus

$$A_{t+1} = 0$$

folgt.

Da nun wegen der zwischen den Coefficienten A_1, A_2 ... B_1, B_2 ... X_1, X_2 .... und der Function δy vorausgesetzten Unabhängigkeit eine veränderte Annahme der in δy enthaltenen Constanten C_1, C_2 ... keinen Einfluß auf die Werthe jener Coefficienten ausübt; so läßt sich die in Beziehung auf A_{t+1} gemachte Schlußfolgerung, indem man für C_1, C_2 ... andere Werthe auswählt, auf jeden einzelnen Coefficienten A_1, A_2.. B_1, B_2.. X_1, X_2.. anwenden. Und da auch für jeden andern Werth von x, den man an die Stelle des eben von uns gedachten $x = \zeta$ setzen möchte, dieselben Schlüße sich wiederholen laßen, so sieht man, daß für alle Werthe, deren diese Variable fähig ist, die genannten Coefficienten sämmtlich gleich Null sein müßen.

II) Man wird überhaupt wohl thun, bei dieser Gelegenheit ein für alle Male zu bemerken, daß die in Zukunft häufig vorkommenden Größen

$$\delta y_a, \qquad \delta y_\xi, \qquad \left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_a, \qquad \left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_\xi, \qquad \left[\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right]_a \quad ..$$

so oft δy keiner besondern Bedingung unterworfen werden wird, nicht allein ganz unbestimmte, sondern auch von einander völlig unabhängige Größen bedeuten, ungeachtet ihres gemeinschaftlichen Ursprungs aus $\delta y = \Omega(x)$. Denn man kann in jedem Falle die Function

$$\delta y = \Omega(x, C_1, C_2, C_3, \ldots)$$

in Gedanken mit so vielen unbestimmten Constanten ausrüsten und diese letzteren so annehmen, daß die genannten Größen δy_a, δy_ξ u. s. f. ganz beliebig gewählte Werthe erhalten, woraus folgt, daß zwischen diesen Größen keine solche Abhängigkeit gedacht werden dürfe, welche es etwa möglich machte eine derselben aus einer oder einigen andern zu berechnen.

III) Was aber nun den Fall anbelangt, wenn von den im Aggregate (1) vorkommenden Größen $\delta^i y_\alpha$, $\delta^i y_\xi$, $\left[\frac{d\delta^i y}{dx}\right]_\alpha$ u. ſ. f. eine gewiſſe Anzahl wegen der Natur der Aufgabe, die zur Gleichung $\delta^i U = 0$ hingeführt hatte, von ſelbſt verſchwinden muß; ſo braucht man alsdann den in I) gelieferten Beweis offenbar nur auf die Coefficienten A, B, X der von Null verſchiedenen Größen anzuwenden, um zur Ueberzeugung zu gelangen, daß alle Glieder des Aggregats (1) einzeln gleich Null ſind.

Von ſolchen Bedingungen, welche verlangen, daß die eine oder andere der Variationen δy, $\delta\frac{dy}{dx}$, $\delta\frac{d^2y}{dx^2}$, .. verſchwinden, war bereits in §. 16 die Rede. Insbeſondere wollen wir hier jedoch noch auf den Fall hinweiſen, daß wegen der Natur der Aufgabe $\delta^i y_\alpha = 0$, und zugleich auch wohl $\delta^i y_\xi = 0$ ſein muß. Dieſes wird ſich nämlich in unſern zukünftigen Unterſuchungen allemal ereignen, ſobald verlangt wird, eine noch unbekannte Maximums- oder Minimums-Curve ſolle durch zwei gegebene Punkte A und B laufen, welchen die Abſciſſen $x = \alpha$ und $x = \xi$ zugehören. Denn da alsdann für den nicht variirenden Punkt A die Variation

$$\varGamma y = \delta^i y.\tau + \delta^{i2} y.\frac{\tau^2}{1.2} + \cdots = \Omega(x).\tau + \cdots$$

verſchwinden ſoll, ſo muß $\delta^i y_\alpha = \Omega(\alpha) = 0$ ſein. Und in gleicher Weiſe verlangt die andere Bedingung, daß $\delta^i y_\xi$ verſchwinde. Da aber im Punkte A die Tangente an die variirende Curve N'AM' (Fig. 2) ſchon eine etwas andere Lage einnehmen wird, als die Tangente AT der geſuchten Curve NAM, und da $\frac{d\delta y}{dx} = \delta\frac{dy}{dx}$ die Variation der trigonometriſchen Tangente des W. OTA angiebt, ſo wird $\left[\frac{d\delta^i y}{dx}\right]_\alpha = \Omega'(\alpha)$ als eine von Null verſchiedene Größe gedacht werden müßen. Und das nämliche gilt natürlich im Allgemeinen von $\left[\frac{d\delta^i y}{dx}\right]_\xi$, $\left[\frac{d^2\delta^i y}{dx^2}\right]_\alpha$, $\left[\frac{d^2\delta^i y}{dx^2}\right]_\xi$ u. ſ. f. So oft nun ein ſolcher Fall eintritt, ſo wird man in dem vorher bei I) geführten Beweiſe, wo es darauf ankam, den anfänglich unbeſtimmten Conſtanten C_1, C_2, C_3 ... ſucceſſive ſolche Werthe beizulegen, daß von den n Größen $\delta^i y_\alpha$, $\delta^i y_\xi$ ... bald dieſe bald jene einen von Null verſchiedenen Werth K annähme, während die übrigen jedesmal ſich ſämmtlich auf Null reducirten, weiter keine Beſchränkung anzubringen haben, als

daß durchgehends die Bedingungsgleichungen $\delta' y_\alpha = 0$, $\delta' y_\xi = 0$ beibehalten werden müßen, d. h. daß weder $\delta' y_\alpha$ noch $\delta' y_\xi$ gleich einer von Null verschiedenen Größe K gesetzt werden dürfen.

§. 20.

Die am Anfange des vorigen §. betrachtete Function

$$U = F(x, y, p, .. y_\alpha, p_\alpha, .. y_\xi, p_\xi, ..)$$

kann also nur dadurch zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden, daß man, abgesehen von den durch die Gleichung $\delta' U = \frac{1}{0}$ etwa dargebotenen Auflösungen, die Function y so zu bestimmen sucht, daß allen den Bedingungen

$$\frac{dF}{dy}\delta y = 0 \qquad \frac{dF}{dp}\delta p = 0 \qquad \frac{dF}{dq}\delta q = 0 \,..$$

$$\left[\frac{dF}{dy}\right]_\alpha \delta y_\alpha = 0 \qquad \left[\frac{dF}{dp}\right]_\alpha \delta p_\alpha = 0 \qquad \left[\frac{dF}{dq}\right]_\alpha \delta q_\alpha = 0 \,..$$

$$\left[\frac{dF}{dy}\right]_\xi \delta y_\xi = 0 \qquad \left[\frac{dF}{dp}\right]_\xi \delta p_\xi = 0 \qquad \left[\frac{dF}{dq}\right]_\xi \delta q_\xi = 0 \,..$$

Genüge geleistet wird. Wo die Aufgabe eine Auflösung wirklich zuläßt, wird dies zum Theil dadurch möglich, daß die Erfüllung einiger derjenigen Bedingungsgleichungen, welche mit Rücksicht auf das in §. 16 so wie das im vor. §. unter III) Gesagte übrig bleiben, zugleich die Erfüllung anderer mit sich bringt.

Beispiel. Man sucht eine Curve von der Beschaffenheit, daß wenn man durch einen beliebig auf ihr angenommenen Punkt M $[x, y = f(x)]$ von dem Ursprung der Coordinaten O eine Gerade zieht und auf diese von den beiden Punkten A und B, welche auf der gesuchten Curve liegen und den gegebenen Abscissen $x = \alpha$, $x = \xi$ zugehören, also die Ordinaten $y_\alpha = f(\alpha)$, $y_\xi = f(\xi)$ besitzen, Perpendikel fällt, das Produkt dieser Perpendikel ein Maximum oder Minimum werde.

Auflösung. Die Gerade OM hat die Gleichung

$$y' = \frac{y}{x} x'$$

Bezeichnen wir den Winkel, dessen trigonometrische Tangente durch $\frac{y}{x}$ angegeben wird, durch ϑ, so erhalten wir nach den bekannten Formeln,

vermittelst deren man die Transformation rechtwinkliger Coordinaten in Beziehung auf ein neues, ebenfalls rechtwinkliges Coordinatensystem bewerkstelligt, dessen Abscissenaxe unter einem $\mathfrak{W} = -\vartheta$ gegen die ursprüngliche Abscissenaxe geneigt ist, für die von den Punkten A und B auf OM gefällten Perpendikel, d. h. für die Ordinaten dieser Punkte in Beziehung auf OM als eine ursprüngliche Abscissenaxe sogleich die Formeln

$$y_\alpha \operatorname{Cos}\vartheta - \alpha \operatorname{Sin}\vartheta \qquad y_\xi \operatorname{Cos}\vartheta - \xi \operatorname{Sin}\vartheta$$

und da $\operatorname{Sin}\vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\operatorname{Cos}\vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

ist, so wird

$$(1) \qquad U = \frac{(xy_\alpha - \alpha y)(xy_\xi - \xi y)}{x^2+y^2}$$

Hieraus folgt

$$\delta U = -\Big[\xi(xy_\alpha - \alpha y)(x^2+y^2) + \alpha(xy_\xi - \xi y)(x^2+y^2) + 2y(xy_\alpha - \alpha y)(xy_\xi - \xi y)\Big]\cdot\frac{\delta y}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x(xy_\alpha - \alpha y)}{x^2+y^2}\delta y_\xi \qquad + \frac{x(xy_\xi - \xi y)}{x^2+y^2}\delta y_\alpha$$

Indem wir nun aber die Coefficienten der zwei Variationen δy_α und δy_ξ gleich 0 oder ∞ setzen, und die Auflösung

$$x^2 + y^2 = 0$$

bei Seite laßen, weil hierdurch die gesuchte Curve auf einen einzigen Punkt, nämlich den Ursprung der Coordinaten, reducirt würde, erhalten wir die Bedingungsgleichungen

entweder (2) $x = 0$

und bei dieser Annahme reducirt sich der Zähler in dem Coefficienten von δy auf $\alpha\xi y^3 + \alpha\xi y^3 - 2\alpha\xi y^3$, wird also identisch gleich Null;

oder das System

$$(3) \qquad xy_\alpha - \alpha y = 0 \qquad xy_\xi - \xi y = 0$$

und bei dieser Annahme verschwindet der Coefficient von δy ebenfalls. Diese beiden Gleichungen (3) laßen aber, sobald man sie in der Form

$$\frac{y}{x} = \frac{y_\alpha}{\alpha} = \frac{y_\xi}{\xi} = \text{Const.}$$

schreibt, sogleich erkennen, daß die gesuchte Curve eine gerade Linie sei, welche unter einem noch unbestimmten Winkel durch den Anfangspunkt der Coordinaten zu ziehen ist. — Die durch die Gleichung (2) repräsentirte Gerade, nämlich die Ordinatenaxe, ist als ein besonderer

Fall unter dieſen Geraden $\frac{y}{x} = \text{Const.}$ mit einbegriffen. Da übrigens bei dem Beſtehen der Gleichungen (3) auch das Produkt U ſich auf Null reducirt, ſo liefert dieſe Auflöſung freilich ein Minimum, aber nur im arithmetiſchen Sinne.

§. 21.

Wir wenden uns jetzt zur Beſtimmung des Maximums oder Minimums ſolcher Functionen wie

$$U = F(x, y, z)$$

oder auch $$U = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots z, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots\right)$$

welche außer der Independenten x zwei Functionen y und z dieſer Independenten enthalten, ſei es nun, was den einfacheren Fall abgiebt, ohne die Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ u. ſ. f. oder auch mit dieſen. Dabei ſetzen wir zunächſt voraus, daß für y und z beziehungsweiſe für die Differenzialquotienten dieſer Functionen weiter keine beſondere Bedingung vorgeſchrieben ſei.

Aufgaben dieſer Art bieten ſich dar in allen geometriſchen Unterſuchungen, wo eine im Raume nach drei Dimenſionen ſich erſtreckende und durch ein Syſtem zweier Gleichungen

$$y = f(x) \qquad z = f(x)$$

darzuſtellende Curve gefunden werden ſoll, durch welche eine von der Beſchaffenheit dieſer Curve abhängige jedoch ohne Integration zu berechnende Größe U zu einem Maximum oder Minimum gemacht wird.

Man dürfte hierbei, wenn man im Sinne des §. 2 ſich $y = \Phi(x, t)$ denken wollte, für die andere variirende Function ein von t verſchiedenes Variationsargument einführen, alſo z. B.

$$y = \Phi(x, t) \qquad z = \Psi(x, t_1)$$

denken, welche Bemerkung man auch bei ſpäteren Unterſuchungen dieſer Art vor Augen haben möge, um nicht durch Beſchränkungen, welche man auf Unkoſten der durch die Natur der Sache geforderten Allgemeinheit gemacht hätte, möglicher Weiſe beengt zu werden. Setzen wir nämlich $z = \Psi(x, t_1)$ woraus für $t_1 = 0$ das primitive $z = f(x)$ entſpringen ſoll, ſo erhalten wir

Liest man aber auf der rechten Seite der Formel (10) blos diejenigen Glieder aus ∇y^2, $\nabla y \nabla p$, ∇p^2 u. s. f. zusammen, welche mit τ^2 multiplicirt sind, so erhält man wegen $\nabla U_0 = \delta' U \frac{\tau^2}{1.2} + \delta'^3 U \frac{\tau^3}{1.2.3}$ u. s. w. sogleich

$$\tfrac{1}{2}\delta'^2 U = \mathfrak{A}\delta' y^2 + \mathfrak{B}\delta' y \delta' p + \mathfrak{C}\delta' p^2 + \cdots$$

und hierin wird man nun schließlich mit Benutzung der Bedingungsgleichungen (5), wenn deren Anzahl $= n$ ist, für n von den Variationsquotienten $\delta' y$, $\delta' p$, .. ihre Werthe, durch die übrigen ausgedrückt, einsetzen und dann nach §. 14 III) prüfen, ob das erhaltene Aggregat eine positive oder negative oder doch eine mit U_0 im Vorzeichen übereinstimmende Größe sei.

VI) Wir werden diese Regeln nun an einer speciellen Aufgabe erläutern. Nach Uebereinkunft darüber, daß wenn $OP = x$ und $PM = y$ rechtwinklige Coordinaten eines beliebigen Punkts M der gesuchten Curve $y = f(x)$ sind, und wenn MT die demselben Punkte zugehörige Tangente ist, die Subtangente PT einen $\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}$ Werth erhalte, je nachdem die Differenz $\overline{OP} - \overline{OT}$ $\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}$ ist, werde verlangt diejenige Curve zu finden, für welche die Subnormale möglichst klein ausfalle; die Auswahl soll jedoch nur unter denjenigen Curven geschehen, für welche das Produkt $y.\overline{OT}$ einerlei Werth hat. Es ist hier

$$U = y\frac{dy}{dx} = yp$$

$$\Theta = y\left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = y\left(x - \frac{y}{p}\right)$$

und man findet das System der beiden Bedingungsgleichungen

$$p + \lambda\left(x - \frac{2y}{p}\right) = 0$$

$$y + \frac{\lambda y^2}{p^2} = 0$$

woraus λ zu eliminiren ist. Substituirt man den aus der letzteren fließenden Werth $\lambda = -\frac{p^2}{y}$ in die erste, so erhält man

$$p\left(3 - \frac{px}{y}\right) = 0$$

und wenn man also von der Auflösung $p = 0$, $y = \text{Const.}$ absieht, wozu $U = 0$ (für jeden Werth von x) und $\Theta = \infty$ (oder auch wohl $0 \times \infty$) gehört: so haben wir die Differenzialgleichung

$$\frac{3}{x} - \frac{p}{y} = 0$$

deren Integral $3lx - ly = \text{Const.} = lA$

oder $$y = \frac{x^3}{A}$$

zeigt, daß die gesuchte Curve eine cubische Parabel ist. Dieselbe besteht aus zwei in O zusammenstoßenden, ihre convexe Seite gegen die Abscissenaxe zukehrenden Zweigen, von denen der eine nach der Seite der positiven, der andere von O aus rückwärts nach der Seite der negativen X sich erstreckt. Ertheilt man der Constanten A einen positiven Werth, so liegt der erstgedachte Zweig auf Seite der positiven Y, der andere auf Seite der negativen Y; bei einem negativen Werthe von A würde das Umgekehrte hiervon Statt finden.

Der zugehörige Werth von U, nämlich die Subnormale dieser Parabel ist nun

$$U_0 = \frac{3x^5}{A^2}$$

und Θ erhält den Werth $\frac{2}{3}xy$ oder $\frac{2}{3}\frac{x^4}{A}$. Um zu entscheiden, ob U_0 ein Maximum oder Minimum sei, setzen wir die mit Benutzung von $\lambda = -\frac{p^2}{y}$ zu erhaltenden Werthe

$$\frac{d^2U}{dy^2} = 0 \qquad \lambda\frac{d^2\Theta}{dy^2} = \frac{2p}{y} = \frac{6}{x}$$

$$\frac{d^2U}{dydp} = 1 \qquad \lambda\frac{d^2\Theta}{dydp} = -2$$

$$\frac{d^2U}{dp^2} = 0 \qquad \lambda\frac{d^2\Theta}{dp^2} = \frac{2y}{p} = \frac{2}{3}x$$

in die Formel (10). Dies giebt

$$\nabla U_0 = \frac{3}{x}\nabla y^2 - \nabla y \nabla p + \frac{x}{3}\nabla p^2$$

und wenn man dieses Trinom durch

$$\mathfrak{A}.\nabla y^2 + \mathfrak{B}\nabla y \nabla p + \mathfrak{C}.\nabla p^2$$

vorstellt, so erkennt man nach der in §. 14 III) entwickelten Regel, weil $4\mathfrak{A}\mathfrak{C} = 4$ positiv und größer als $\mathfrak{B}^2 = 1$ ist, sofort daß ∇U_0 für jede be-

liebige Annahme von φy und φp einerlei Vorzeichen mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{E}$, d. h. mit x, also auch einerlei Vorzeichen mit $U_0 = \frac{3x^5}{A^2}$ habe. Und deshalb ist im arithmetischen Sinne (§. 10. Nr. 2) U_0 ein Minimum. — Man würde aber ebenso leicht aus $\delta\Theta = 0$ die Relation $3\delta y + x\delta p = 0$ und mit deren Hülfe den Werth $\frac{1}{2}\delta^2 U = \frac{9}{x}\delta y^2$ finden.

§. 19.

Es giebt auch solche Aufgaben, bei denen der zu einem Maximum (Minimum) zu machende Ausdruck U nicht blos die gesuchte Function $y = f(x)$ nebst deren Differenzialquotienten, sondern auch noch die Größen

$$\psi\alpha = f(\alpha) \qquad \left[\frac{dy}{dx}\right]_\alpha = f'(\alpha) \qquad \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_\alpha = f''(\alpha) \quad \text{u. s. f.}$$

oder außerdem auch wohl noch

$$y_\xi = f(\xi) \qquad \left[\frac{dy}{dx}\right]_\xi = f'(\xi) \qquad \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_\xi = f''(\xi) \quad \text{u. s. f.}$$

enthält, nämlich diejenigen Werthe, welche $f(x)$ und die Differenzialquotienten dieser noch unbekannten Function für bestimmte gegebene Werthe ($x = \alpha$ resp. $x = \xi$) der Independenten erhalten. Dieser Fall tritt z. B. dann ein, wenn eine Curve von solcher Beschaffenheit gesucht werden soll, daß wenn man an ihr im Punkte M, welchem die Coordinaten x und $y = f(x)$ entsprechen, die Tangente construirt und von denjenigen beiden, auf der gesuchten Curve liegenden Punkten A und B, welche zu den Abscissen $x = \alpha$, $x = \xi$ gehören, Perpendikel auf diese Tangente fällt, irgend ein vorgeschriebener und von der Länge dieser Perpendikel abhängiger Ausdruck größer oder kleiner werde, als bei einer der variirenden Nachbarcurven. Wenn hier die beiden Punkte A und B nicht etwa fest gegeben sind, so daß sämmtliche variirende Curven durch diese festen Punkte hindurchgezogen werden sollen, sondern wenn nur die Abscissen $x = \alpha$ und $x = \xi$ fix gegeben sind und die zugehörigen Ordinaten $f(\alpha)$ und $f(\xi)$ gerade wie die jeder andern Abscisse zugehörige Ordinate $f(x)$ in den Zustand des Variirens versetzt werden sollen; so variirt der gedachte Ausdruck nicht blos deshalb, weil die im Punkte x, y zu ziehende Tangente veränderlich ist, sondern auch deshalb weil in zwei aufeinander folgenden Nachbarcurven, selbst wenn die erwähnte Tangente die nämliche geblieben wäre, doch noch die Längen der beiden Perpendikel verschieden sein würden.

Aus dem gegebenen Ausdruck

$$U = F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots y_\alpha,\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_\alpha,\ \ldots y_\xi,\ \left[\frac{dy}{dx}\right]_\xi,\ \ldots\right)$$

$$= F\left(x,\ y,\ p,\ q,\ \ldots y_\alpha,\ p_\alpha,\ \ldots y_\xi,\ p_\xi\ \ldots\right)$$

folgt nun

$$\begin{aligned}\delta U = &\frac{dF}{dy}\delta y + \frac{dF}{dp}\delta p + \frac{dF}{dq}\delta q + \ldots\\ &+ \frac{dF}{dy_\alpha}\delta y_\alpha + \frac{dF}{dp_\alpha}\delta p_\alpha + \frac{dF}{dq_\alpha}\delta q_\alpha + \ldots\\ &+ \frac{dF}{dy_\xi}\delta y_\xi + \frac{dF}{dp_\xi}\delta p_\xi + \ldots \quad \ldots\end{aligned}$$

worin δy_α, $\delta p_\alpha \ldots \delta y_\xi$, $\delta p_\xi \ldots$ die Werthe anzeigen, welche die Variationen $\delta y = \Omega(x)dt$, $\delta p = \Omega'(x)dt \ldots$ für $x = \alpha$ resp. $x = \xi$ erhalten Die weitere Behandlung einer solchen Aufgabe beruht aber darauf, daß für den Fall eines Maximums oder Minimums von U sämmtliche Glieder des vorstehenden Aggregats (wenn wir von $\delta U = \frac{1}{0}$ absehen) einzeln gleich Null sein müßen. Es läßt sich nämlich folgender, auch später noch von uns zu benutzender Lehrsatz aufstellen:

Wenn in dem Aggregate $\delta U =$

$$\begin{aligned}(1)\quad &A_1\delta y_\alpha + A_2\left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_\alpha + A_3\left[\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right]_\alpha + \ldots\\ &+ B_1\delta y_\xi + B_2\left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_\xi + B_3\left[\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right]_\xi + \ldots\\ &+ X_1\delta y + X_2\frac{d\delta y}{dx} + X_3\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \ldots\end{aligned}$$

δy eine beliebig annehmbare Function $\Omega(x)$ bedeuten soll, während die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots B_1, B_2, \ldots X_1, X_2, \ldots$ bestimmte Ausdrücke vorstellen, welche theils gegebene theils unbestimmte Constanten und außerdem x und unbekannte Functionen von x enthalten mögen, aber von δy unabhängig gedacht werden sollen, so ist der Forderung $\delta U = 0$ nur dadurch Genüge zu leisten, daß sämmtliche Glieder dieses Aggregats einzeln verschwinden; es muß also entweder der Werth eines der Differenzialquotienten z. B. $\left[\frac{d^i\delta y}{dx^i}\right]_\alpha$ gleich Null sein, wie es in vielen Fällen die

u. s. w. ist. Diese ist nun so viel als eine zweite Bedingungsgleichung von derselben Form $\delta\Theta = 0$. Sie würde überflüßig sein, wenn in U die Differenzialquotienten q und $\mathfrak{q}$ beide fehlten; sie leistet dagegen wesentliche Dienste und muß mit einem Factor λ multiplicirt zu $\delta U = 0$ hinzugenommen werden, wenn in δU die genannten Differenzialquotienten vorhanden sind.

Oder nehmen wir an, um noch einen specielleren Fall vor Augen zu haben, es würde nach einer in einem gegebenen Punkt A $[x_0, y_0, z_0]$ anfangenden Curve $y = f(x)$, $z = \mathfrak{f}(x)$ gefragt, längs welcher ein gegebener Ausdruck $U = F(x, y, z, p, \mathfrak{p})$ den möglich kleinsten Werth erhalte, man fordere aber nicht, daß die gesuchte Curve ein Minimum liefere in Vergleich mit allen überhaupt möglichen durch den Punkt A laufenden Nachbarcurven, sondern es reiche hin, daß sie die verlangte Eigenschaft des Minimums besitze in Vergleich mit solchen Nachbarcurven, die neben ihr selbst auf einer in der Richtung der Axe der X fortlaufenden röhrenförmigen Fläche liegen, deren auf der genannten Axe senkrechte Querschnitte lauter ähnliche Ellipsen sein sollen, mit Hauptaxen parallel zu den Axen der Y und Z und in einem vorgeschriebenen Verhältnisse $m:n$ zu einander stehend. — Wenn man für eine beliebig angenommene Abscisse x den zugehörigen Punkt M der gesuchten Curve bereits kennte, so würde man sehr leicht in einer auf der Axe der X senkrechten Ebene eine durch ihn hindurch gehende Ellipse construiren, deren Centrum auf der Axe der X läge und deren Axen parallel zu den Axen der Y und Z laufend in dem vorgeschriebenen Verhältnis $m:n$ zu einander ständen. Und da diese Construction auf alle Punkte M anwendbar ist, so würde zugleich mit der gesuchten Curve auch die in der Aufgabe gedachte krumme Fläche, auf welcher die variirenden Curven sämmtlich liegen sollen, durchaus bestimmt sein. Für den eben erwähnten durch M gehenden Querschnitt besteht nun eine Gleichung

$$\frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2} = K^2$$

wobei K als eine bestimmte jedoch unbekannte Function von x aufzufaßen ist. Da aber auch der, einer Nachbarcurve angehörige Punkt M' (bei ungeändertem x) sich auf der Peripherie dieser Ellipse befinden soll, so haben wir $\frac{y^2}{m^2} + \frac{z^2}{n^2}$ als einen Ausdruck zu betrachten, dessen Variationen erster so wie höherer Ordnungen Null sind (§. 18 II). Daher besteht, wenn

in Beziehung auf die zu suchenden Werthe der in δy enthaltenen Constanten C_1, C_2, ... C_n sämmtlich vom ersten Grade, also ohne Schwierigkeit und unzweideutig auflösbar sein werden. Nähme man aber in δy noch mehr als n Constanten an, so dürfte man einigen derselben sogar beliebige Werthe ertheilen und könnte dann immer noch die übrigen nach Maßgabe vorstehender Bedingungsgleichungen bestimmen. Die Gleichung $\delta U = 0$ zieht sich unter diesen Umständen zusammen in

$$A_{t+1}\left[\frac{d^t\delta y}{dx^t}\right]_a = A_{t+1}\,K = 0$$

woraus

$$A_{t+1} = 0$$

folgt.

Da nun wegen der zwischen den Coefficienten A_1, A_2 ... B_1, B_2 ... X_1, X_2 .... und der Function δy vorausgesetzten Unabhängigkeit eine veränderte Annahme der in δy enthaltenen Constanten C_1, C_2 ... keinen Einfluß auf die Werthe jener Coefficienten ausübt; so läßt sich die in Beziehung auf A_{t+1} gemachte Schlußfolgerung, indem man für C_1, C_2 ... andere Werthe auswählt, auf jeden einzelnen Coefficienten A_1, A_2 .. B_1, B_2 .. X_1, X_2 .. anwenden. Und da auch für jeden andern Werth von x, den man an die Stelle des eben von uns gedachten $x = \zeta$ setzen möchte, dieselben Schlüße sich wiederholen laßen, so sieht man, daß für alle Werthe, deren diese Variable fähig ist, die genannten Coefficienten sämmtlich gleich Null sein müßen.

II) Man wird überhaupt wohl thun, bei dieser Gelegenheit ein für alle Male zu bemerken, daß die in Zukunft häufig vorkommenden Größen

$$\delta y_a, \qquad \delta y_\xi, \qquad \left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_a, \qquad \left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_\xi, \qquad \left[\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right]_a \quad ..$$

so oft δy keiner besondern Bedingung unterworfen werden wird, nicht allein ganz unbestimmte, sondern auch von einander völlig unabhängige Größen bedeuten, ungeachtet ihres gemeinschaftlichen Ursprungs aus $\delta y = \Omega(x)$. Denn man kann in jedem Falle die Function

$$\delta y = \Omega(x,\ C_1,\ C_2,\ C_3, \ldots)$$

in Gedanken mit so vielen unbestimmten Constanten ausrüsten und diese letzteren so annehmen, daß die genannten Größen δy_a, δy_ξ u. s. f. ganz beliebig gewählte Werthe erhalten, woraus folgt, daß zwischen diesen Größen keine solche Abhängigkeit gedacht werden dürfe, welche es etwa möglich machte eine derselben aus einer oder einigen andern zu berechnen.

für y, z, p, q ... so wie für λ_1, λ_2 ... die gefundenen Functionen von x einsetzt. Dadurch reduciren sich die letzten, mit $\delta^2 y$, $\delta^2 z$ ... behafteten Bestandtheile, den Gleichungen (2) zu Folge, auf Null, das erste Glied aber wird U_0. Es kommt dann auf die Untersuchung an, ob die Summe der übrigen auf U_0 folgenden Glieder einen positiven oder negativen Werth, oder doch mit U_0 einerlei Vorzeichen besitze; hierbei muß man jedoch, wenn sämmtliche in $\delta\Theta_1$, $\delta\Theta_2$ ... vorkommenden Variationsquotienten δy, δz, δp ... in diesem Ausdruck für $U_0 + \frac{1}{2}\delta^2 U.\tau^2$ wirklich erscheinen, nochmals die Bedingungsgleichungen (1) zu Rathe ziehen, indem vermöge jeder einzelnen dieser Gleichungen einer der genannten Variationsquotienten durch die übrigen ausdrückbar geworden ist. (Vgl. §. 18).

Drittes Capitel.

Variationen der einfachen Integralausdrücke mit einer independenten Variablen.

§. 23.

Eine der wichtigsten Anwendungen des Variations-Calculs besteht in der Ermittelung derjenigen Beschaffenheit einer Function $y = f(x)$, für welche der Werth eines innerhalb bestimmter Gränzen $x = \alpha$ und $x = \xi$ genommenen Integrals $\int_\alpha^\xi V dx$ ein Maximum oder Minimum wird, wobei V eine gegebene Function von x, y und einem oder einigen der Differenzialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = p \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = q \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = r \qquad \text{u. s. f.}$$

vorstellt.

Setzen wir

$$U = \int_\alpha^\xi V dx = [\int V dx]_\xi - [\int V dx]_\alpha$$

so wird, sobald y um die beliebige jedoch hinreichend klein zu denkende Variation $\gamma y = \delta y.\tau + \frac{1}{2}\delta^2 y.\tau^2 + \cdots$ geändert wird, U übergehen in

$$U + \delta U.\tau + \delta^2 U \frac{\tau^2}{1.2} + \cdots\cdots$$

und man hat also auch hier wieder für den Fall eines Maximum oder Minimum die Bedingungsgleichung

$$\delta U = 0 \qquad \text{d. h.} \qquad \frac{1}{dt}\left(\int_a^\xi [V + \delta V]dx - \int_a^\xi V dx\right) = 0$$

welche sich augenscheinlich in

$$(1) \qquad \frac{1}{dt}\int_a^\xi \delta V dx = \int_a^\xi \delta' V dx = 0$$

zusammenzieht. Sobald man daher nach Anleitung der in §. 6 und §. 7 entwickelten Formeln den Variationsquotienten $\delta' V$ durch $\delta' y$, $\delta' p$, $\delta' q$ u. s. f. ausdrückt, dann mit dx multiplicirt, zwischen den Gränzen $x = \alpha$ bis $x = \xi$ integrirt, und schließlich den erhaltenen Ausdruck gleich Null setzt: so wird man vermöge (1) die zur Auflösung des vorgelegten Problems dienliche Bedingungsgleichung besitzen. Die wirkliche Ausführung der hier angedeuteten Operationen giebt aber Veranlaßung zu verschiedenen wichtigen Betrachtungen.

1) Man könnte sich vielleicht versucht fühlen, die eben gedachte Gleichung $\int_a^\xi \delta' V dx = 0$ dadurch zu befriedigen, daß man $\delta' V = 0$ setzte. Allein den Variationsquotienten von V gleich Null setzen, kann nur zweierlei bedeuten: entweder annehmen, daß die gegebene Function V durch den Uebergang von $y = f(x)$ in $y + \gamma y$ sich gar nicht ändere, — oder die gesuchte Function $y = f(x)$ so bestimmen wollen, daß V ein Maximum oder Minimum werde. Die erste Annahme wäre, weil alsdann auch das Integral $\int V dx$ keiner Variation fähig sein würde, gegen die Voraussetzung, und ist auch, wenn in V die Function y oder einer ihrer Differenzialquotienten p, q ... vorkommt, wegen der Formeln (1) und (2) des §. 6 offenbar unstatthaft. Ueber die andere mögliche Bedeutung der Gleichung $\delta' V = 0$ aber bemerke man, daß allerdings, wenn es nach Anleitung der §§. 8 bis 13 gelungen ist, eine solche Function $y = f(x)$ zu entdecken, welche V für die innerhalb des Integrationsintervalls $x = \alpha$ bis $x = \xi$ gelegenen Werthe von x zu einem $\left|\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right|$ macht, durch eben dieselbe Function $y = f(x)$ auch das Integral $\int_a^\xi V dx$ zu einem $\left|\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right|$ gemacht würde. Man überzeugt sich hiervon, wenn man sich zuvörderst die Ausdrücke

$$y = f(x) \qquad p = f'(x) \qquad q = f''(x) \qquad \text{ꝛc.}$$

in $V = F(x, y, p, q, \ldots)$ substituirt denkt, wodurch $F(x, y, p, \ldots)$ in $\Psi(x)$ übergehen möge, hierauf V (= Y) als die Ordinate einer gewißen Curve ansieht, welcher die Gleichung eigen wäre

$$Y = \Psi(x)$$

und dann das Integral

$$\int_\alpha^\xi V dx = \int_\alpha^\xi Y dx = \int_\alpha^\xi \Psi(x) dx$$

als einfache Quadratur der über der Basis $HK = (\xi - \alpha)$ stehenden und von den Gränzordinaten $HI = \Psi(\alpha)$, $KL = \Psi(\xi)$ und dem Bogen INL eingeschloßenen Figur auffaßt (Fig. 7). Bei dieser Betrachtung ist klar, daß wenn während des Intervalls $x = OH = \alpha$ bis $x = OK = \xi$ die Ordinate $V = \Psi(x)$ continuirlich $\left|\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right|$ wäre als die der nämlichen Abscisse x zugehörige Ordinate jeder beliebigen von den möglicher Weise in Betracht kommenden Nachbarcurven, nothwendig auch $\int_\alpha^\xi \Psi(x) dx = \int_\alpha^\xi V dx$ ein $\left|\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right|$ sein müßte.

Allein es wird sofort auch einleuchten, daß dieser Satz sich nicht umkehren läßt. Denn es kann füglich $\int_\alpha^\xi V dx = \int_\alpha^\xi \Psi(x) dx$ ein Maximum (Minimum) werden, ohne daß für jeden Werth von x innerhalb des Integrationsintervalls die Ordinate V ein Maximum (resp. Minimum) zu sein braucht; es kann z. B. die von dem Bogen InNRL begränzte Fläche in der Figur augenscheinlich einen größern Inhalt haben, als die von dem Bogen In′NR′L begränzte, obwohl dieser letztere für eine zwischen $x = \alpha$ und $x = OP$ genommene Abscisse eine größere Ordinate darbietet als die erste Curve. Es kann also recht wohl eine Function $y = f(x)$ existiren, welche das Integral $\int_\alpha^\xi V dx$ zu einem $\left|\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right|$ macht, während die Function V vielleicht gar keines Maximum oder Minimum fähig ist; wie denn z. B. der Function $V = \frac{2ay}{xx} - \frac{dy^2}{dx^2}$ die Variation

$$\delta V = \frac{2a}{x^2}\delta y - 2p\delta p$$

entsprechen würde, welche, insofern sowohl δy als δp willkührlich sein soll, für endliche Werthe von x gar nicht Null werden kann, und welche offenbar auch, wenn man sie gleich ∞ setzen wollte, zu einem endlichen Maximum oder Minimum von V nicht verhelfen würde, wogegen das innerhalb bestimmter Gränzen genommene Integral $\int V dx = \int\left(\frac{2ay}{xx} - \frac{dy^2}{dx^2}\right)dx$ durch die Function

$$y = a\left[\log\frac{x}{A} + \frac{x}{B}\right]$$

zu einem Maximum gemacht wird, wie wir demnächst (in §. 33) finden werden.

Aus diesem Grunde kann die Behandlung der Gleichung $\delta V = 0$ nicht als der richtige Weg angesehen werden, der in allen Fällen zum gewünschten Ziele führen würde, nämlich zur Entdeckung derjenigen Function $y = f(x)$, durch welche das Integral $\int_a^\xi V dx$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht wird.

II) Substituirt man aber für den Variationsquotienten δV den nach Anleitung der Formel (5) in §. 7 zu bildenden Ausdruck, so erhält man

$$\int \delta V dx = \int\left[\frac{dV}{dy}\delta y + \frac{dV}{dp}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{dV}{dq}\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \cdots\right]dx$$

$$(2) \qquad = \int\frac{dV}{dy}\delta y dx + \int\frac{dV}{dp}d\delta y + \int\frac{dV}{dq}d.\frac{d\delta y}{dx} + \int\frac{dV}{dr}d.\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \cdots$$

und wenn man in dieser Summe alle hinter dem ersten Gliede nachfolgenden Integralien mittelst der bekannten Formel

$$\int v du = vu - \int u dv$$

theilweise integrirt, so ergiebt sich zuvörderst

$$\int\frac{dV}{dp}d\delta y = \frac{dV}{dp}\delta y - \int d\frac{dV}{dp}\delta y$$

wobei unter $d\frac{dV}{dp}$ natürlich das totale Differenzial der Function $\frac{dV}{dp}$, nämlich das Aggregat

$$\frac{d^2V}{dpdx}dx + \frac{d^2V}{dpdy}pdx + \frac{d^2V}{dpdp}qdx + \cdots$$

zu verstehen ist, während $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dp}$ ... sämmtlich nur partielle Differenzialquotienten sind. Bedienen wir uns für diese der etwas einfacheren

Bezeichnung $\partial_y V$, $\partial_p V \ldots$, so erhalten wir für das dritte Integral auf der rechten Seite der Gleichung (2) die Transformation

$$\int \partial_q V d.\frac{d\delta y}{dx} = \partial_q V \frac{d\delta y}{dx} - \int \frac{d\partial_q V}{dx} d\delta y$$

$$= \partial_q V \frac{d\delta y}{dx} - \frac{d\partial_q V}{dx}\delta y + \int \frac{d^2\partial_q V}{dx}\delta y$$

Ferner wird das nächstfolgende Integral

$$\int \partial_r V d.\frac{d^2\delta y}{dx^2} = \partial_r V \frac{d^2\delta y}{dx^2} - \frac{d\partial_r V}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2\partial_r V}{dx^2}\delta y - \int \frac{d^3\partial_r V}{dx^2}\delta y$$

u. s. f.

Daher ist die Summe der auf der rechten Seite der Gleichung (2) stehenden Integralien gleich

$$\begin{aligned}
&\int \partial_r V \delta y dx \\
&+ \partial_p V \delta y - \int d\partial_p V \delta y \\
&+ \partial_q V \frac{d\delta y}{dx} - \frac{d\partial_q V}{dx}\delta y + \int \frac{d^2\partial_q V}{dx}\delta y \\
&+ \partial_r V \frac{d^2\delta y}{dx^2} - \frac{d\partial_r V}{dx}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2\partial_r V}{dx^2}\delta y - \int \frac{d^3\partial_r V}{dx^2}\delta y \\
&+ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots
\end{aligned}$$

oder nach anderer Anordnung der Glieder und in der ursprünglichen Bezeichnung

$$\left.\begin{aligned}
\int \delta V dx = &\left(\frac{dV}{dp} - \frac{1}{dx} d\frac{dV}{dq} + \frac{1}{dx^2} d^2\frac{dV}{dr} - \ldots\right)\delta y \\
&+ \left(\frac{dV}{dq} - \frac{1}{dx} d\frac{dV}{dr} + \ldots\right)\frac{d\delta y}{dx} \\
&+ \left(\frac{dV}{dr} - \ldots\right)\frac{d^2\delta y}{dx^2} \\
&+ \ldots \\
&\ldots \\
&+ \int\left(\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx} d\frac{dV}{dp} + \frac{1}{dx^2} d^2\frac{dV}{dq} - \frac{1}{dx^3} d^3\frac{dV}{dr} + \ldots\right)\delta y dx
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

worin von den willkührlichen Functionen δy, δp, δq u. s. f. blos noch die erste unter dem Integralzeichen sich vorfindet.

§. 24.

Nimmt man nun dieses Integral innerhalb der Gränzen $x = \alpha$ bis $x = \xi$ und setzt, um der Bedingungsgleichung (1) des vorigen §. zu genügen, die erhaltene Summe gleich Null, so ergiebt sich jedenfalls eine größere oder geringere Anzahl von Bedingungsgleichungen, deren Nothwendigkeit auf dem nachfolgenden Lehrsatze beruht:

Wenn für eine beliebige Beschaffenheit der Function δy das Aggregat

$$(4)\begin{cases} \left(B_1[\delta y]_\xi + B_2\left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_\xi + B_3\left[\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right]_\xi + \cdots + B_{m+1}\left[\frac{d^m\delta y}{dx^m}\right]_\xi\right) \\ -\left(A_1[\delta y]_\alpha + A_2\left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_\alpha + A_3\left[\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right]_\alpha + \cdots + A_{m+1}\left[\frac{d^m\delta y}{dx^m}\right]_\alpha\right) \\ +\int_\alpha^\xi \Psi(x)\delta y\,dx \end{cases}$$

worin A_1, A_2 .. B_1, B_2 ... von δy unabhängige Größen sind, sich auf Null reduciren soll; so müßen erstlich sämmtliche einzelnen Glieder in den beiden, vor dem Integralzeichen vorausgehenden Parentheſen verschwinden, außerdem aber die unter dem Integralzeichen befindliche Function $\Psi(x)$ für jeden beliebigen Werth von x gleich Null sein.

Beweis. I) Die hier vorausgesetzte Anzahl aller Glieder ist $(2m+3)$. Setzt man daher für δy in Gedanken eine Function von x, welche $2m+3$ unbestimmte Constanten (oder noch mehr) enthält, so wird $\int_\alpha^\xi \Psi(x)\delta y\,dx$ eine Function von α, ξ und diesen Constanten. Eine dieser Constanten würde sich dann so bestimmen laßen, daß der Werth dieses Integrals verschwindet; und weil man dann außerdem noch wenigstens über $2m+2$ unbestimmte, in den Größen $\left[\delta y\right]_\alpha$, $\left[\delta y\right]_\xi$, $\left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_\alpha$ u. s. f. enthaltene Constanten zu verfügen hat, so laßen sich sofort die im Beweiſe des §. 19 gebrauchten Schlüße anwenden, um die Ueberzeugung zu begründen, daß sämmtliche Glieder des Aggregats (4), welche dem Integrale vorausgehen, einzeln gleich Null sein müßen. Hält man dies fest und bedenkt, daß eine geänderte Annahme von δy auf die Beschaffenheit der Coefficienten A_1, B_1, ... sämmtlicher eben erwähnter Größen keinen Einfluß ausübt, daß also die beiden dem Integrale vorausgehenden Parentheſen ein für alle Mal gleich Null bleiben müßen, (sei es nun wegen des Verschwindens

des Coefficienten $A_{\lambda+1}$, oder weil der Werth von $\left[\frac{d^\lambda \delta y}{dx^\lambda}\right]_\alpha$ für jede Beschaffenheit von δy wegen der Natur der Aufgabe Null sein müßte); — so sieht man, daß die vorliegende Bedingungsgleichung gleichbedeutend ist mit der Forderung, daß das Integral $\int_\alpha^\xi \Psi(x)\delta y dx$ auch für eine andere Annahme von δy, nämlich überhaupt für jede möglicher Weise annehmbare Beschaffenheit von δy sich auf Null reducire. Und diese Forderung hat keinen Sinn, wenn nicht $\Psi(x) = 0$ ist. Denn wäre $\Psi(x)$ nicht identisch gleich Null, so könnte man, insofern die Natur der Aufgabe einen völlig unbeschränkten Spielraum für die Wahl einer für δy zu setzenden Function $\Omega(x)$ gewährt, beispielsweise $\delta y = \Omega(x) = \frac{1}{\Psi(x)}$ setzen, und erhielte

$$\int_\alpha^\xi \Psi(x)\delta y dx = \int_\alpha^\xi dx = (\xi - \alpha)$$

Diese Differenz kann aber, da $\xi > \alpha$ gedacht werden soll, nicht verschwinden, und deshalb war die Annahme, daß $\Psi(x)$ von Null verschieden sein könne, unstatthaft.

II) Wenn dagegen $\Omega(x)$ von solcher Beschaffenheit gedacht werden muß, wie es in sehr vielen Aufgaben gefordert wird, daß $\Omega(\alpha) = 0$ sei, und auch vielleicht noch, daß $\Omega(\xi) = 0$ sei, nämlich, daß die gesuchte Curve (Siehe z. B. §. 26 II und III) durch einen fixen Anfangspunkt A $\left|\begin{matrix} x = \mathrm{OH} = \alpha \\ y = \mathrm{HA} = \beta \end{matrix}\right|$ und vielleicht auch noch durch einen gegebenen Endpunkt B $\left|\begin{matrix} x = \mathrm{OK} = \xi \\ y = \mathrm{KB} = \eta \end{matrix}\right|$ laufen soll, so mag der eben zuletzt gemachte Schluß in so fern einer festeren Begründung bedürftig scheinen, weil im Allgemeinen $\Omega(x) = \frac{1}{\Psi(x)}$ diesen Bedingungen nicht Genüge leisten würde. Allein durch eine kleine Abänderung der für $\Omega(x)$ vorauszusetzenden Form läßt sich ein solcher Einwurf beseitigen. Jedenfalls ist nämlich die verlangte Eigenschaft der Function $\Omega(x) = (x-\alpha)^\mu \varphi(x)$ oder $\Omega(x) = (x-\alpha)^\mu \times (\xi - x)^\nu \varphi(x)$ zuzusprechen, wobei der Exponent $\mu \left\{\begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix}\right\} 1$ gedacht werden soll,

je nachdem $\left(\frac{d^\delta y}{dx}\right)_\alpha = \begin{cases} 0 \\ \text{unbeſtimmt} \\ \text{aber endlich} \\ \infty \end{cases}$ ſein müßte, und wobei $\varphi(x)$ eine ganz beliebig annehmbare Function bedeutet, wenn ſie nur innerhalb des Intervalls von $x = \alpha$ bis $x = \xi$ continuirlich bleibt. Man könnte daher $\varphi(x) = \frac{1}{\Psi(x)}$ annehmen, oder vielmehr, um die Möglichkeit zu berückſichtigen, daß $\Psi(x)$ ſelbſt ein Produkt von der Form

$$(x-\alpha)^\varrho(\xi-x)^\sigma\Theta(x)$$

wäre, brauchte man nur

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Theta(x)} = \frac{(x-\alpha)^\varrho(\xi-x)^\sigma}{\Psi(x)}$$

anzunehmen; denn alsdann erhielte die Function

$$\delta^\nu y = \frac{(x-\alpha)^\mu(\xi-x)^\nu}{\Theta(x)} = \frac{(x-\alpha)^m(\xi-x)^n}{\Psi(x)}$$

wobei der Kürze wegen m und n anſtatt der Summen $\mu+\varrho$, $\nu+\sigma$ geſchrieben worden iſt, die geforderte Beſchaffenheit. Es würde nämlich

$$\int_\alpha^\xi \Psi(x)\delta^\nu y dx = \int_\alpha^\xi (x-\alpha)^m(\xi-x)^n dx$$

und da hier die Exponenten ϱ, σ, μ, ν, m, n ſämmtlich als poſitive Zahlen gedacht wurden, und auch wegen $\alpha < x < \xi$ der unter dem Integralzeichen ſtehende Ausdruck während des ganzen Integrationsintervalls poſitiv bleibt, ſo ſieht man, daß dieſes Integral nothwendig einen poſitiven von Null verſchiedenen Werth beſitzt.

§. 25.

Sobald wir nun, um die Bedingungsgleichung (1) des §. 23 zu erfüllen, welche zu dem Maximum oder Minimum von $U = \int_\alpha^\xi V dx$ verhelfen ſoll, das Integral $\int \delta^\nu V.dx$, ſo wie wir es in (3) entwickelt haben, zwiſchen den Gränzen $x = \alpha$ bis $x = \xi$ nehmen, und das hierdurch entſtehende Aggregat gleich Null ſetzen; ſo erhalten wir

$$
\left.\begin{aligned}
&\left(\partial_r V - \frac{d\partial_q V}{dx} + \frac{d^2\partial_r V}{dx^2} - \cdots\right)_\xi [\delta y]_\xi \\
&- \left(\partial_r V - \frac{d\partial_q V}{dx} + \frac{d^2\partial_r V}{dx^2} - \cdots\right)_\alpha [\delta y]_\alpha \\
&+ \left(\partial_q V - \frac{d\partial_r V}{dx} + \cdots\right)_\xi \left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_\xi \\
&- \left(\partial_q V - \frac{d\partial_r V}{dx} + \cdots\right)_\alpha \left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_\alpha \\
&+ \left(\partial_r V - \cdots\right)_\xi \left[\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right]_\xi \\
&- \left(\partial_r V - \cdots\right)_\alpha \left[\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right]_\alpha \\
&+ \cdots \quad . \\
&- \cdots \quad .
\end{aligned}\right\} = 0
$$

(5)

$$
+ \int_\alpha^\xi \left(\partial_r V - \frac{d\partial_p V}{dx} + \frac{d^2\partial_q V}{dx^2} - \frac{d^3\partial_r V}{dx^3} + \cdots\right) \delta y\, dx
$$

als Bedingungsgleichung, welcher durch die gesuchte Beschaffenheit der für y zu wählenden Function $f(x)$ Genüge geleistet werden muß.

Und indem wir jetzt für y und seine Differenzialquotienten $p, q, r \ldots$ in Gedanken die gesuchte Function $f(x)$ so wie die aus ihr abzuleitenden Functionen

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) \qquad \text{u. s. f.}$$

überall in dieser Gleichung substituiren, so daß auch die willkührliche Variation $\delta y = \Omega(x).dt$ jetzt als die Aenderung einer bestimmt geformten Function $f(x)$ aufgefaßt wird: so verwandelt sich das unter dem Integralzeichen in Parenthese befindliche Aggregat offenbar ebenfalls in eine völlig bestimmt zu denkende Function der einzigen Variablen x, welche wir durch $\Psi(x)$ vorstellen können. Hierdurch sind aber die Bedingungen des im vorhergehenden Paragraphen aufgestellten Lehrsatzes herbeigeführt, und wir schließen also auf der Stelle,

erstens daß sämmtliche vor dem Integralzeichen vorausgehenden Glieder des Aggregats (5) einzeln gleich Null sein müßen,

und zweitens, daß auch die eben durch $\Psi(x)$ vorgestellte Function sich identisch auf Null reduciren müße, nämlich daß die Bedingungsgleichung

$$0 = \frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}\frac{dV}{dp} + \frac{1}{dx^2}\frac{dV}{dq} - \cdots \qquad (6)$$

für jeden beliebigen Werth von x durch die gesuchten Functionen $y=f(x)$, $p=f'(x)$, $q=f''(x)$ u. s. f. befriedigt werden müße. Diese letzte Gleichung (6) worin x und y noch als variable Größen auftreten, nennt man daher vorzugsweise die „Gleichung für das Minimum oder Maximum von $\int V dx$" oder auch die Hauptgleichung — sie giebt die Beschaffenheit der gesuchten Curve $y=f(x)$ an, muß aber freilich, insofern die Differenzialquotienten p, q, ... in ihr vorkommen, zunächst integrirt werden.

Die andern vorher gedachten Bedingungsgleichungen dagegen

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dV}{dp}-\frac{1}{dx}d\frac{dV}{dq}+\cdots\right)_\xi[\delta y]_\xi &= 0\\
\left(\frac{dV}{dp}-\frac{1}{dx}d\frac{dV}{dq}+\cdots\right)_\alpha[\delta y]_\alpha &= 0\\
\left(\frac{dV}{dq}-\cdots\right)_\xi\left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_\xi &= 0\\
\left(\frac{dV}{dq}-\cdots\right)_\alpha\left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_\alpha &= 0
\end{aligned} \qquad (7)$$

u. s. f.

welche man die Gränzgleichungen nennt, enthalten keine Variable mehr, sondern nur die Integrationsgränzen α, ξ und einige der durch die Integration der Differenzialgleichung (6) herbeigeführten unbestimmten Constanten, und dienen, je nach der Beschaffenheit der Aufgabe, entweder zur Bestimmung einiger dieser Integrationsconstanten, oder auch zur Ermittelung derjenigen Werthe von $\beta=f(\alpha)$ und $\eta=f(\xi)$, welche am geeignetesten sind die Größe $U=\int_\alpha^\xi V dx$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen.

§. 26.

Wir wählen zur Erläuterung dieser Regeln als erstes Beispiel die Aufgabe, zwischen zwei Punkten A und B die kürzeste Verbindungslinie zu bestimmen, — eine Aufgabe, auf welche wir bereits ganz im Anfange (§. 1 und §. 3) hingewiesen haben, und welche sich auch aus dem Grunde besonders empfiehlt, weil den verschiedenen speciellen Fällen, welche überhaupt bei Aufgaben dieser Art vorkommen können, diesmal die einfachste geometrische Anschaulichkeit eigen ist.

I) Man hat hier $U = \int_a^\xi \sqrt{1+p^2}\, dx$, also

$$V = \sqrt{1+p^2} \qquad \partial_y V = 0 \qquad \partial_p V = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

und $\partial_q V = \partial_r V = \ldots = 0$, daher ist die Hauptgleichung

$$\frac{1}{dx} d. \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 0$$

Die Integration giebt

$$(1) \qquad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = C$$

wobei C eine willkührliche Constante bedeutet, die jedoch <1 gedacht werden muß, weil $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} < 1$ ist. Aus (1) folgt nun weiter

$$\frac{dy}{dx} = p = \pm \frac{C}{\sqrt{1-C^2}}$$

wofür wir schreiben wollen

$$\frac{dy}{dx} = \mathfrak{A}$$

Alsdann liefert uns die zweite Integration

$$(2) \qquad y = \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}$$

worin $\mathfrak{B}$ eine zweite willkührliche Constante bezeichnet. Und wir sind hiermit auf die allgemeine Gleichung einer geraden Linie geführt worden.

II) Wollten wir die Aufgabe dadurch lösen, daß wir, wie in §. 23 bei I) bemerkt worden ist, $\delta V = 0$ setzten, so würden wir erhalten

$$\frac{p \delta p}{\sqrt{1+p^2}} = 0$$

Nun würde man sich aber in Acht zu nehmen haben, geradezu hieraus zu schließen, daß

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 0$$

sein müße. Denn diese Folgerung ist nur dann zuverläßig, wenn $\delta p = \frac{d\delta y}{dx} = \frac{d\Omega(x)}{dx} = \Omega'(x)$ eine ganz willkührliche Function von x vorstellt; und sehr häufig wäre diese Voraussetzung unerlaubt. Wenn z. B. verlangt wird, daß die gesuchte Curve durch zwei gegebene Punkte A, B als Anfangs- und Endpunkt laufen solle, so daß, indem wir (Fig. 1)

$OH = \alpha$, $HA = \beta$, $OK = \xi$, $KB = \eta$ setzen, nicht blos die Abscissen α und ξ, sondern auch die Ordinaten β und η gegeben sind, so erleiden die Größen $[y]_\alpha = \beta$, $[y]_\xi = \eta$ keine Variationen, die Function $\delta y = \Omega(x)$ muß also von solcher Beschaffenheit gedacht werden, daß erstens $\Omega(\alpha)$ und zweitens $\Omega(\xi)$ Null wird, etwa

$$\Omega(x) = (x-\alpha)(\xi-x)\varphi(x)$$

Wollte man nun für $\delta p = \Omega'(x)$ beliebig irgend eine Function von bestimmter Form und mit bestimmten Werthen der darin vorkommenden Constanten setzen, so würde die durch Integration zu erhaltende Function $\Omega(x) = \int \Omega'(x)dx$ trotz der anfügbaren willkührlichen Constanten den erwähnten zwei Bedingungen gleichzeitig zu genügen offenbar nicht im Stande sein.

Unter andern Umständen dagegen können die Bedingungen von Aufgaben dieser Art wirklich gestatten, δp als eine ganz beliebige Function von x zu behandeln. Wenn z. B. blos der Anfangspunkt A $\begin{vmatrix} x=\alpha \\ y=\beta \end{vmatrix}$ gegeben ist, so kann $\delta p = \psi(x)$ beliebig genommen werden, weil sich dabei $\delta y = \int \psi(x)dx$ mit einer unbestimmten Constanten versehen läßt, mittelst deren zu bewirken ist, daß $[\delta y]_\alpha = 0$ werde.

Bei der vorliegenden Aufgabe würde, wenn wir die eben gedachte Voraussetzung zulaßen, die Gleichung $\delta V = 0$ allerdings zu

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = 0$$

führen. Hieraus folgt dann nothwendig $p = 0$, also $y = \text{Const.}$ und die Bedingung, daß die Curve durch den Punkt A laufen soll, verhilft uns zur Bestimmung von Const. nämlich zur Gleichung

$$(3) \qquad y = \beta$$

In der That ist das Perpendikel AQ (Fig. 2) die kürzeste Linie, welche man zu dem in K ($x = \xi$) auf die Abscissenaxe errichteten Perpendikel KL von dem gegebenen Punkte A aus zu ziehen im Stande ist. Dieses Resultat leuchtet von selbst ein, könnte übrigens auch durch die in §. 23 bei I) angestellten Betrachtungen verificirt werden. Denn $V = \sqrt{1+p^2}$ erreicht offenbar sein Minimum $V_0 = 1$ für $p = 0$. Betrachtet man diesen Minimalwerth als Ordinate einer Curve, deren Gleichung wir am angeführten Orte durch $Y = V_0$ vorgestellt haben, so ist

$$U_0 = \int_\alpha^\xi V_0 dx = \int_\alpha^\xi Y dx = \int_\alpha^\xi dx = (\xi - \alpha)$$

ein Rechteck, und hat einen kleinern Inhalt, als jede andere über der Grundlinie $(\xi - \alpha)$ stehende und seitlich von den Parallellinien HI und KL begränzte Figur, deren Höhenlinien größer als 1 wären.

III) Wir kehren aber jetzt zu der allgemeinen Auflösung, nämlich zur Gleichung (2) zurück, welche wir oben als allgemeines Integral der Hauptgleichung

$$0 = \partial_y V - \frac{1}{dx} d\partial_p V + \cdots$$

gefunden hatten. Wenn die zwei Gränzpunkte $A \begin{vmatrix} x=\alpha \\ y=\beta \end{vmatrix}$ und $B \begin{vmatrix} x=\xi \\ y=\eta \end{vmatrix}$ gegeben sind, so werden die beiden Integrationsconstanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sofort durch die Bedingungen

$$\beta = \mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B} \qquad \eta = \mathfrak{A}\xi + \mathfrak{B}$$

bestimmt, und man gelangt hierdurch zu

$$(4) \qquad y - \beta = \frac{\eta - \beta}{\xi - \alpha}(x - \alpha)$$

Was dann weiter die in §. 25 bei (7) aufgestellten Gränzgleichungen

$$\left(\partial_p V - \frac{1}{dx} d\partial_q V + \cdots\right)_\alpha [\delta y]_\alpha = 0$$

$$\left(\partial_p V - \frac{1}{dx} d\partial_q V + \cdots\right)_\xi [\delta y]_\xi = 0$$

$$\left(\partial_q V + \cdots\right)_\alpha [\delta p]_\alpha = 0$$

u. s. w.

anbelangt, so werden die beiden ersten wegen $[\delta y]_\alpha = 0$ und $[\delta y]_\xi = 0$ von selbst erfüllt, die übrigen aber, (worin die Factoren $[\delta p]_\alpha, \ldots$ den in §. 19 III) gegebenen Erläuterungen zu Folge ganz beliebige Größen vorstellen würden) fallen weg, weil in V diesmal kein q, $r \ldots$ enthalten ist.

IV) Wäre blos ein Gränzpunkt, nämlich A, gegeben, so wäre zwar $[\delta y]_\alpha = 0$ aber $[\delta y]_\xi$ von Null verschieden zu denken, also hätte man die einzige Gränzgleichung

$$[\partial_p V]_\xi = 0$$

Da man aber für p jetzt den aus der gefundenen Gleichung (2) fließenden Werth nehmen muß, so wird

$$\partial_p V = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{1+\mathfrak{A}^2}}$$

von x unabhängig. Daher müßte $\mathfrak{A} = 0$ angenommen werden; und wir sind hierdurch zu demselben Resultat gelangt, welches auf anderm Wege in II) gefunden war.

V) Wäre endlich weder der Punkt **B** in der Gränzordinate **KL** noch der Punkt **A** in der Gränzordinate **HI** gegeben, so dürfte weder $[\delta y]_\xi$ noch $[\delta y]_\alpha$ als constant gleich Null gedacht werden. Statt der einzigen so eben in IV) besprochenen Gränzgleichung würde man daher jetzt die zwei erhalten

$$[\partial_p V]_\alpha = 0 \qquad [\partial_p V]_\xi = 0$$

Aber anstatt, daß die beiden Integrationsconstanten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der gefundenen Gleichung (2) durch diese zwei Bedingungen bestimmt würden, sagt jede derselben nur aus, daß $\mathfrak{A} = 0$ genommen werden müße, und läßt $\mathfrak{B}$ unbestimmt. Man kann also den Punkt **A** in **HI** beliebig annehmen, das von ihm auf **KL** gefällte Perpendikel ist jedenfalls eine kürzeste Verbindungslinie. In der That besitzen diese Perpendikel sämmtlich einerlei Länge.

VI) In jedem Falle wird übrigens das gesuchte Minimum U_0 selbst, d. h. die Länge der Verbindungslinie **AB** dadurch gefunden, daß man in $U = \int dx \sqrt{1+p^2}$ für p den aus der Gleichung (2) fließenden Werth $p = \mathfrak{A}$ einsetzt, nämlich

$$U_0 = \sqrt{\mathfrak{A}^2+1} \times \int_\alpha^\xi dx = \sqrt{\mathfrak{A}^2+1}\,(\xi-\alpha)$$

Wäre $\mathfrak{A} = 0$ wie in den unter IV) und V) gedachten Fällen, so hätte man $U_0 = (\xi-\alpha) = \mathbf{HK}$; ist dagegen, wie in dem unter III) besprochenen Falle, $\mathfrak{A}$ von Null verschieden, und führt man aus Gl. (4) den Werth $\mathfrak{A} = \frac{\eta-\beta}{\xi-\alpha}$ ein, so ergiebt sich sogleich $U_0 = \sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2}$ wie es die Natur der Sache verlangt.

§. 27.

Zweite Aufgabe: Diejenige Function $y = f(x)$ zu bestimmen, durch welche

$$U = \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{x}} \sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$$

zu einem Maximum oder Minimum gemacht wird.

I) Man stößt auf diese analytische Untersuchung bei der Behandlung des interessanten und von alten Zeiten her berühmten mechanischen Problems, diejenige Curve zwischen zwei fixen Punkten A und B (Fig. 8) zu ermitteln, auf welcher ein vermöge der Schwerkraft herabfallender Körper die kürzeste Zeit braucht.

Wenn man nämlich durch den tiefer gelegenen Punkt B die Horizontallinie BK, durch den höher gelegenen Punkt A die Vertikallinie AK zieht, und die Höhe von A, nämlich AK, durch ξ, dagegen die Höhe PK eines beliebigen auf der Curve gelegenen Punkts M durch s vorstellt, so besitzt bekanntlich der von A aus herabgefallene Körper in M nach der Richtung der Tangente eine Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g.\mathrm{AP}} = \sqrt{2g(\xi - s)}$$

In dieser Formel bedeutet g die in der Zeiteinheit (Secunde) bei dem freien Fall erlangte Endgeschwindigkeit. Bezeichnet man nun den ganzen Bogen AB durch S und die zugehörige Fallzeit durch T, dagegen den variablen Bogen AM durch s und die zugehörige Zeit durch t, so hat man zu Folge der mechanischen Fundamentalformel $vdt = ds$ sogleich

$$\mathrm{T} = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2g(\xi - s)}}$$

wobei s als Function des Bogens s zu denken wäre. Sobald man aber zur Vereinfachung der Untersuchung die Vertikallinie AK als Abscissenaxe und A zum Ursprung der Coordinaten annimmt, also $(\xi - s) = x$ setzt, so verwandelt sich diese Formel in

$$\mathrm{T} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{x}} \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

und ist also, von dem constanten Factor $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ abgesehen, mit dem oben aufgestellten Integral U einerlei.

II) Nun hat man hier

$$\mathrm{V} = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}} \qquad \frac{d\mathrm{V}}{dy} = 0 \qquad \frac{d\mathrm{V}}{dp} = \frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}} \qquad \frac{d\mathrm{V}}{dq} = \ldots = 0$$

daher ist zu Folge der Gleichung (6) des §. 25 die zu integrirende Differenzialgleichung gegenwärtig

$$\frac{1}{dx} d\left(\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

und hieraus folgt zunächst, daß die Function $\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}}$ einen constanten Werth besitzen müße, welchen wir, da p von der 0ten Dimension, x dagegen lineär ist, durch $\frac{1}{\sqrt{A}}$ vorstellen wollen. Demnach haben wir als erstes Integral

$$(1) \qquad \frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

wobei A einen sogenannten unbestimmten Parameter der Curve angiebt. Hieraus findet man nun weiter

$$(2) \qquad p^2 = \frac{x}{A-x}$$

also $$dy = dx.\sqrt{\frac{x}{A-x}} = \frac{xdx}{\sqrt{Ax-x^2}}$$

und dieses ist die bekannte Differenzialgleichung der Cykloide. Die Integration liefert

$$y = -\sqrt{Ax-x^2} + \tfrac{1}{2}A\int\frac{dx}{\sqrt{Ax-x^2}}$$

d. h.

$$y = B - \sqrt{Ax-x^2} + \tfrac{1}{2}A\,.\,\text{Arc Cos}\left(\frac{A-2x}{A}\right)$$

Die neue Integrationsconstante B wird dadurch bestimmt, daß die Curve durch den Punkt A laufen soll. Da wir diesen zum Ursprung der Coordinaten gewählt haben, so muß für $x=0$ auch $y=0$, also $B=0$ sein. Setzen wir noch

$$(3) \qquad A = 2a$$

so haben wir

$$(4) \qquad y = -\sqrt{2ax-x^2} + a\,\text{Arc Cos}\left(\frac{a-x}{a}\right)$$

also die Gleichung einer Cykloide, welche im Punkte A anfängt, nämlich von der Vertikallinie AK tangirt wird, und durch das Rollen eines Kreises vom Halbmeßer a längs der durch A gezogenen Horizontallinie ANF erzeugt wird.

Dieser Halbmeßer a wäre zu bestimmen aus der Bedingung, daß die Curve durch den andern Gränzpunkt B $\left|\begin{matrix} x = \text{AK} = \xi \\ y = \text{KB} = \eta \end{matrix}\right|$ laufen soll. Ohne

uns jedoch bei der transcendenten Gleichung zwischen a als unbekannter und ξ, η als gegebenen Größen aufzuhalten, wird es hinreichen zu bemerken daß, wie groß auch AK und KB sein mögen, sich doch immer eine in A anfangende und durch B hindurchlaufende Cykloide wird construiren laßen. Dabei würde der Punkt B, wenn zufällig $KB = \pi.(\frac{1}{2}AK)$ wäre, den Scheitel der Curve bilden.

III) Was die Gränzgleichungen anbelangt, so reduciren sich dieselben gegenwärtig auf

$$\left(\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}}\right)_\xi [\delta' y]_\xi = 0$$

$$\left(\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}}\right)_0 [\delta' y]_0 = 0$$

von welchen überdies die zweite wegfällt, weil alle variirenden Curven durch den fixen Anfangspunkt A $\left|\begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix}\right|$ laufen sollen, also $[\delta' y]_0$ Null sein soll.

In Betreff der anderen Gränzgleichung aber haben wir hier, gerade wie auch bei der Aufgabe des vorigen §., die zwei Fälle zu unterscheiden, daß in der Linie KB der Endpunkt B entweder fest gegeben ist, oder variabel gedacht und so bestimmt werden soll, daß U den möglich kleinsten Werth erhalte. Bei ersterer Voraussetzung ist auch $[\delta' y]_\xi = 0$, und es bleibt also keine Bedingungsgleichung, aber auch keine unbestimmte Größe mehr übrig. Im andern Fall aber wäre, wie in der Aufgabe des vorigen §. bei IV), $[\delta' y]_\xi$ von Null verschieden zu denken, und es müßte also der Werth, welchen die Function $\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}}$ erhält, sobald man für p den aus der gefundenen Gleichung (4) fließenden Werth einführt und dann $x = \xi$ setzt, gleich Null ausfallen. Nun ist aber zu Folge unserer obigen Differenzialgleichung (1)

$$\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

und dieser Ausdruck, welcher weder ξ noch $\eta = KB$ enthält, kann offenbar nicht anders verschwinden, als durch die Annahme $a = \infty$. Es fragt sich daher, was aus der gefundenen Cykloide wird, wenn der Halbmeßer des Wälzungskreises in's Unendliche wächst?

Die gefundene Gleichung (4) giebt, wenn man sie auf die Form

$$(5) \qquad y = \frac{-\sqrt{2\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}} + \operatorname{Arc\,Cos}\left(1 - \frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a}\right)}$$

bringt, und dann a in's Unendliche wachsen läßt, den unbestimmten Werth $y = \frac{0}{0}$. Um die eigentliche Bedeutung hiervon zu erfahren, setzen wir $\frac{x}{a} = s$, also

$$y = \frac{-\sqrt{2s - s^2} + \operatorname{Arc\,Cos}(1 - s)}{\frac{1}{x} \cdot s}$$

und bestimmen den Werth, welchen dieser Ausdruck für $s = 0$ und beliebiges x erhält, nach der bekannten Methode. Der in Beziehung auf die Variable s genommene Differenzialquotient des Zählers ist

$$\frac{-1+s}{\sqrt{2s - s^2}} + \frac{1}{\sqrt{2s - s^2}} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2 - s}}$$

und wird Null für $s = 0$. Der Differenzialquotient des Nenners dagegen ist $\frac{1}{x}$, und reducirt sich nicht auf Null. Und deshalb ist die Gleichung (5) oder (4), sobald $a = \infty$ werden soll, gleichbedeutend mit

$$y = 0$$

d. h. die Cykloide fällt mit der Vertikallinie AK zusammen.

Hierdurch ist die oben vorgelegte Frage beantwortet, wohin man in der Ordinatenlinie KB den Endpunkt B zu verlegen habe, damit U möglichst klein, nämlich die Fallzeit möglichst kurz werde. Die Gleichung $y = 0$ lehrt nämlich, daß $KB = \eta$ gleich Null zu nehmen sei, — ein Resultat, dessen Richtigkeit in die Augen fällt, da in der That kein Grund denkbar ist, warum man einen Körper, welcher von A bis zu der Horizontallinie KB möglichst rasch fallen soll, aus der Vertikallinie AK entfernen sollte.

IV) Schließlich wollen wir auch dieses Mal noch einen Blick auf das Ergebnis werfen, das man aus der Gleichung $\delta V = 0$ gewonnen haben würde, von welcher im §. 23 bei I) geredet worden ist. Auf diese Weise würden wir nämlich erhalten haben

$$\frac{dV}{dp} \cdot \delta p = \frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}} \delta p = 0$$

uns jedoch bei der transcendenten Gleichung zwischen a als unbekannter und ξ, η als gegebenen Größen aufzuhalten, wird es hinreichen zu bemerken daß, wie groß auch AK und KB sein mögen, sich doch immer eine in A anfangende und durch B hindurchlaufende Cykloide wird construiren laßen. Dabei würde der Punkt B, wenn zufällig $KB = \pi.(\frac{1}{2}AK)$ wäre, den Scheitel der Curve bilden.

III) Was die Gränzgleichungen anbelangt, so reduciren sich dieselben gegenwärtig auf

$$\left(\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}}\right)_\xi . [\delta' y]_\xi = 0$$

$$\left(\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}}\right)_0 . [\delta' y]_0 = 0$$

von welchen überdies die zweite wegfällt, weil alle variirenden Curven durch den fixen Anfangspunkt A $\begin{vmatrix} x=0 \\ y=0 \end{vmatrix}$ laufen sollen, also $[\delta' y]_0$ Null sein soll.

In Betreff der anderen Gränzgleichung aber haben wir hier, gerade wie auch bei der Aufgabe des vorigen §., die zwei Fälle zu unterscheiden, daß in der Linie KB der Endpunkt B entweder fest gegeben ist, oder variabel gedacht und so bestimmt werden soll, daß U den möglich kleinsten Werth erhalte. Bei ersterer Voraussetzung ist auch $[\delta' y]_\xi = 0$, und es bleibt also keine Bedingungsgleichung, aber auch keine unbestimmte Größe mehr übrig. Im andern Fall aber wäre, wie in der Aufgabe des vorigen §. bei IV), $[\delta' y]_\xi$ von Null verschieden zu denken, und es müßte also der Werth, welchen die Function $\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}}$ erhält, sobald man für p den aus der gefundenen Gleichung (4) fließenden Werth einführt und dann $x = \xi$ setzt, gleich Null ausfallen. Nun ist aber zu Folge unserer obigen Differenzialgleichung (1)

$$\frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

und dieser Ausdruck, welcher weder ξ noch $\eta = KB$ enthält, kann offenbar nicht anders verschwinden, als durch die Annahme $a = \infty$. Es fragt sich daher, was aus der gefundenen Cykloide wird, wenn der Halbmeßer des Wälzungskreises in's Unendliche wächst?

Die gefundene Gleichung (4) giebt, wenn man sie auf die Form

$$(5) \qquad y = \frac{-\sqrt{2\frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}} + \operatorname{Arc\,Cos}\left(1 - \frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{1}{a}\right)}$$

bringt, und dann a in's Unendliche wachsen läßt, den unbestimmten Werth $y = \frac{0}{0}$. Um die eigentliche Bedeutung hiervon zu erfahren, setzen wir $\frac{x}{a} = s$, also

$$y = \frac{-\sqrt{2s - s^2} + \operatorname{Arc\,Cos}(1 - s)}{\frac{1}{x} \cdot s}$$

und bestimmen den Werth, welchen dieser Ausdruck für $s = 0$ und beliebiges x erhält, nach der bekannten Methode. Der in Beziehung auf die Variable s genommene Differenzialquotient des Zählers ist

$$\frac{-1+s}{\sqrt{2s - s^2}} + \frac{1}{\sqrt{2s - s^2}} = \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{2 - s}}$$

und wird Null für $s = 0$. Der Differenzialquotient des Nenners dagegen ist $\frac{1}{x}$, und reducirt sich nicht auf Null. Und deshalb ist die Gleichung (5) oder (4), sobald $a = \infty$ werden soll, gleichbedeutend mit

$$y = 0$$

d. h. die Cykloide fällt mit der Vertikallinie AK zusammen.

Hierdurch ist die oben vorgelegte Frage beantwortet, wohin man in der Ordinatenlinie KB den Endpunkt B zu verlegen habe, damit U möglichst klein, nämlich die Fallzeit möglichst kurz werde. Die Gleichung $y = 0$ lehrt nämlich, daß $KB = \eta$ gleich Null zu nehmen sei, — ein Resultat, dessen Richtigkeit in die Augen fällt, da in der That kein Grund denkbar ist, warum man einen Körper, welcher von A bis zu der Horizontallinie KB möglichst rasch fallen soll, aus der Vertikallinie AK entfernen sollte.

IV) Schließlich wollen wir auch dieses Mal noch einen Blick auf das Ergebnis werfen, das man aus der Gleichung $\delta V = 0$ gewonnen haben würde, von welcher im §. 23 bei I) geredet worden ist. Auf diese Weise würden wir nämlich erhalten haben

$$\frac{dV}{dp} \cdot \delta p = \frac{p}{\sqrt{x}\sqrt{1 + p^2}} \delta p = 0$$

Hieraus aber zu schließen, daß der Coefficient von δp gleich Null sein müße, wäre wieder nur dann erlaubt, wenn der Endpunkt B der gesuchten Curve nicht ebenso bestimmt, wie ihr Anfangspunkt A gegeben wäre, aus den in dem vorhergehenden §. bei II) auseinandergesetzten Gründen. Ist diese Voraussetzung aber die richtige, so ergiebt sich gerade wie im vor. §.

$$p = 0 \qquad y = \text{Const.}$$

und weil für den Anfangspunkt A sowohl $x = 0$ als $y = 0$ sein soll, auch Const. $= 0$. Daher würde man auf die nämliche Auflösung zurückkommen, welche wir für einen variablen Endpunkt B so eben bei III) gefunden haben. In der That wird aber die Gerade $y = 0$ nicht blos das Integral $U = \int_a^\xi V dx = \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{x}} \sqrt{1+p^2}$, sondern auch die Function $V = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x}}$ zu einem Minimum machen.

§. 28.

Sobald durch die Integration der Gleichung (6) des §. 25 die Natur der Curve $y = f(x)$ aufgefunden worden ist, welche das Integral $\int V dx$ zu einem Maximum oder Minimum macht, und wenn wir uns die in $f(x)$ enthaltenen willkührlichen Integrationsconstanten bereits so bestimmt denken, daß die Curve den übrigen an sie gestellten Forderungen, z. B. durch zwei gegebene Punkte A und B hindurchzulaufen, Genüge leistet; so läßt sich die Untersuchung, ob man ein Maximum oder ein Minimum entdeckt habe, mit Vermeidung der etwas weitläuftigen und ungefügigen Formel für $\delta^2 \int_a^\xi V dx = \int_a^\xi \delta^2 V . dx$, häufig mittelst des folgenden Verfahrens, das wir dem in §. 14 III) angewendeten nachbilden, ohne große Mühe durchführen.

I) Wenn man nämlich wieder, wie dort, die Binome $y + \nu y$, $p + \nu p$, $q + \nu q$ u. s. f. in die gegebene Function $V = F(x, y, p, q \ldots)$ einführt, wobei aber jetzt y die gefundene Function $f(x)$ und p, $q \ldots$ die daraus zu derivirenden Functionen $f'(x)$, $f''(x) \ldots$ bedeuten, —

wenn man alsdann die auf diese Weise umgestaltete Function $V_0 + \nu V_0$ mit Hülfe der in der Analysis gelehrten Methoden so entwickelt, daß zuvörderst die Bestandtheile gesetzt werden, welche in Beziehung

auf die Variationen νy, νp, ... von der 0ten Dimension sind und also einen Ausdruck $\mathfrak{F}(x) = V_0$ bilden, — daß man hierauf die Bestandtheile, welche in Beziehung auf die genannten Variationen von der ersten Dimension sind, in einem Aggregat $= \Xi_1$ zusammenfaßt, und dann in einem dritten Aggregat $= \Xi_2$ die Glieder von der zweiten Dimension zusammen begreift;

und wenn man alsdann alles mit dx multiplicirt und das erhaltene Trinom

$$(1) \qquad \mathfrak{F}(x)dx + \Xi_1 dx + \Xi_2 dx$$

innerhalb der Gränzen $x = \alpha$ bis $x = \xi$ integrirt: so wird offenbar das erste Glied des entstehenden Trinoms den Werth von U_0 angeben, welcher dem gefundenen $y = f(x)$ oder was das Nämliche ist, dem Werthe $t = 0$ des Variationsarguments entspricht, das zweite Glied aber, nämlich $\int_\alpha^\xi \Xi_1 dx$ muß sich zu Folge der Bedingung $\delta U = 0$ auf Null reduciren, was übrigens gleich hernach (in III) noch besonders beleuchtet werden soll. Daher kommt es nur auf die Untersuchung des dritten Gliedes $\int_\alpha^\xi \Xi_2 dx$ an; je nachdem dieses $\left|\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right|$ ist und nicht etwa verschwindet oder unendlich ausfällt, wird U_0 ein $\left|\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right|$ sein. Nun können wir aber sagen, das Integral $\int_\alpha^\xi \Xi_2 dx$ erhalte einen $\left|\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}\right|$ Werth, wenn das unter dem Integralzeichen befindliche Element $\Xi_2 dx$ für die innerhalb des Integrationsintervalls $x = \alpha$ bis $x = \xi$ liegenden Werthe der Independenten fortwährend $\left|\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right|$ ausfällt, und Ξ_2 nicht etwa unendlich wird, da wir ein zwischen bestimmten Gränzen genommenes Integral immer als eine Summe unzählig vieler Elemente ansehen, die dasselbe Vorzeichen besitzen wird, welches allen diesen Elementen zukam*). Und obwohl in

*) Es könnte nur bei oberflächlicher Betrachtung scheinen, als wenn ein positives Differenzial z. B. $\frac{1}{x^2}dx$ ein negatives Integral $-\frac{1}{x}$ liefern könnte, (insofern man nämlich x als positive Größe ansehen wollte). Denn das allgemeine Integral $\int\frac{dx}{x^2} = C - \frac{1}{x}$ kann wegen der unbestimmten Constanten C keineswegs für etwas

Ξ_2 die ganz willkührliche Variation νy und der eine oder andere ihrer Differenzialquotienten

$$\nu p = \frac{d\nu y}{dx} \qquad \nu q = \frac{d^2\nu y}{dx^2} \qquad \nu r = \frac{d^3\nu y}{dx^3} \quad \cdots$$

enthalten sein mag, so wird man dennoch nach den in §. 14 unter III) entwickelten Principien, oder auch mit Hülfe der später in IV) zu erklärenden Transformationen, bald schließen können daß Ξ_2 einen positiven, bald daß es einen negativen Werth besitze.

II) Die hier gedachte Größe $\int_a^\xi \Xi_1 dx$ ist zwar weder identisch mit $\delta U = \int_a^\xi \delta V dx$ noch mit $\delta U.\frac{\tau}{1}$ und ebenso wenig sind $\int_a^\xi \Xi_2 dx$ und $\delta^2 U \frac{\tau^2}{1.2} = \frac{1}{2}\tau^2 \int_a^\xi \delta^2 V dx$ ganz gleichbedeutend, indessen findet zwischen diesen Größen paarweise ein solcher Zusammenhang Statt, daß man anstatt der drei ersten Glieder des in §. 23 aufgestellten Ausdrucks für den variirten Werth von U nämlich

$$(2) \qquad U_0 + \nu U_0 = U_0 + \delta U \frac{\tau}{1} + \delta^2 U \frac{\tau^2}{1.2} + \delta^3 U \frac{\tau^3}{1.2.3} + \cdots$$

sich wirklich an das Trinom (1) halten darf, weil diejenigen Bestandtheile, wodurch sich $\delta U.\tau + \frac{1}{2}\delta^2 U.\tau^2$ von $\int \Xi_1 dx + \int \Xi_2 dx$ unterscheidet, bei den in Betrachtung zu ziehenden kleinsten Werthen von τ auf die Entscheidung der Frage, ob νU_0 eine positive oder negative Größe sei, keinen Einfluß auszuüben im Stande sind.

Negatives ausgegeben werden, und das bestimmte Integral $\int_\alpha^\xi \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\xi}$ ist positiv, wenn außer der Bedingung $\xi > \alpha$ auch, wie eben angenommen wurde, sowohl die obere Integrationsgränze ξ, als die untere α einen positiven Werth besitzt. — Freilich wenn man hier α negativ und ξ positiv nehmen wollte, würde $\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\xi}$ einen negativen Werth erhalten. Allein dann würde auch die mit dx multiplicirte Function $\frac{1}{x^2}$ für den innerhalb des Integrationsintervalls liegenden Werth $x = 0$ unendlich ausfallen, und wo dieser Fall eintritt, darf man bekanntlich den Betrag des bestimmten Integrals nicht ohne genauere Prüfung dadurch finden wollen, daß man in dem allgemeinen (unbestimmten) Integrale das eine Mal $x = \xi$, das andere Mal $x = \alpha$ setzt, und das Ergebnis der letzten Substitution von dem der ersteren subtrahirt.

Denn um zu den in §. 8 und §. 9 angestellten Betrachtungen zurückzukehren und demgemäß $U_0 + \nabla U_0$ nach den Potenzen von τ zu entwickeln, hätte man zunächst für ∇y die Reihe $\delta y.\tau + \frac{1}{2}\delta^2 y.\tau^2 + \cdots$ einzusetzen. Darin stellen δy, $\delta^2 y$ zwei ganz willkührliche und von einander unabhängige, in §. 9 durch $\Omega(x)$, $\Psi(x)$ bezeichnete Functionen von x vor, deren Differenzialquotienten wir durch $\Omega'(x)$, $\Omega''(x)$, .. $\Psi'(x)$, $\Psi''(x)$, .. anzeigen wollen. Dann ist also

$$\begin{aligned} y + \nabla y &= f(x) + \Omega(x).\tau + \tfrac{1}{2}\Psi(x).\tau^2 + \cdots \\ p + \nabla p &= f'(x) + \Omega'(x).\tau + \tfrac{1}{2}\Psi'(x).\tau^2 + \cdots \\ q + \nabla q &= f''(x) + \Omega''(x).\tau + \tfrac{1}{2}\Psi''(x).\tau^2 + \cdots \end{aligned}$$

u. s. f. und wenn man jetzt diese geänderten Werthe an die Stelle von $y, p, q, \ldots$ in die gegebene Function $V = F(x, y, p, q \ldots)$ substituirt, den dadurch erhaltenen variirten Werth $V + \nabla V$ nach Potenzen von τ entwickelt, dann mit dx multiplicirt und endlich innerhalb der Gränzen $x = \alpha$, $x = \xi$ integrirt: so würde man zu der durch (2) vorgestellten Form von $U_0 + \nabla U_0$ gelangen. Da wir aber in Ξ_1 alle mit den ersten Potenzen von ∇y, ∇p, $\nabla q \ldots$ behafteten Bestandtheile des variirenden Werths $V + \nabla V$ zusammengefaßt haben, so ist ersichtlich, daß in Ξ_1 bereits diejenigen mit dem Factor $\frac{\tau^2}{1.2}$, $\frac{\tau^3}{1.2.3}$, u. s. f. versehenen Glieder vorhanden sein werden, welche innerhalb der ersten Potenzen der endlichen Variationen ∇y, ∇p, ∇q enthalten sind, und welche bei der eben erklärten anderen Entwickelungsweise erst in $\delta^2 U \frac{\tau^2}{1.2}$, $\delta^3 U \frac{\tau^3}{1.2.3}$ u. s. f. unterzubringen sein würden. Sobald nun erwiesen werden kann, daß $\int_\alpha^\xi \Xi_1 dx$ gleich Null ist, so fallen die hier gedachten Bestandtheile von selbst aus dem variirenden Werthe von U fort; man hat dann nur zu betrachten

$$(3) \qquad U_0 + \nabla U_0 = U_0 + \int_\alpha^\xi \Xi_2 dx + \cdots$$

und der Umstand, daß die gedachten mit $\frac{1}{2}\tau^2$ behafteten Glieder in diesem Ausdrucke für $U_0 + \nabla U_0$ nicht mehr sichtbar sind, gereicht uns zum Vortheil, denn dadurch wird derselbe einfacher als der Ausdruck $U_0 + \frac{1}{2}\delta^2 U.\tau^2$, worin nicht blos die willkührliche Function $\Omega(x)$ nebst den Derivationen $\Omega'(x)$, $\Omega''(x)$ u. s. f., sondern auch noch eine zweite, mit $\Omega(x)$ in gar keinem Zusammenhang stehende willkührliche Function $\Psi(x)$ nebst ihren Differenzialquotienten $\Psi'(x)$, $\Psi''(x)$, u. s. f. vorkommen würde, und von

welchem sich deshalb nur mühseliger entscheiden läßt, ob er einen positiven oder einen negativen Werth besitze.

III) Daß aber $\int_\alpha^\xi \Xi_1 dx$ verschwinden müße, läßt sich durch folgende Betrachtung nachweisen. Man konnte nämlich die in I) gedachte Entwickelung von $V+\nabla V = F(x, y+\nabla y, p+\nabla p, q+\nabla q, \ldots)$ mittelst des Taylor'schen Lehrsatzes ausführen, und würde dadurch erhalten haben

$$\int_\alpha^\xi \Xi_1 dx = \int_\alpha^\xi \left[\frac{dV}{dy}\nabla y + \frac{dV}{dp}\nabla p + \frac{dV}{dq}\nabla q + \frac{dV}{dr}\nabla r + \cdots\right] dx$$

$$= \int_\alpha^\xi \left[\frac{dV}{dy}\nabla y + \frac{dV}{dp}\frac{d\nabla y}{dx} + \frac{dV}{dq}\frac{d^2\nabla y}{dx^2} + \frac{dV}{dr}\frac{d^3\nabla y}{dx^3} + \cdots\right] dx$$

Sobald man nun hier die nämlichen, auf dem theilweisen Integriren beruhenden Transformationen vornimmt, wie in §. 23 unter II) so sieht man, da weiter kein Unterschied Statt findet, als daß gegenwärtig überall die endliche Variation ∇y auftritt, wo dort der Variationsquotient δy stand, auf der Stelle ein, daß man zu $\int_\alpha^\xi \Xi_1 dx =$

$$\left(\partial_p V - \frac{d\partial_q V}{dx} + \cdots\right)_\xi [\nabla y]_\xi - \left(\partial_p V - \frac{d\partial_q V}{dx} + \cdots\right)_\alpha [\nabla y]_\alpha$$
$$+ \left(\partial_q V - \cdots\right)_\xi \left[\frac{d\nabla y}{dx}\right]_\xi \qquad - \left(\partial_q V - \cdots\right)_\alpha \left[\frac{d\nabla y}{dx}\right]_\alpha$$
$$+ \cdots \qquad\qquad - \cdots$$
$$+ \int_\alpha^\xi \left(\partial_y V - \frac{d\partial_p V}{dx} + \frac{d^2\partial_q V}{dx^2} - \frac{d^3\partial_r V}{dx^3} + \cdots\right)\nabla y dx$$

gelangen wird. Und da hier die letzte, in Parentheſe unter dem Integralzeichen stehende Function zu Folge der Bedingungsgleichung (6) des §. 25 gleich Null ist, — da ferner, wenn ein fixer Punkt B ($x=\xi$, $y=\eta$) gegeben ist, durch welchen die gefundene Curve $y=f(x)$ laufen soll, nicht blos $[\delta y]_\xi$, sondern auch die endliche Variation $[\nabla y]_\xi$ verschwindet, während im entgegengesetzten Falle der in der ersten Parentheſe stehende Coefficient

$$\left(\frac{dV}{dp} - \frac{1}{dx}\frac{dV}{dq} + \cdots\right)$$

durch die für η, ξ und die Integrationsconstanten zu setzenden Werthe,

wie in §. 26 III) und §. 27 III) bereits erläutert wurde, auf Null reducirt werden muß, — u. s. f. so folgert man, daß $\int_{\alpha}^{\xi} \Xi_1 dx = 0$ sei.

IV) Das so eben gebrauchte theilweise Integriren wird sich häufig mit dem besten Erfolg auch bei der Untersuchung über die Beschaffenheit des dritten Gliedes unseres obigen Trinoms (1) anwenden laßen. Denn wäre z. B. $\Xi_2 = \delta y^2 + \psi(x)\delta y \delta p$

wobei $\psi(x)$ eine gegebene Function andeutet, so würde man erhalten

$$\int \Xi_2 dx = \int \delta y^2 dx + \int \psi(x)\delta y d\delta y = \int \delta y^2 dx + \tfrac{1}{2}\int \psi(x) d(\delta y^2)$$

$$= \tfrac{1}{2}\psi(\xi)[\delta y^2]_{\xi} - \tfrac{1}{2}\psi(\alpha)[\delta y^2]_{\alpha} + \int_{\alpha}^{\xi} [1 - \tfrac{1}{2}\psi'(x)]\delta y^2 dx$$

was sich, wenn $[\delta y]_{\xi}$ und $[\delta y]_{\alpha}$ zu Folge der Bedingungen der Aufgabe verschwinden, auf

$$\int_{\alpha}^{\xi} [1 - \tfrac{1}{2}\psi'(x)]\delta y^2 dx$$

reducirt, und viel leichter, ob es positiv oder negativ sei, beurtheilen läßt, als in der ursprünglichen Gestalt.

§. 29.

Wir wollen nun versuchen, nach den hier entwickelten Regeln zu entscheiden, ob die in §. 27 untersuchte Function

$$U = \int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{x}} \sqrt{1 + p^2}$$

durch die in demselben §. unter (4) gefundene Cykloide zu einem Maximum oder Minimum gemacht wird.

I) Man erhält zunächst

$$V + \delta V = \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{[(1 + p^2) + 2p\delta p + \delta p^2]}$$

und dieser Ausdruck, nach dem polynomischen oder dem Taylor'schen Lehrsatze entwickelt, verwandelt sich in

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\left[(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{p}{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}\delta p + \tfrac{1}{2}\frac{1}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}\delta p^2 + \cdots\right]$$

daher wird (gemäß dem im vor. §. unter III) Gesagten)

$$U + \delta U = \int_0^{\xi} \frac{1}{\sqrt{x}}(1 + p^2)^{\frac{1}{2}} dx + \tfrac{1}{2}\int_0^{\xi} \frac{\delta p^2 dx}{\sqrt{x}.(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}} + \cdots$$

Hierin wäre nun freilich für $\sqrt{1+p^2}$ der aus der Gleichung der Curve fließende Werth zu setzen, jedenfalls aber erhält die unter dem zweiten Integralzeichen befindliche mit dx multiplicirte Function einen positiven Werth, denn die Radikalien $\sqrt{x}$ und $\sqrt{1+p^2}$, welche hier vorkommen, müßen natürlich während des Verlaufs der ganzen Rechnung mit demjenigen Vorzeichen genommen werden, welches sie in der ursprünglich vorgelegten Formel

$$U = \int_0^{\xi} \frac{1}{\sqrt{x}} dx . \sqrt{1+p^2}$$

besaßen, sind also gegenwärtig an und für sich als positive Größen zu denken. Und deshalb ist also

$$(6) \qquad \Xi_2 = \frac{\sqrt{p^2}}{\sqrt{x}(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}$$

eine positive Größe, mithin auch das Integral $\int_0^{\xi} \Xi_2 dx$. Zwar würde für $x=0$ die Function Ξ_2 unendlich, allein das Integral von $\Xi_2 dx$ ist dessen ungeachtet endlich, gerade wie z. B. $\int_0^{\xi} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ den endlichen und mit $\frac{1}{\sqrt{x}}$ im Vorzeichen übereinstimmenden Werth $2\sqrt{\xi}$ erhält, obwohl für $x=0$ die mit dx multiplicirte Function unendlich wird.*) In der That da p als trigonometrische Tangente des Winkels, unter welchem die Tangente der Curve gegen die Axe der X geneigt ist, eine absolute Zahl vorstellt, so werden wir unter $\sqrt{p}$ einen beliebigen aber kleinen Bruch zu denken haben; also ist während des ganzen Integrationsintervalls $\frac{\sqrt{p^2}}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} < 1$ d. h. $\Xi_2 < \frac{1}{\sqrt{x}}$ woraus sogleich folgt, daß $\int_0^{\xi} \Xi_2 dx$ kleiner als $\int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ d. h. $< 2\sqrt{\xi}$ sei.

*) Man wird hierbei an die Quadraturen der asymptotischen Räume bei den Hyperbeln höherer Ordnung $y^n = \frac{A}{x^m}$ denken, für welche bekanntlich, falls $n > m$ ist, die Formel $\int_0^{\xi} y dx$ endliche Werthe liefert, obwohl die Ordinate für $x=0$ unendlich wird.

Da also der Zuwachs $\delta U_0 = \int_0^\xi \Xi_2 dx$ einen positiven Werth besitzt, so ist nachgewiesen, daß die Function

$$U = \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{x}} \sqrt{1+p^2}$$

durch die in §. 27 bei (4) gefundene Gleichung in der That zu einem Minimum gemacht wird, und daß also mit Rücksicht auf die in §. 27 bei I) gegebenen Erläuterungen die Cykloide AB zwischen den gegebenen Punkten A und B (Fig. 8) mit Recht die „Linie des raschesten Falls" (Brachistochrona) genannt wird.

II) So bequem übrigens auf dem hier betretenen Wege die Entscheidung über ein Maximum oder Minimum gewesen ist, so beschwerlich würde sie trotz der Einfachheit der Function V geworden sein, wenn wir darauf ausgegangen wären, wie im vorigen §. bei II) angedeutet worden ist, $U_0 + \delta U_0$ nach Potenzen von τ in

$$U_0 + \delta^{(1)} U.\tau + \tfrac{1}{2}\delta^{(2)} U.\tau^2 + \cdots$$

zu entwickeln. Denn indem wir $p + \Omega'(x).\tau + \frac{1}{2}\Psi'(x).\tau^2$ an die Stelle von p treten laßen, erhalten wir

$$V + \delta V = \frac{1}{\sqrt{x}} \sqrt{\left[(1+p^2) + 2p\Omega'(x).\tau \begin{matrix} + \Omega'(x)^2 \\ + p\Psi'(x) \end{matrix}\right\} \tau^2 + \cdots]}$$

und dies nach dem polynomischen Lehrsatze bis zur zweiten Potenz von τ entwickelt giebt

$$V + \delta V = \frac{1}{\sqrt{x}} \left\{ \sqrt{1+p^2} + \frac{p\Omega'(x)}{\sqrt{1+p^2}}.\tau + \begin{matrix} \frac{1}{2}\dfrac{\Omega'(x)^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \\ + \frac{1}{2}\dfrac{p\Psi'(x)}{\sqrt{1+p^2}} \end{matrix} \right\} \tau^2 + \cdots \Bigg\}$$

daher

$$\delta U_0 = \tau \int_0^\xi \frac{p\Omega'(x)dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}} + \tfrac{1}{2}\tau^2 \int_0^\xi \left(\frac{\Omega'(x)^2}{1+p^2} + p\Psi'(x) \right) \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+p^2}} + \cdots$$

wo nun allerdings das erste Glied, weil es gleichbedeutend mit $\tau \int_0^\xi \partial_p V \delta p dx = \tau \int_0^\xi \delta V dx$ ist, zu Folge der ursprünglichen Bedingung $\int_0^\xi \delta V dx = 0$ verschwindet, wo aber die Beurtheilung des olgenden Gliedes

durch das Auftreten der Function $\Psi'(x) = \frac{d\delta^2 y}{dx}$ gehindert wird, welche von $\Omega'(x) = \frac{d\delta y}{dx}$ gänzlich unabhängig ist.

III) Die Größe U_0, welche das Minimum von U abgiebt, wird jetzt gefunden, sobald man in $\int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{x}} \sqrt{1+p^2}$ für p den Werth aus der Gleichung (4) des §. 27 einführt. Da der Gleichung (2) desselben §. zu Folge

$$p^2 = \frac{x}{A-x} = \frac{x}{2a-x} \qquad \text{also} \qquad 1+p^2 = \frac{2a}{2a-x}$$

ist, so hat man

$$U_0 = \int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{x}} \sqrt{\frac{2a}{2a-x}} = \sqrt{2a} \int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

d. h. (7) $$U_0 = \sqrt{2a}.\,\text{Arc Cos}\left(1 - \frac{\xi}{a}\right)$$

Diese Resultate zusammenfaßend können wir daher, mit Rücksicht auf die in §. 27 bei I) angestellten Betrachtungen aussagen: auf dem Bogen einer Cykloide, welche in dem höher gelegenen Punkte A ihren Anfangspunkt hat, so daß ihre Basis eine durch A zu ziehende Horizontallinie ist, bewegt sich vermöge der Schwerkraft ein Körper nach dem um die Größe ξ tiefer liegenden, übrigens beliebig gegebenen Punkte B in kürzerer Zeit, als auf irgend einer anderen Curve AB; und diese Fallzeit ist nach der Formel

$$(8) \qquad \sqrt{\frac{a}{g}}.\,\text{Arc Cos}\left(1 - \frac{\xi}{a}\right)$$

in Sekunden zu berechnen, wobei a den mit derselben Einheit wie g gemeßenen Radius des Wälzungskreises bedeutet. — Es liegt der Gedanke nahe, diese Zeit mit derjenigen zu vergleichen, welche bei der gewöhnlichen kreisförmigen Pendelschwingung erforderlich ist. Da aber die Formel für die Zeitdauer einer solchen kreisförmigen Bewegung nur dann bequem genug wird, wenn man den sich bewegenden Körper bis zum tiefsten Punkt G (Fig. 8) herabsteigen läßt, an welchem die Tangente horizontal läuft, und da andererseits die Brachistochrone verlangt, daß in dem Anfangspunkt der Bewegung die Tangente vertikal liege, während da-

gegen die Zeit, welche ein Körper zum Durchlaufen des cykloidischen Bogens BG nöthig hat, wenn die beschleunigte Bewegung in B anfangen soll, keineswegs kürzer zu sein braucht, als die zum Durchlaufen eines Kreisbogens BG erforderliche Zeit: so wollen wir uns darauf beschränken die Zeitdauer der cykloidischen Bewegung vom Anfangspunkt A bis zum Scheitelpunkt G zu vergleichen mit der Zeit, welche bei dem Durchlaufen eines durch A und G zu legenden Kreisbogens verstreicht.

Die bekannte Formel für die halbe Pendelschwingung giebt, weil die zu durchfallende Höhe hier $FG = 2a$ ist,

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}\cdot\left[1+(\tfrac{1}{2})^2\left(\frac{a}{L}\right)+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{a}{L}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{a}{L}\right)^3+\cdots\right]$$

wobei L die Pendellänge, d. h. den Halbmeßer des zu durchlaufenden Bogens bedeutet; man erhält die Zeitdauer in Sekunden, insofern bei der Ausmeßung von g die Secunde als Zeiteinheit angenommen wurde. Nun ist aber augenscheinlich

$$L^2 = \overline{AD}^2 = \overline{AF}^2 + (L - FG)^2 = \pi^2 a^2 + (L - 2a)^2$$

also $4La = (\pi^2 + 4)a^2$ $\qquad \frac{a}{L} = \frac{4}{4+\pi^2} = 0{,}2884004$

und wenn man daher von der in Parenthese befindlichen unendlichen Reihe blos die ersten Glieder berechnet, so ergiebt sich

$$\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{L}{g}}[1+0{,}07210+0{,}01169+0{,}00234+0{,}00052+0{,}00012+\cdots]$$

woraus zu ersehen ist, daß die ganze Zeitdauer größer ist als

$$(9) \qquad \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\cdot 1{,}086$$

Macht man dagegen in der Formel (8) $\xi = 2a$, so erhält man

$$(10) \qquad \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

welches einerlei mit $\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\cdot 2\sqrt{\frac{a}{L}} = \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\cdot 1{,}074$ also merklich kleiner als (9) ist.*)

---

*) Die Cykloide besitzt übrigens auch noch die merkwürdige mechanische Eigenschaft, daß wenn die beschleunigte Bewegung in B ihren Anfang nehmen soll, die zum Durchlaufen des Bogens BG erforderliche Zeit immer die nämliche bleibt, wie wir sie so eben in (10) gefunden haben, gleichviel wie groß $AK = \xi$ angenommen wird. Denn in diesem Falle hat man es zu Folge der in

§. 30.

Die sogenannte Hauptgleichung für das Maximum oder Minimum von $\int V dx$ nämlich

$$(1) \qquad \partial_y V - \frac{d\partial_p V}{dx} + \frac{d^2\partial_q V}{dx^2} - \frac{d^3\partial_r V}{dx^3} + \cdots = 0$$

ist überhaupt eine Differenzialgleichung von gerader Ordnung, und zwar, wenn von den in V enthaltenen Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ der höchste $\frac{d^m y}{dx^m}$ ist, eine Differenzialgleichung von der $2m$ten Ordnung.

I) Häufig läßt sich dieselbe freilich durch unmittelbare Integration des die linke Seite bildenden Aggregats auf eine Differenzialgleichung niedrigerer Ordnung zurückführen. Wenn z. B. kein y in V vorkommt, so ist der linke Theil der Gl. (1) gleichbedeutend mit

$$-d\left(\partial_p V - \frac{d\partial_q V}{dx} + \frac{d^2\partial_r V}{dx^2} - \cdots\right)$$

daher gelangt man durch Integration sofort zu

$$\partial_p V - \frac{d\partial_q V}{dx} + \frac{d^2\partial_r V}{dx^2} - \cdots = C_1$$

und die Ordnung dieser Differenzialgleichung ist um eine Einheit niedriger als die der ursprünglichen; dabei stellt C_1 eine erste Integrationsconstante vor.

Ebenso gelangt man, wenn in V weder y noch p ist, durch zweimaliges Integriren zu

$$\partial_q V - \frac{d\partial_r V}{dx} + \cdots - C_1 x = C_2$$

was eine Differenzialgleichung der $(2m-2)$ten Ordnung ist. — U. s. w.

---

§. 27 bei I) gegebenen Erläuterungen mit dem Integrale

$$\int_\xi^{2a} \frac{dx\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2g(x-\xi)}} = \int_\xi^{2a} \frac{\sqrt{2a}.dx}{\sqrt{2g(x-\xi)(2a-x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_\xi^{2a} \frac{dx}{\sqrt{-2a\xi + (2a+\xi)x - x^2}}$$

zu thun, für welches sich sogleich der Werth $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ ergiebt, worin gar kein ξ mehr vorkommt. Durch die Cykloide ist also zugleich das sogenannte Problem der Tautochrone gelöst.

Auch schon, wenn zwar $y, p, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}$ in V vorhanden sind, aber die Independente x fehlt, gelingt eine erste Integration unmittelbar. Denn in diesem Falle ist

$$\frac{dV}{dx} = \partial_y V.p + \partial_p V.q + \partial_q V.r + \partial_r V.s + \ldots$$

und indem man den hieraus für $\partial_y V.p$ fließenden Werth in die Hauptgleichung (1) einsetzt, nachdem diese mit pdx multiplicirt worden, findet man

$$(\dot{=}) \quad \left.\begin{aligned} & dV - \left(\partial_p V.q + \frac{d\partial_p V}{dx} p\right) dx \\ & - \left(\partial_q V.r - \frac{d^2 \partial_q V}{dx^2} p\right) dx \\ & - \left(\partial_r V.s + \frac{d^3 \partial_r V}{dx^3} p\right) dx \\ & - \quad \ldots \qquad \ldots \end{aligned}\right\} = 0$$

Hierin sind aber alle auf dV folgenden Bestandtheile lauter vollständige Differenziale. Denn der erste ist einerlei mit

$$\partial_p V dp + p\, d\partial_p V = d(p \partial_p V)$$

Der folgende Bestandtheil läßt sich offenbar auf die Form bringen

$$\left.\begin{aligned} & \left(r\partial_q V + q\frac{d\partial_q V}{dx}\right) dx \\ & - \left(q\frac{d\partial_q V}{dx} + p\frac{d^2\partial_q V}{dx^2}\right) dx \end{aligned}\right| = d\left(q\partial_q V\right) - d\left(p\frac{d\partial_q V}{dx}\right)$$

der folgende auf die Form

$$\begin{aligned} & \left(s\partial_r V + r\frac{d\partial_r V}{dx}\right) dx \\ & - \left(r\frac{d\partial_r V}{dx} + q\frac{d^2\partial_r V}{dx^2}\right) dx \\ & + \left(q\frac{d^2\partial_r V}{dx^2} + p\frac{d^3\partial_r V}{dx^3}\right) dx \\ & = d\left(r\partial_r V\right) - d\left(q\frac{d\partial_r V}{dx}\right) + d\left(p\frac{d^2\partial_r V}{dx^2}\right) \end{aligned}$$

u. s. f. Daher läßt sich jetzt die Gleichung ($\dot{=}$), in welche sich die Hauptgleichung verwandelt hatte, ohne Weiteres integriren, und nach $p, q \ldots$ ordnend erhält man

$$(1.\alpha)\qquad \left.\begin{aligned}&\left(\partial_p V - \frac{d\partial_q V}{dx} + \frac{d^2\partial_r V}{dx^2} - \cdots\right)p\\ &+\left(\partial_q V - \frac{d\partial_r V}{dx} + \cdots\right)q\\ &+\left(\partial_r V - \cdots\right)r\\ &\cdots\end{aligned}\right\} - V = C_1$$

eine Differenzialgleichung, worin wenn wir $\frac{d^m y}{dx^m}$ größerer Bequemlichkeit wegen durch y_m vorstellen, kein höherer Differenzialquotient als $\frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} = \frac{d^{2m-1}y}{dx^{2m-1}}$ vorkommt.

Wenn in V außer x auch noch y fehlte, so würde man, indem man mittelst

$$\frac{dV}{dx} = \partial_p V.q + \partial_q V.r + \partial_r V.s + \cdots$$

aus der Hauptgleichung

$$\partial_p V - \frac{d\partial_q V}{dx} + \frac{d^2\partial_r V}{dx^2} - \cdots = C_1$$

den Differenzialquotienten $\partial_p V$ eliminirte, ganz auf dieselbe Weise zur Gleichung

$$(1.\beta)\qquad \left.\begin{aligned}&\left(\partial_q V - \frac{d\partial_r V}{dx} + \cdots\right)q\\ &+\left(\partial_r V - \cdots\right)r\\ &\cdots\end{aligned}\right\} + C_1 p - V = C_2$$

gelangen, welche nur noch zur $(2m-2)$ten Ordnung gehört. U. s. w.

II) Da nun, wie gesagt, die ursprüngliche Hauptgleichung, wenn V in Beziehung auf die Differenzialquotienten von y zur $m$ten Ordnung gehört, von der $2m$ten Ordnung ist (abgesehen von den in III) zu betrachtenden besondern Fällen) so werden in dem allgemeinen $2m$ten Integral sich $2m$ willkührliche Constanten C_1, C_2, C_3, .. C_{2m} einfinden. Diese erhalten jedoch bestimmte Werthe, sobald man die Gränzgleichungen zu erfüllen sucht; denn deren Anzahl ist ebenfalls $2m$.

Die beiden ersten dieser Gränzgleichungen, nämlich

$$(2) \qquad \left(\frac{dV}{dp} - \frac{1}{dx} d\frac{dV}{dq} + \cdots\right)_\alpha [\delta y]_\alpha = 0$$

$$(3) \qquad \left(\frac{dV}{dp} - \frac{1}{dx} d\frac{dV}{dq} + \cdots\right)_\xi [\delta y]_\xi = 0$$

werden zwar bei den meisten Aufgaben deshalb wegfallen, weil der Factor $[\delta y]_\alpha$ resp. $[\delta y]_\xi$ gleich Null sein soll d. h. weil

$$\beta = f(\alpha, C_1, C_2, \ldots C_{2m})$$

beziehungsweise $\eta = f(\xi, C_1, C_2, \ldots C_{2m})$

als Ordinaten der Gränzpunkte $A[x = \alpha, y = \beta]$ und $B[x = \xi, y = \eta]$ gegeben sind. Allein die eine wie die andere dieser letzteren Gleichungen ist doch selbst nur als eine Bedingung anzusehen, welche zur Bestimmung der Constanten C_1, C_2, ꝛc. helfen muß; an die Stelle der einen tritt, wenn η nicht gegeben ist, die Gleichung (3), und ebenso würde die andere, wenn auch die Ordinate des Anfangspunkts A als variirend gedacht werden sollte, durch Gl. (2) ersetzt werden.

Nehmen wir nun etwa an, um einen speciellen Fall vor Augen zu haben, es wäre in V außer x und y etwa p und q enthalten, so würden zu den eben besprochenen zwei Gleichungen (2) und (3) noch folgende beide

$$[\partial_q V \delta p]_\alpha = 0 \qquad [\partial_q V \delta p]_\xi = 0$$

hinzukommen. Hierdurch sind aber nun die vier in $y = f(x, C_1, C_2, C_3, C_4)$ enthaltenen Integrationsconstanten vollkommen bestimmt. Und man sieht, daß überhaupt zur Bestimmung der gesuchten Curve $y = f(x)$ keine weiteren Nebenbedingungen, etwa außer A und B noch ein dritter und vierter Punkt oder eine Tangente und dgl. mehr erforderlich seien.*) Nur dann würde einige Unbestimmtheit noch übrig bleiben, wenn zwei (oder mehrere) der Gränzgleichungen zufällig (wegen besonderer Relationen zwischen α und ξ) mit einander identisch würden; in einem solchen Falle müßte man allerdings noch ein (oder mehrere) Bestimmungsstücke für die gesuchte Curve fordern.

III) Etwas anders wird sich die Sache verhalten, wenn $[y]_\alpha$, $[y]_\xi$, $[p]_\alpha$, $[p]_\xi$ ... nicht unmittelbar gegeben sind, also $[\delta y]_\alpha$, $[\delta y]_\xi$, $[\delta p]_\alpha$ ꝛc. nicht gleich Null angenommen werden dürfen, aber doch auch nicht ganz unabhängig von einander sind. Dieses wird sich z. B. dann er-

*) Vgl. hierzu die Anmerkung am Ende von §. 34.

eignen, wenn zwischen y_α und y_ξ eine vorgeschriebene Relation Statt finden soll, etwa wie

$$a y_\alpha + b y_\xi = c \qquad \text{woraus folgt} \quad a\delta' y_\alpha + b\delta' y_\xi = 0$$

oder wie $\quad y_\alpha p_\alpha = c \qquad$ „ „ $\quad p_\alpha \delta' y_\alpha + y_\alpha \delta' p_\alpha = 0$

u. dgl.

In solchen Fällen wird man freilich, um das Aggregat der in §. 25 Gl. (5) vor dem Integralzeichen vorausgehenden Glieder zum Verschwinden zu bringen, nicht die Zerspaltung in die Einzelgleichungen (7) vornehmen, man wird vielmehr, indem man das ganze Aggregat gleich Null setzt, zuvörderst diejenigen Variationen $[\delta y]_\alpha$, $[\delta y]_\xi$, $[\delta p]_\alpha \ldots$ welche sich durch die übrigen ausdrücken laßen, eliminiren und nur die Coefficienten der übrig bleibenden einzeln gleich Null setzen. Die Anzahl der so gewonnenen Gränzgleichungen beträgt aber zusammengenommen mit den gegebenen zwischen y_α, y_ξ, $p_\alpha \ldots$ Statt findenden Gleichungen immer noch $2m$. Sie würde freilich kleiner ausfallen, wenn die zwischen y_α, y_ξ, $p_\alpha \ldots$ bestehenden Relationen keine Gleichungen, sondern von der Art wären, wie die in §. 22 II) als Bedingungen der zweiten Classe betrachteten.

IV) Da der oben in I) ausgesprochene Satz, daß die zu integrirende Hauptgleichung überhaupt von einer gerad en Ordnung sei, bei einer gewißen Beschaffenheit von V zweifelhaft erscheinen könnte, so glauben wir schließlich noch ein Paar Worte hierüber anfügen zu müßen.

Wenn z. B. V blos x, y, p enthält und von der Form ist

$$V = \varphi(x, y) + \psi(x, y).p$$

so würde der partielle Differenzialquotient $\partial_p V = \psi(x, y)$ von p frei sein, also das totale Differenzial $d\partial_p V$ kein $dp = q dx$, sondern nur dx und $dy = p dx$ enthalten; und demnach sollte man erwarten, daß die Hauptgleichung

$$\partial_y V - \frac{1}{dx} d\partial_p V = 0$$

frei von q d. h. eine Differenzialgleichung von der ersten, also von einer ungeraden Ordnung wäre. Bei näherer Untersuchung stellt sich aber heraus, daß sie nur zur 0ten Ordnung gehört. Denn es ist

$$\partial_y V = \frac{d\varphi(x, y)}{dy} + \frac{d\psi(x, y)}{dy} p$$

$$\frac{1}{dx} d\partial_p V = \frac{d\psi(x, y)}{dx} + \frac{d\psi(x, y)}{dy} p$$

in der Differenz dieser Ausdrücke verschwindet p und die Hauptgleichung

$$\frac{d\varphi(x, y)}{dy} - \frac{d\psi(x, y)}{dx} = 0$$

ist eine endliche Gleichung zwischen x und y. — Uebrigens würde für die hier vorausgesetzte Beschaffenheit der in dem Ausdrucke $U = \int V dx$ vorkommenden Function V der Umstand zu bemerken sein, daß, insofern α und ξ gegebene Abscissen vorstellen, die zugehörigen Ordinaten y_α und y_ξ sofort bestimmte Werthe erhalten, daß also die Gränzpunkte A und B nicht beliebig gegeben werden könnten, und daß man andererseits, um den Gränzgleichungen

$$[\partial_p V \delta y]_\alpha = 0 \qquad [\partial_p V \delta y]_\xi = 0$$

Genüge zu thun, in die Aufgabe die Beschränkung aufnehmen müßte, daß alle mit der gesuchten Curve in Vergleich zu ziehenden Nachbarcurven durch eben diese Punkte A, B begränzt seien.

Nehmen wir ferner an, außer x, y, p sei in V auch noch q enthalten, aber auf lineäre Weise

$$V = \varphi(x, y, p) + \psi(x, y, p)\, q$$

so ist zwar $\partial_q V$ frei von q, daraus folgt aber nicht daß die Hauptgleichung, wie man erwarten sollte, eine Differenzialgleichung dritter Ordnung ist, sondern sie sinkt zur zweiten Ordnung herab. Indem wir nämlich der fraglichen Gleichung zunächst die Form

$$\partial_y V - \frac{1}{dx} d\left(\partial_p V - \frac{1}{dx} d\partial_q V\right) = 0$$

geben, kommt es nur auf den Nachweis an, daß aus der Differenz $\partial_p V - \frac{1}{dx} d\partial_q V$ der Differenzialquotient q herausfällt, denn alsdann kann $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dq}{dx}$ in der Gleichung nicht zum Vorschein kommen. Es ist aber jetzt

$$\partial_p V = \frac{d\varphi}{dp} + \frac{d\psi}{dp} q$$

$$\frac{1}{dx} d\partial_q V = \frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} p + \frac{d\psi}{dp} q$$

also

$$\partial_p V - \frac{1}{dx} d\partial_q V = \frac{d\varphi}{dp} - \frac{d\psi}{dx} - \frac{d\psi}{dy} p$$

wirklich frei von q.

Und allgemein, wenn in V die Variablen x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\cdots$ $\frac{d^my}{dx^m}$

vorkommen, dieſer höchſte Differenzialquotient aber, den wir der Kürze wegen wieder durch y_m vorſtellen wollen, in lineärer Weiſe, wenn alſo

$$V = \varphi + \psi y_m$$

iſt und φ, ψ blos x, y, $p \ldots y_{m-1}$ enthalten, ſo kann in

$\partial_y V$, $\frac{1}{dx} d\partial_p V$, $\frac{1}{dx^2} d^2 \partial_q V$ u. ſ. f. bis zu $\frac{1}{dx^{m-2}} d^{m-2}\left(\frac{dV}{dy_{m-2}}\right)$

der Differenzialquotient $\frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} = y_{2m-1}$ nicht vorkommen. Da aber aus der Differenz

$$\frac{dV}{dy_{m-1}} - \frac{1}{dx} d\frac{dV}{dy_m}$$

$$= \left(\frac{d\varphi}{dy_{m-1}} + \frac{d\psi}{dy_{m-1}} y_m\right)$$

$$- \left(\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} p + \cdots + \frac{d\psi}{dy_{m-2}} y_{m-1} + \frac{d\psi}{dy_{m-1}} y_m\right)$$

y_m herausfällt, ſo wird auch in

$$\frac{(-1)^{m-1}}{dx^{m-1}} d^{m-1}\left(\frac{dV}{dy_{m-1}} - \frac{1}{dx} d\frac{dV}{dy_m}\right)$$

kein höherer Differenzialquotient als $\frac{d^{m-1} y_{m-1}}{dx^{m-1}} = \frac{d^{2m-2} y}{dx^{2m-2}}$ auftreten. Mithin kann die Hauptgleichung ſich über die $(2m-2)$te Ordnung nicht erheben.

§. 31.

Es könnte ſich in beſondern Fällen ereignen, daß die in §. 25 entwickelte und im vor. §. näher beſprochene Gleichung

$$(1) \qquad \frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx} d\frac{dV}{dp} + \frac{1}{dx^2} d^2\frac{dV}{dq} - \cdots = 0$$

ſchon an und für ſich, alſo abgeſehen von allen möglichen Schwierigkeiten des Integrirens, völlig ungeeignet wäre eine beſtimmte Function $y = f(x)$ zu liefern.

I) Man wird hierbei zunächſt daran denken, daß die erwähnte Gleichung eine Ungereimtheit in ſich enthalten könne. Denn ſollte z. B. eine Function $y = f(x)$ geſucht werden, welche das Integral

$$\int_a^\xi V dx = \int_a^\xi \left(x\frac{dy}{dx} - y\right) dx = \int_a^\xi (xp - y) dx$$

zu einem Maximum oder Minimum machte, so hätte man

$$\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx} d\frac{dV}{dp} = -2$$

und dies kann nicht gleich Null gesetzt werden. Aus einem solchen Widerspruche wird man den Schluß ziehen, es sei gar keine Function $y = f(x)$ denkbar, welche dem Integrale $\int V dx$ einen größten oder kleinsten Werth ertheile. Daß es sich auch im vorliegenden Beispiele so verhalten müße, ist leicht zu sehen. Denn wenn wir eine Curve, in welcher wir einen festen Anfangspunkt A $[x = \alpha]$ und einen variablen Endpunkt M denken wollen, auf ein Polarcoordinatensystem beziehen, den Pol O im Ursprung der Coordinaten x, y annehmen, und den Radius-Vector OM mit u, den zugehörigen Polarwinkel aber mit φ bezeichnen, so haben wir

$$\varphi = \text{Arc tg}\,\frac{y}{x} \qquad u^2 = x^2 + y^2$$

$$d\varphi = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{xp - y}{u^2} dx$$

Hieraus ist ersichtlich, daß

$$\tfrac{1}{2} V dx = \tfrac{1}{2}(xp - y) dx = \tfrac{1}{2} u^2 d\varphi$$

nichts anderes ist als das Differenzial des von den Radien-Vectoren OA, OM und dem Bogen AM eingeschloßenen Sectors AOM, daß also

$$\int_{\alpha}^{\xi} (xp - y) dx = 2 \text{ Sector AOBMA}$$

ist, wenn wir, wie gewöhnlich, den der Integrationsgränze $x = \xi$ entsprechenden Endpunkt der Curve mit B bezeichnen. Und welche Gestalt nun auch der Bogen AMB haben mag, offenbar läßt sich immer ein anderer nächstanliegender AM'B so ziehen, daß der neue Sector nach Belieben entweder größer oder kleiner ausfällt. Daher ist mit der Natur des vorgelegten Integralausdrucks die Eigenschaft eines Maximums oder Minimums unvereinbar.

II) Die Gleichung (1) kann aber den ihr zugetrauten Dienst, eine bestimmte Function $y = f(x)$ für das Maximum resp. Minimum von $\int V dx$ zu liefern, auch aus dem Grunde versagen, weil sie durch gegenseitiges Aufheben aller Größen, welche die linke Seite derselben bilden, sich in die identische Form $0 = 0$ zusammenzieht. Und dieser Umstand giebt uns Veranlaßung zu einigen Erläuterungen, welche bei manchen in das Gebiet der Integralrechnung gehörigen Untersuchungen sich nützlich erweisen werden.

Obwohl nämlich der Ausdruck $Vdx = F(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots)dx$ im Allgemeinen sich erst dann als ein zur Integration geeignetes Differenzial denken läßt, wenn für y eine bestimmte Function von x gefunden oder beliebig angenommen wäre, wobei sich gleichzeitig die Differenzialquotienten $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = q$ ꝛc. in bestimmte Functionen von x verwandeln würden, und Vdx die Form $\Psi(x)dx$ erhielte; so kann dennoch auch der Fall eintreten, daß Vdx trotz des Einschlußes der unbestimmten Functionen $y, p, \ldots$ dennoch einen unmittelbar integrablen Ausdruck darstellt. Denn denken wir uns eine beliebig aus x, y und den Differenzialquotienten p, $q \ldots$ gebildete Function

$$u = \Phi(x, y, p, q, \ldots)$$

so folgt daraus durch Differenziation

$$du = \frac{d\Phi}{dx}dx + \frac{d\Phi}{dy}dy + \frac{d\Phi}{dp}dp + \frac{d\Phi}{dq}dq + \cdots$$

also

$$\frac{du}{dx} = \frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{dy}p + \frac{d\Phi}{dp}q + \frac{d\Phi}{dq}r + \cdots.$$

Wäre nun V gleich der hier rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Function, so würde offenbar Vdx ein integrabler Ausdruck, nämlich $\int Vdx = \Phi(x, y, p, q \ldots) + \text{Const.}$ sein, und zwar ohne daß man für y irgend eine bestimmte Function von x angenommen hätte.

In einem solchen Falle wäre aber, wenn man nach ausgeführter Integration für y in Gedanken irgend eine variirende Function von x annehmen wollte,

$$\delta \int Vdx = \delta\Phi(x, y, p, q \ldots) = \partial_y \Phi \delta y + \partial_p \Phi \delta p + \partial_q \Phi \delta q + \cdots$$

(2) d. h. $$\int \delta V dx = \frac{d\Phi}{dy}\delta y + \frac{d\Phi}{dp}\frac{d\delta y}{dx} + \frac{d\Phi}{dq}\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \cdots$$

ohne daß sich auf der rechten Seite dieser Gleichung irgend ein Variationsquotient unter dem Integralzeichen vorfände. Und wenn man nun hiermit die in §. 23 gefundene allgemeine Entwickelung (3) vergleicht, so wird man sogleich zu dem Schluße geführt, daß bei der so eben vorausgesetzten Beschaffenheit der Function V das Aggregat

$$\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}d\frac{dV}{dp} + \frac{1}{dx^2}d^2\frac{dV}{dq} - \cdots$$

sich identisch auf Null reduciren müße, damit in der citirten Formel das letzte Integral von selbst wegfällt. Auch müßen unter der hier gemachten

Voraussetzung die Coefficienten von δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ ꝛc., als Functionen von $x, y, p, q \ldots$ gedacht, auf der rechten Seite jener Gleichung (3) des §. 23 nach der Reihe identisch sein mit den partiellen Differenzialquotienten $\frac{d\Phi}{dy}$, $\frac{d\Phi}{dp}$, $\frac{d\Phi}{dq}$ ꝛc.; wovon man sich sofort überzeugt, wenn man von der genannten Gleichung unsere gegenwärtige Gl. (2) subtrahirt und auf die entstehende Gleichung

$$0 = \left(\frac{dV}{dp} - \frac{1}{dx} d\frac{dV}{dq} + \frac{1}{dx^2} d^2\frac{dV}{dr} - \cdots - \frac{d\Phi}{dy}\right)\delta y + \left(\frac{dV}{dq} - \frac{1}{dx} d\frac{dV}{dr} + \cdots - \frac{d\Phi}{dp}\right)\frac{d\delta y}{dx} + \left(\frac{dV}{dr} - \cdots - \frac{d\Phi}{dq}\right)\frac{d^2\delta y}{dx^2} + \cdots\cdots$$

den in §. 13 bewiesenen Lehrsatz anwendet.

§. 32.

Man kann jedoch diese Resultate auch ohne Hülfe des Variationscalculs direct beweisen.

I) Wenn nämlich das totale Differenzial einer Function

$$u = \Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots\ldots \frac{d^my}{dx^m}\right)$$

auf die Form $V dx$ gebracht wird, und wenn wir wie gewöhnlich $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{d^2y}{dx^2} = q$, $\frac{d^3y}{dx^3} = r$ u. s. f. setzen, den höchsten in u enthaltenen Differenzialquotienten $\frac{d^my}{dx^m}$ aber durch y_m und den von der nächstfolgenden Ordnung, welcher durch das Differenziiren von u herbeigeführt wird, nämlich $\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}$, durch y_{m+1} vorstellen; so ist

$$(3) \qquad V = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dy}p + \frac{du}{dp}q + \cdots + \frac{du}{dy_{m-1}}y_m + \frac{du}{dy_m}y_{m+1}$$

und hieraus folgt

$$\frac{dV}{dy} = \left(\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d^2u}{dy^2}p + \frac{d^2u}{dpdy}q + \cdots + \frac{d^2u}{dy_m dy}y_{m+1}\right)$$
$$\frac{dV}{dp} = \frac{du}{dy} + \left(\frac{d^2u}{dxdp} + \frac{d^2u}{dydp}p + \frac{d^2u}{dp^2}q + \cdots + \frac{d^2u}{dy_m dp}y_{m+1}\right)$$
$$\frac{dV}{dq} = \frac{du}{dp} + \left(\frac{d^2u}{dxdq} + \frac{d^2u}{dydq}p + \frac{d^2u}{dpdq}q + \cdots + \frac{d^2u}{dy_m dq}y_{m+1}\right)$$

u. s. f.

bis zu $\frac{dV}{dy_{m+1}}$, welche Größe sich, da in u kein y_{m+1} vorkommt, bloß auf $\frac{du}{dy_m}$ reducirt. Bedenkt man nun aber, daß ein jedes der in Parentheſen eingeſchloßenen Aggregate auf doppelte Weiſe aufgefaßt werden kann, indem z. B. das in der erſten Parentheſe befindliche Glied $\frac{d^2u}{dpdy}q$ nicht bloß als der nach y genommene partielle Differenzialquotient von $\frac{du}{dp}q$, ſondern auch umgekehrt als das nach p genommene und durch dx divi-dirte partielle Differenzial von $\frac{du}{dy} = \partial_y u$, nämlich gleich $\frac{1}{dx}\left(\frac{d\partial_y u}{dp}\right)dp$ aufgefaßt werden kann; ſo ſieht man ſofort, daß die vorſtehenden Gleichungen einerlei ſind mit

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{dV}{dy} &= \frac{1}{dx}d\frac{du}{dy} \\ \frac{dV}{dp} &= \frac{du}{dy} + \frac{1}{dx}d\frac{du}{dp} \\ \frac{dV}{dq} &= \frac{du}{dp} + \frac{1}{dx}d\frac{du}{dq} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dV}{dy_m} &= \frac{du}{dy_{m-1}} + \frac{1}{dx}d\frac{du}{dy_m} \\ \frac{dV}{dy_{m+1}} &= \frac{du}{dy_m} \end{aligned}$$

II) Von dieſen Gleichungen nimmt die allererſte in doppelter Hinſicht ein beſonderes Intereſſe in Anſpruch. Wenn nämlich Vdx, wie wir hier vorausſetzen, ein Differenzialausdruck iſt, den man ohne Kenntnis von der Beſchaffenheit der durch y vorgeſtellten Function integriren könnte, ſo muß

jener Gleichung zu Folge auch $\frac{dV}{dy}dx$ ein unmittelbar integrabler Ausdruck sein, da er gleich dem auf der rechten Seite der Gleichung befindlichen totalen Differenzial von $\frac{du}{dy}$ ist. Und indem man denselben Schluß, der von Vdx auf $\frac{dV}{dy}dx$ geleitet hat, mehrmals wiederholt, gelangt man zur Einsicht, daß auch $\frac{d^2V}{dy^2}dx$, $\frac{d^3V}{dy^3}dx$ u. s. f. lauter unmittelbar integrable Ausdrücke sein müßen. — Durch Integration der obigen Gleichung ergiebt sich aber

$$\frac{du}{dy} = \int \frac{dV}{dy}dx$$

und wenn man hier $\int Vdx$ an die Stelle von u setzt, so lehrt die entstehende Gleichung

$$\frac{d\int Vdx}{dy} = \int \frac{dV}{dy}dx \qquad (5)$$

nun weiter, daß die Operation, welche man **das Differenziiren unter dem Integralzeichen** nennt, bei der hier vorausgesetzten Beschaffenheit von V auch noch zuläßig sei, obwohl gegenwärtig y als eine (unbestimmte) **Function von** x gedacht wird, während man diesen Satz in der Regel nur unter der Voraussetzung beweist und anzuwenden pflegt, daß y eine von x independente Variable sei. Es ist um so nöthiger auf diesen Unterschied zu achten, da in der That, wenn y von x abhängt, und wenn Vdx **nicht** von der hier vorausgesetzten Beschaffenheit ist, d. h. ohne Kenntnis der Function y nicht integrirt werden kann, an die Stelle der unbestimmten Größe $\frac{d\int Vdx}{dy}$ keineswegs der Ausdruck $\int \frac{dV}{dy}dx$ gesetzt werden dürfte. Auch sieht man, daß selbst bei der hier vorausgesetzten Beschaffenheit von Vdx dennoch das Differenziiren unter dem Integralzeichen blos nach y und nicht nach einer der andern in V enthaltenen Variablen $p, q, \ldots$ geschehen darf. Denn die Gleichungen, welche bei (4) hinter der ersten nachfolgen, und welche sich durch Integration umgestalten in

$$\frac{d\int V dx}{dp} = \int \frac{dV}{dp} dx - \int \frac{du}{dy} dx$$
$$\frac{d\int V dx}{dq} = \int \frac{dV}{dq} dx - \int \frac{du}{dp} dx$$

u. s. f.

zeigen einerseits, daß man z. B. für $\int \frac{dV}{dq} dx$ ohne weitere Kenntnis von $y = f(x)$ nur dann einen vom Integralzeichen befreiten Werth anzugeben vermag, wenn $\frac{du}{dp} dx$ ein unmittelbar integrabler Ausdruck wäre; so wie andererseits, daß man $\frac{d\int V dx}{dq}$ nur dann gleich $\int \frac{dV}{dq} dx$ setzen dürfe, wenn $\frac{du}{dp} dx$ gleich Null ist. Und derartige Voraussetzungen über die Beschaffenheit des Differenzialquotienten $\frac{du}{dp}$ können im Allgemeinen nicht gemacht werden.

Uebrigens wollen wir über den etwaigen Gebrauch der Gl. (5) noch erinnern, daß gegenwärtig dem Integral $\int \frac{dV}{dy} dx$ blos noch eine unbestimmte Constante, und nicht etwa eine unbestimmte Function von y oder sonst einer in V vorkommenden Variablen angefügt werden darf. Denn da $\frac{dV}{dy} dx = d\frac{du}{dy}$ das totale Differenzial einer Function von $x, y, p, q, \ldots$ vorstellt, und bei der Integration von $\frac{dV}{dy} dx$ nicht etwa blos das explicit vorhandene x als variabel gedacht wird, so verträgt auch die für $\int \frac{dV}{dy} dx$ hinzustellende Function weder den Zusatz einer Function von x noch den Zusatz einer Function von y oder p u. s. f. Daher wird die Gleichung (5) in Beziehung auf alle variable Bestandtheile richtig sein, und höchstens, um vollkommen identisch zu werden, die Zufügung einer Constanten zu $\int \frac{dV}{dy} dx$ verlangen. Wäre z. B.

$$V = 3\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + y^2\frac{d^3y}{dx^3} \qquad \int V dx = 3y + y^2\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$= 3p + 2ypq + y^2r \qquad = 3y + y^2q$$

so würde man erhalten

$$\frac{dV}{dy} = 2pq + 2yr$$

$$\int \frac{dV}{dy} dx = 2yq + \text{Const.} \qquad \frac{d\int V dx}{dy} = 3 + 2yq$$

und man müßte also, um beide Ausdrücke identisch zu machen, Const. $= 3$ annehmen.

III) Nach dieser Abschweifung von unserm Gegenstande, zu welcher uns die erste der Gleichungen (4) Veranlaßung gegeben hat, wenden wir uns jetzt zur Vollendung des angefangenen Beweises.

Aus der Beschaffenheit der Gleichungen (4) ist ersichtlich, daß wenn von irgend einer dieser Gleichungen das Differenzial der unmittelbar folgenden, nachdem es mit $\frac{1}{dx}$ multiplicirt worden ist, subtrahirt wird, in dem dadurch erhaltenen Reste einer der Differenzialquotienten $\frac{du}{dy}, \frac{du}{dp}, \ldots$ ausfällt. Fängt man also diese Operation gleich mit der ersten Gleichung an, so ergiebt sich successive

$$\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx} d\frac{dV}{dp} = -\frac{1}{dx^2} d^2\frac{du}{dp}$$

$$\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx} d\frac{dV}{dp} + \frac{1}{dx^2} d^2\frac{dV}{dq} = +\frac{1}{dx^3} d^3\frac{du}{dq}$$

$$\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx} d\frac{dV}{dp} + \frac{1}{dx^2} d^2\frac{dV}{dq} - \frac{1}{dx^3} d^3\frac{dV}{dr} = -\frac{1}{dx^4} d^4\frac{du}{dr}$$

. . . . . .

endlich

$$\frac{dV}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{dV}{dp} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{dV}{dq} - \ldots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m}\frac{dV}{dy_m} = \pm \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\frac{du}{dy_m}$$

(6) d. h.

$$\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx} d\frac{dV}{dp} + \frac{1}{dx^2} d^2\frac{dV}{dq} - \ldots + (-1)^{m+1} \cdot \frac{1}{dx^{m+1}} d^{m+1}\frac{dV}{dy_{m+1}} = 0$$

Dieses war die zu erweisende Bedingungsgleichung, welche Statt finden muß, wenn $V dx$ ein unmittelbar integrabler Ausdruck sein soll.

Fängt man aber die eben erklärte Operation bei der zweiten, oder bei der dritten u. s. f. von den Gleichungen (4) an, so gelangt man zu folgenden Resultaten:

$$\frac{dV}{dp} - \frac{1}{dx}d\frac{dV}{dq} + \frac{1}{dx^2}d^2\frac{dV}{dr} - \cdots = \frac{du}{dy}$$

$$(7) \qquad \frac{dV}{dq} - \frac{1}{dx}\,d\frac{dV}{dr} + \cdots = \frac{du}{dp}$$

$$\frac{dV}{dr} - \cdots = \frac{du}{dq}$$

u. s. f.

woraus ersichtlich ist, daß auf der rechten Seite der Gl. (3) in §. 23 die in Parentheſe geſchloßenen Coefficienten von δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$ u. s. f. wirklich nach der Reihe die partiellen Differenzialquotienten der Function $u = \Phi(x, y, p, q \ldots) = \int V dx$ sind.

Nachdem durch diese Betrachtungen die oben aufgestellten Behauptungen erwiesen sind, wollen wir nur noch auf die praktischen Folgen für den Fall aufmerksam machen, wenn V gegeben ist, und $\int V dx = \Phi(x, y, p, q, \ldots) = u$ gesucht werden soll. Man wird alsdann zuvörderst zusehen, ob die Bedingungsgleichung (6) erfüllt wird. Trifft dies zu, so wird man nach Anleitung der Formeln (7) die partiellen Differenzialquotienten $\frac{du}{dy}, \frac{du}{dp}, \frac{du}{dq}, \ldots$ berechnen. Ferner wird dann der ursprünglichen Voraussetzung (3) zu Folge

$$(8) \qquad \frac{du}{dx} = V - \left[\frac{du}{dy}p + \frac{du}{dp}q + \frac{du}{dq}r + \cdots\right]$$

Auf diese Art hat man in dem totalen Differenzial

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dp}dp + \frac{du}{dq}dq + \cdots$$

sämmtliche partielle Differenzialquotienten durch gegebene Functionen ausgedrückt, und kann also, um u zu finden, nach den Regeln verfahren, welche für die Integration der Differenzialien von Functionen mehrerer independenter Variablen in der Integralrechnung entwickelt werden.

Beispiele.

1) Nehmen wir als erstes Beispiel die bereits oben benutzte Function

$$V = 3p + 2ypq + y^2r$$

Man erhält hieraus

$$\frac{dV}{dy} = 2pq + 2yr$$

$$\frac{dV}{dp} = 3 + 2yq \qquad \frac{1}{dx}d\frac{dV}{dp} = 2pq + 2yr$$

$$\frac{dV}{dq} = 2yp \qquad \frac{1}{dx}d\frac{dV}{dq} = 2p^2 + 2yq \qquad \frac{1}{dx^2}d^2\frac{dV}{dq} = 6pq + 2yr$$

$$\frac{dV}{dr} = y^2 \qquad \frac{1}{dx}d\frac{dV}{dr} = 2yp \qquad \frac{1}{dx^2}d^2\frac{dV}{dr} = 2p^2 + 2yq$$

$$\frac{1}{dx^3}d^3\frac{dV}{dr} = 6pq + 2yr$$

Diese Ausdrücke leisten nun zuvörderst der Bedingungsgleichung (6) Genüge.

Die Formeln (7) geben hiernächst

$$\partial_y u = 3 + 2yq \qquad \partial_p u = 0 \qquad \partial_q u = y^2$$

und die Formel (8) giebt

$$\partial_x u = V - [3p + 2ypq + y^2 r] = 0$$

demnach ist

$$du = (3 + 2yq)dy + y^2 dq$$

$$u = 3y + y^2 q + \varphi(q) \qquad \varphi'(q) = \partial_q u - y^2 = y^2 - y^2 = 0$$

also schließlich $u = 3y + y^2 q + \text{Const.}$

2) Hätte man zu integriren die Gleichung*)

$$\left.\begin{aligned}(2xy\frac{dy}{dx} + x^2 y)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy^3}{dx^3} + (y + x^2)\frac{dy^2}{dx^2}\\ + (2 + 3y)xy\frac{dy}{dx} + y^3\end{aligned}\right\} = 0$$

so würde man vor allen Dingen zusehen, ob das Polynom

$$V = (2xyp + x^2 y)q + xp^3 + (y + x^2)p^2 + (2 + 3y)xyp + y^3$$

nicht etwa der vollständige Differenzialquotient $\frac{du}{dx}$ einer Function $u = \Phi(x, y, p)$ sei. Trifft dies zu, so wird $u = \text{Const.}$ das Integral der vorgelegten Differenzialgleichung sein.

Nun erhält man

$$\partial_y V = (2xp + x^2)q + p^2 + (2x + 6xy)p + 3y^2$$

$$\partial_p V = 2xyq + 3xp^2 + 2(y + x^2)p + (2 + 3y)xy$$

$$d\partial_y V = [2xyr + (4y + 8xp + 2x^2)q + 5p^2 + 6x(1 + y)p + (2 + 3y)y]dx$$

*) In Lacroix Traité du Calcul diff. et du Calc. intégral, Tome II p. 234. wird dieses Beispiel auf anderm Wege angegriffen.

$$\partial_q V = 2xyp + x^2y$$
$$d\partial_q V = [2xyq + 2xp^2 + (2y + x^2)p + 2xy]dx$$
$$d^2\partial_q V = [2xyr + (6xp + 4y + x^2)q + 4p^2 + 4xp + 2y]dx^2$$

Hieraus folgt $\partial_y V - \frac{d\partial_p V}{dx} + \frac{d^2\partial_q V}{dx^2} = 0$ und deshalb ist

$$\partial_y u = xp^2 + x^2p + 3xy^2$$
$$\partial_p u = 2xyp + x^2y$$
$$\partial_x u = V - [x(p^2 + xp + 3y^2)p + xy(x + 2p)q] = yp^2 + 2xyp + y^3$$

also

$$du = \left\{\begin{array}{l}(yp^2 + 2xyp + y^3)dx \\ \quad + (xp^2 + x^2p + 3xy^2)dy + (2xyp + x^2y)dp\end{array}\right\}$$

Da nun hier die Coefficienten von dx, dy, dp homogen und zwar von der dritten Dimension sind, so findet man sogleich nach dem bekannten Euler'schen Lehrsatz über die Integration der homogenen Differenzialien

$$u = \tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}(xyp^2 + 2x^2yp + xy^3) \\ + (xyp^2 + x^2yp + 3xy^3) + (2xyp^2 + x^2yp)\end{array}\right\}$$

d. h. $u = xyp^2 + x^2yp + xy^3$

Daher ist $xy(p^2 + xp + y^2) = \text{Const.}$

das Integral der oben vorgelegten Differenzialgleichung.

IV) Wir haben in der vorhergehenden Nro. III) die Existenz der mit u bezeichneten Function $\Phi(x, y, p, q, \ldots) = \int V dx$ vorausgesetzt, und nur unter dieser Voraussetzung sie finden gelehrt. Man kann jedoch auch umgekehrt behaupten, daß wenn die Bedingungsgleichung (6) erfüllt ist, die fragliche Function Φ wirklich existire, — daß also die Gl. (6) nicht nur die nothwendige, sondern auch die ausreichende Bedingung für die Möglichkeit der allgemeinen Integration solcher Ausdrücke wie $V dx = F(x, y, p, q, \ldots)dx$ sei. Der Beweis dieses wichtigen Lehrsatzes scheint sich am einfachsten auf folgende Art führen zu laßen.

Setzen wir $y = y_0 + \omega$ und denken unter y_0 und ω zwei Functionen von x, von denen wir die erstere beliebig annehmen können, so folgt durch Differenziation

$$p = p_0 + \omega' \qquad q = q_0 + \omega'' \qquad r = r_0 + \omega''' \quad \text{u. s. f.}$$

wobei wir die derivirten Functionen von ω durch Accente anzeigen, während $p_0 = \frac{dy_0}{dx}$, $q_0 = \frac{dp_0}{dx}$ u. s. f. sein soll.

Es wird jetzt $V = F(x, y_0 + \omega, p_0 + \omega', q_0 + \omega'', \ldots)$, statt

dieſer Function wollen wir aber zunächſt den Ausdruck

(○) $F(x, y_0+\omega t, p_0+\omega' t, q+\omega'' t, r_0+\omega''' t, \ldots) = \Psi(t)$

betrachten, worin t, unſerm in §. 2 eingeführten Variationsargument vergleichbar, unabhängig von x ſich ſucceſſive ändern ſoll. Alsdann giebt die Differenziation nach t

$$\Psi'(t) = \left(\frac{dF}{dy_0}\omega + \frac{dF}{dp_0}\omega' + \frac{dF}{dq_0}\omega'' + \frac{dF}{dr_0}\omega''' + \cdots\right)$$

und hierin können wir nach Belieben die Größen $\frac{dF}{dy_0}$, $\frac{dF}{dp_0}$, ꝛc. entweder aus (○), oder beßer dadurch bilden, daß wir in den aus $V = F(x, y, p, \ldots)$ herzuleitenden partiellen Differenzialquotienten $\partial_y V$, $\partial_p V$, ... an die Stelle von y, p, q, ... überall die Binome $y_0+\omega t$, $p_0+\omega' t$, $q_0+\omega'' t$, ... einſetzen. Nehmen wir nun an, daß $\Psi(0)$, nämlich der zu $y = y_0$ gehörige Werth von V, welchen wir im Folgenden durch V_0 vorſtellen wollen, nicht etwa unendlich ausfalle, was ſich, da wir für y_0 einen tauglichen Werth beliebig ausſuchen dürfen, immer wird erreichen laßen, und ſetzen wir aus eben dieſem Grunde voraus, daß keiner der Differenzialquotienten $\frac{dF}{dy_0}$, $\frac{dF}{dp_0}$ ꝛc. unendlich werde, während t das Intervall von 0 bis 1 durchläuft d. h. während y von y_0 bis zu $y_0+\omega$ continuirlich zunimmt; ſo erhalten wir nach der Formel $\int_0^1 \Psi'(t)dt = \Psi(1) - \Psi(0) = V - V_0$ ſofort

$$V = V_0 + \int_0^1 \left(\frac{dF}{dy_0}\omega + \frac{dF}{dp_0}\omega' + \frac{dF}{dq_0}\omega'' + \cdots\right)dt$$

alſo

$$(9)\quad \int V dx = \int V_0 dx + \int_0^1 dt \int \left(\frac{dF}{dy_0}\omega + \frac{dF}{dp_0}\omega' + \frac{dF}{dq_0}\omega'' + \cdots\right)dx$$

Hierin iſt die Integration $\int V_0 dx$ unmittelbar ausführbar, weil wir y_0, p_0, q_0 ... als beſtimmte Functionen von x gegenwärtig denken. In concreten Fällen würde man übrigens meiſtens ganz einfache Formen z. B. $y_0 = 0$, oder $y_0 = \text{Const.} = \beta$, oder $y_0 = ax + \beta$ u. dgl. annehmen können. Ferner iſt

$$\int\left(\frac{dF}{dy_0}\omega dx + \frac{dF}{dp_0}\omega' dx + \frac{dF}{dq_0}\omega'' dx + \frac{dF}{dr_0}\omega''' dx + \cdots\right)$$
$$= \int \frac{dF}{dy_0}\omega dx + \int \frac{dF}{dp_0} d\omega + \int \frac{dF}{dq_0} d\frac{d\omega}{dx} + \int \frac{dF}{dr_0} d\frac{d^2\omega}{dx^2} + \cdots$$

und sobald man hierin die hinter $\int \frac{dF}{dy_0}\omega dx$ nachfolgenden Glieder sämmtlich mittelst partieller Integration ganz ebenso behandelt, wie in §. 23 II) in dem analogen Falle geschehen ist, (indem man nur statt des dortigen δy gegenwärtig den Buchstaben ω zu setzen braucht) — so erhält man als Transformation der rechten Seite dieser Gleichung

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{dF}{dp_0} - \frac{1}{dx}d\frac{dF}{dq_0} + \frac{1}{dx^2}d^2\frac{dF}{dr_0} - \cdots\right)\omega \\
&+\left(\frac{dF}{dq_0} - \frac{1}{dx}d\frac{dF}{dr_0} + \cdots\right)\omega' \\
&+\left(\frac{dF}{dr_0} - \cdots\right)\omega'' \\
&+ \cdots \\
&\cdot\cdot \\
+\int&\left(\frac{dF}{dy_0} - \frac{1}{dx}d\frac{dF}{dp_0} + \frac{1}{dx^2}d^2\frac{dF}{dq_0} - \frac{1}{dx^3}d^3\frac{dF}{dr_0} + \cdots\right)\omega dx
\end{aligned}$$

Hierin verschwindet nun aber das letzte Integral von selbst; denn nach der Voraussetzung soll das Aggregat

$$\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}d\frac{dV}{dp} + \frac{1}{dx^2}d^2\frac{dV}{dq} - \frac{1}{dx^3}d^3\frac{dV}{dr} + \cdots$$

sich auf Null reduciren, gleichviel was für eine Function von x man anstatt y in $V = F(x, y, p, q, \ldots)$ und die Differenzialquotienten $\frac{dF}{dy}, \frac{dF}{dp}$, ꝛc. einsetzt, dasselbe muß also auch Null bleiben, wenn man, wie wir hier gethan haben, $y_0 + \omega t$ an die Stelle von y einführt.

Aus diesen Gründen, und weil ω bei der nach t auszuführenden Integration constant bleibt, verwandelt sich (9) in

$$\begin{aligned}
\int V dx = \int V_0 dx + \omega&\int_0^1\left(\frac{dF}{dp_0} - \frac{1}{dx}d\frac{dF}{dq_0} + \frac{1}{dx^2}d^2\frac{dF}{dr_0} - \cdots\right)dt \\
+\omega'&\int_0^1\left(\frac{dF}{dq_0} - \frac{1}{dx}d\frac{dF}{dr_0} + \cdots\right)dt \\
+\omega''&\int_0^1\left(\frac{dF}{dr_0} - \cdots\right)dt \\
&+ \cdots
\end{aligned} \qquad (10)$$

Da nun die Inhalte der unter den Integralzeichen stehenden Parentheſen hier lauter gegebene Ausdrücke ſind, in denen außer x und den Functionen y_0 und ω nebſt ihren Derivirten p_0, q_0, ... ω', ω'', ... noch die Variable t vorkommt, und da bei der Ausführung der angezeigten Integrationen nur t veränderlich iſt, während ſich die erſtgenannten Größen ſämmtlich als Conſtante verhalten: ſo ſieht man, daß die Beſtimmung von $\int V dx$ auf bloße Quadraturen zurückgeführt worden iſt. Hierin liegt der Beweis von der Richtigkeit der oben ausgeſprochenen Behauptung; aber nicht allein dies, ſondern es iſt zugleich hiermit ein von der in III) erklärten Methode etwas verſchiedenes Verfahren zur Berechnung von $\int V dx$ dargelegt. Nach Ausführung der angezeigten Quadraturen hat man natürlich überall $y - y_0$ an die Stelle von ω zu ſetzen, alſo $p - p_0$ an die Stelle von ω', $q - q_0$ an die Stelle von ω'', u. ſ. w.

Zur Erläuterung wollen wir von den beiden zu Nro. III) benutzten Beiſpielen das erſte, nämlich

$$\int V dx = \int (3p + 2ypq + y^2 r) dx$$

auch nach dieſem Verfahren behandeln. Offenbar iſt es hier, ohne daß V aufhörte eine endliche Größe zu ſein, uns erlaubt $y_0 = 0$ anzunehmen, wodurch auch

$$p_0 = 0 \qquad q_0 = 0 \qquad r_0 = 0 \qquad \text{u. ſ. f.}$$

wird. Aus $\partial_y V = 2pq + 2yr$ folgt nun zunächſt

$$\frac{dF}{dy_0} = 2(p_0 + \omega' t)(q_0 + \omega'' t) + 2(y_0 + \omega t)(r_0 + \omega''' t)$$

aber wegen der angegebenen Werthe von y_0, p_0, q_0, r_0 reducirt ſich dieſes auf

$$\frac{dF}{dy_0} = 2(\omega'\omega'' + \omega\omega''') t^2$$

und ebenſo erhält man

$$\frac{dF}{dp_0} = 3 + 2\omega\omega'' t^2 \qquad \frac{dF}{dq_0} = 2\omega\omega' t^2 \qquad \frac{dF}{dr_0} = \omega^2 t^2$$

$$\text{alſo} \qquad \frac{dF}{dq_0} - \frac{1}{dx} d\frac{dF}{dr_0} = 0$$

Ferner wird $V_0 = 0$; daher

$$\int V dx = \text{Const.} + \omega \int_0^1 (3 + 2\omega\omega'' t^2) dt + \omega'' \int_0^1 \omega^2 t^2 dt$$
$$= \text{Const.} + 3\omega + \omega^2 \omega''$$

und ſchließlich, wenn man y und q an die Stelle von ω und ω'' einſetzt,

$$\int V dx = 3y + y^2 q + \text{Const.}$$

Man sieht übrigens, daß in allen Fällen, wenn es die Natur von V wegen Abwesenheit von Divisoren ꝛc. gestattet $y_0 = 0$ anzunehmen, sich die Functionen von t, welche in (10) unter den auf einander folgenden mit ω, ω', ω'', ... multiplicirten Integralzeichen stehen, ganz einfach aus unseren für $\partial_y u$, $\partial_p u$, ... entwickelten Formeln (7) dadurch ergeben, daß man in diesen ωt, $\omega' t$, $\omega'' t$ u. s. f. an die Stelle von y, p, q ... setzt. Auf diese Weise entspringt im vorliegenden Beispiel $(3 + 2\omega\omega'' t^2)$ aus unserm oben gefundenen Werthe $\partial_y u = 3 + 2yq$ und $\omega^2 t^2$ aus $\partial_q u = y^2$.

§. 33.

Wir laßen nun noch die vollständige Bearbeitung zweier Aufgaben über das Maximum resp. Minimum der Integralausdrücke $\int V dx$ folgen, von denen die eine in V keine höhern Differenzialquotienten als $\frac{dy}{dx}$, die andere aber außer $\frac{dy}{dx}$ auch noch $\frac{d^2y}{dx^2}$ enthält.*)

Aufgabe. Es wird diejenige Beschaffenheit von $y = f(x)$ gesucht, wodurch

$$U = \int_a^\xi \left(\frac{2ay}{x^2} - \frac{dy^2}{dx^2} \right) dx$$

zu einem Maximum oder Minimum gemacht wird. — Es ist dieses dasjenige Integral, von welchem wir bereits in §. 23 in einer anderen Ab-

*) Wenn der geneigte Leser, nachdem er die Auflösung der im vorliegenden Buche behandelten Aufgaben durchgegangen hat, zur Uebung noch andere Beispiele bearbeiten mögte, so wird er außer in den Werken von Euler und Strauch, die wir bereits in §. 8 beziehungsw. §. 5 citirt haben, eine hinreichende Auswahl finden in

Hohl, Aufgaben zur Lehre vom Größten und Kleinsten der Differenzialfunctionen, Stuttgart 1852. (enthält Aufgaben ohne Integralien, wie die in unserm zweiten Capitel behandelten);

Francoeur, Vollständiger Lehrcurs der reinen Math. IIn Bandes 4s Buch §. 23 fgg. (enthält eine Zusammenstellung der wichtigsten Euler'schen Aufgaben über Integrale);

Ohm, Uebungsaufgaben zur Lehre vom Größten und Kleinsten, als zweiter Anhang zum VII. Theil seines „System der Mathematik" (enthält Aufgaben von beiden Arten).

ſicht Erwähnung gethan haben. Dabei ſetzen wir, damit innerhalb des Integrationsintervalls die Indepenbente x nicht Null werde, $0<\alpha<\xi$ voraus.

I) Wir haben hier $V=\frac{2ay}{x^2}-p^2$, alſo

$$\frac{dV}{dy}=\frac{2a}{x^2} \qquad \frac{dV}{dp}=-2p \qquad d\frac{dV}{dp}=-2qdx$$

daher beſteht als Hauptgleichung die Bedingung

$$(1) \qquad \frac{2a}{x^2}+2q=0$$

Hieraus folgt $dp=-\frac{adx}{x^2}$ alſo durch Integration

$$p=\frac{a}{x}+\text{Const.}=\frac{a}{x}+\frac{a}{B}$$

und dieſe Gleichung mit dx multiplicirt und nochmals integrirt giebt als geſuchte Function

$$(2) \qquad y=a\log\frac{x}{A}+\frac{ax}{B}$$

worin der Logarithmus ein hyperboliſcher iſt.

II) Um zuzuſehen, ob wir von dieſer Gleichung (2) ein Maximum oder Minimum für U erwarten dürfen, berechnen wir zuvörderſt den variirten Werth von V, nämlich

$$V+\delta V=\frac{2a}{x^2}(y+\delta y)-(p+\delta p)^2=\left.\begin{matrix}\frac{2ay}{x^2}\\ -p^2\end{matrix}\right|+\left.\begin{matrix}\frac{2a}{x^2}\delta y\\ -2p\delta p\end{matrix}\right|-\delta p^2$$

Hier erhält nun $\int_a^\xi \Sigma_2 dx=-\int_a^\xi \delta p^2 dx$ offenbar einen negativen Werth, daher haben wir ein Maximum gefunden (§. 28 I).

III) Dieſes Maximum läßt ſich auch ohne Mühe berechnen. Es wird nämlich, wenn wir diejenige Function $F(x)$, in welche ſich V durch Einführung der gefundenen Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)\ldots$ verwandelt, der in §. 28 benutzten Bezeichnung gemäß durch V_0 vorſtellen,

$$V_0=\frac{2a^2}{x^2}\log\frac{x}{A}-a^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{B^2}\right).$$

und da $\int\frac{2}{x^2}l\frac{x}{A}dx=-\frac{2}{x}l\frac{x}{A}-\frac{2}{x}$ iſt, ſo erhält man

$$\int V_0 dx=-\frac{2a^2}{x}l\frac{x}{A}-\frac{a^2}{x}-\frac{a^2x}{B^2}+\text{Const.}$$

Wegen der in Betreff der Integrationsgränzen gemachten Voraussetzung $0<\alpha<\xi$ folgt hieraus

$$U_0 = \int_\alpha^\xi V_0 dx = a^2\left[\frac{2}{\alpha}\frac{\alpha}{A} - \frac{2}{\xi}\frac{\xi}{A} + \frac{\xi-\alpha}{\alpha\xi} - \frac{\xi-\alpha}{B^2}\right]$$

§. 34.

Aufgabe. Diejenige Curve AMB zu bestimmen, welche mit ihrer Evolute ANB (Fig. 9) und den zu den Gränzpunkten A und B gehörigen Krümmungshalbmeßern den möglich kleinsten Flächenraum einschließt.*)

I) Bezeichnet man den zu einem beliebigen Punkt M der gesuchten Curve gehörigen Krümmungshalbmeßer MN mit ϱ und das Curvenelement MM' in demselben Punkte mit ds, so wird das Differenzial der Fläche, welche ein Minimum werden soll, nämlich der verschwindende Sector MM'N', durch $\frac{1}{2}\varrho ds$ angegeben. In Beziehung auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem ist aber $\varrho = \mp\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ und $ds = \pm(1+p^2)^{\frac{1}{2}}dx$

daher $$U = \mp\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\xi \frac{(1+p^2)^2}{q}dx$$

Sehen wir zunächst von dem Factor $\mp\frac{1}{2}$ ab, so haben wir

$$V = \frac{(1+p^2)^2}{q} \quad \frac{dV}{dy} = 0 \quad \frac{dV}{dp} = \frac{4(1+p^2)p}{q} \quad \frac{dV}{dq} = -\frac{(1+p^2)^2}{q^2}$$

Zu Folge der in §. 30 I) gemachten Bemerkung läßt sich wegen $\partial_y V = 0$ die Hauptgleichung ohne Weiteres integriren, so daß man hat

$$4(1+p^2)\frac{p}{q} + \frac{1}{dx}d.\frac{(1+p^2)^2}{q^2} = C_1$$

oder abgekürzt

$$2pdx + d.\frac{1+p^2}{q} - \frac{C_1 q dx}{1+p^2} = 0$$

und durch Integration ergiebt sich

$$(1) \qquad 2y + \frac{1+p^2}{q} - C_1 \operatorname{Arc\,tang} p = C_2$$

*) Euler meth. inv. Cap. III No. 51. Lacroix traité ect. T. II No. 868. Francoeur, Lehrcursus ꝛc. Th. II Buch 4 §. 26. Strauch, Variationscalc. Th. II p. 289 Aufg. 173.

Indem man nun hierin für q den Ausdruck $\frac{dp}{dx} = \frac{pdp}{dy}$ substituirt, und größerer Bequemlichkeit wegen — $C_1 = 2a$, $C_2 = 2c$ setzt, gelangt man zu

$$2ydp + (1+p^2)\frac{dy}{p} + 2a \operatorname{Arc\,tg} p\, dp = 2cdp$$

oder

$$dy + \frac{2p}{1+p^2} ydp = [c - a \operatorname{Arc\,tg} p]\frac{2pdp}{1+p^2}$$

Dieses ist eine lineäre Differenzialgleichung zwischen y und p, und man findet ohne Weiteres als Integral derselben

$$y = e^{-l(1+p^2)}\left(k + \int e^{l(1+p^2)}[c - a \operatorname{Arc\,tg} p]\frac{2pdp}{1+p^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+p^2}[k + cp^2 - a(1+p^2)\operatorname{Arc\,tg} p + ap]$$

wobei wir die neue Integrationsconstante durch k vorgestellt haben. Schreiben wir jedoch $k - b$ anstatt der noch willkührlichen Constanten c, so nimmt die Gleichung die noch einfachere Gestalt an

$$(2) \qquad y - k = \frac{a - bp}{1+p^2} p - a \operatorname{Arc\,tg} p$$

Um nun auch eine Gleichung zwischen x und p zu finden, subtrahiren wir von dieser Gl. (2) die Gleichung (1), nachdem wir darin an die Stelle von C_1 und C_2 ihre Werthe, nämlich

$$C_1 = -2a \qquad C_2 = 2k - 2b$$

eingesetzt und die ganze Gleichung durch 2 dividirt haben. Dadurch entsteht nämlich

$$-\tfrac{1}{2}\frac{1+p^2}{q} = \frac{ap+b}{1+p^2} \qquad \text{oder} \qquad -\tfrac{1}{2} = \frac{ap+b}{(1+p^2)^2} q$$

und wenn man diese Gleichung mit $-2dx$ multiplicirt, so erhält man

$$dx = -\frac{2ap+2b}{(1+p^2)^2} dp$$

Hierin sind die Variablen x und p bereits abgesondert, und man findet ohne Weiteres das Integral

$$(3) \qquad x - h = \frac{a - bp}{1+p^2} - b \operatorname{Arc\,tg} p$$

Durch das System der Gleichungen (2) und (3) ist nun die gesuchte Curve bereits bestimmt; eine endliche Gleichung zwischen x und y würde sich durch Elimination von p aus diesen zwei Gleichungen ergeben. Zu diesem Zwecke kann man sich aus (2) und (3) zunächst eine neue Glei-

chung ableiten, worin Arc tg$p$ fehlt, nämlich

$$(4) \qquad a(x-h)-b(y-k)=\frac{(a-bp)^2}{1+p^2}$$

und sobald man den hieraus leicht zu erhaltenden Werth für p in (2) einsetzt, hat man eine Gleichung von der gewünschten Form $y=f(x)$ mit den vier vorläufig noch unbestimmten Integrationsconstanten a, b, h, k.

Um jedoch diese Gleichung in einer möglichst einfachen Gestalt zu erhalten, so daß man die Natur der durch sie angezeigten Curve sofort erkennt, empfiehlt sich eine Transformation der Coordinaten. Offenbar sind nämlich $(x-h)$ und $(y-k)$ gleichbedeutend mit den Coordinaten x', y' in Beziehung auf einen neuen Anfangspunkt O', dessen Coordinaten im bisherigen System durch h und k angegeben werden, während die neuen Axen $O'X'$, $O'Y'$ mit den ursprünglichen noch gleichgerichtet laufen. Daher läßt sich, wenn wir zugleich den Winkel, unter welchem die Tangente der Curve gegen die Axen $OX \parallel O'X'$ geneigt ist, mit τ bezeichnen, so daß

$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}=\operatorname{Cos}\tau \qquad \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}=\operatorname{Sin}\tau$$

ist, die Gleichung (4) umgestalten in

$$ax'-by'=(a\operatorname{Cos}\tau-b\operatorname{Sin}\tau)^2$$

Ersetzt man hierin die beiden Constanten a, b durch zwei andere A, ϑ dergestalt, daß

$$a=2A\operatorname{Cos}\vartheta \qquad b=2A\operatorname{Sin}\vartheta$$

ist, so hat man

$$x'\operatorname{Cos}\vartheta-y'\operatorname{Sin}\vartheta=2A\operatorname{Cos}(\vartheta+\tau)^2$$

Offenbar ist dieses aber, sobald man durch den neuen Ursprung O' eine Abscissenaxe $O'X''$ unter einem Neigungswinkel $=-\vartheta$ gegen die ursprüngliche Richtung $O'X'$ zieht und die in Beziehung auf die Axen $O'X''$, $O'Y''$ genommenen Coordinaten durch x'', y'' bezeichnet, gleichbedeutend mit

$$x''=\frac{2Adx''^2}{dx''^2+dy''^2}$$

da jetzt $\operatorname{tang}(\vartheta+\tau)=\frac{dy''}{dx''}$ also $\operatorname{Cos}(\vartheta+\tau)^2=\frac{dx''^2}{dx''^2+dy''^2}$ ist. Es folgt hieraus

$$dy''=\pm\sqrt{\frac{2A-x''}{x''}}\,.\,dx''$$

und dieses ist das Differenzial der Scheitelgleichung einer gemeinen Cykloide, deren Erzeugungskreis den Radius A besitzt und deren Axe nach der Richtung unserer Axe der X'' läuft, deren Basis also gegen die ursprüngliche Axe der X unter dem W. $(\frac{\pi}{2} - \vartheta)$ geneigt ist. Sie würde vollständig bestimmt sein, wenn den ursprünglichen Constanten a, b, h, k bestimmte Werthe angewiesen worden wären.

II) Wir werden jetzt suchen für den Fall, daß die beiden Gränzpunkte A, B fix gegeben seien, außerdem aber keine weitere Bedingung vorläge, die genannten vier Constanten zu bestimmen. Unter diesen Umständen ist $[\delta' y]_\alpha = 0$, $[\delta' y]_\xi = 0$ aber $[\delta' p]_\alpha$, $[\delta' p]_\xi$ von Null verschieden, und deshalb haben wir als Gränzgleichungen (§. 30 II)

$$[\vartheta_q V]_\alpha = \left[\frac{1+p^2}{q}\right]_\alpha^2 = 0 \qquad [\vartheta_q V]_\xi = \left[\frac{1+p^2}{q}\right]_\xi^2 = 0$$

Da indessen über die Lage der ursprünglichen Axe der X im Vorhergehenden noch gar keine Verfügung getroffen worden ist, so legen wir dieselbe jetzt zur Erleichterung der Rechnung durch die festen Punkte A und B, wodurch $y_\alpha = y_\xi = 0$ wird. Der Gleichung (1) zu Folge ist nun, da die daselbst vorkommende Constante C_2 im weitern Verlaufe durch $2k - 2b$ ersetzt worden ist,

$$\tfrac{1}{2}\frac{1+p^2}{q} = -y - a \operatorname{Arc\,tang} p + (k-b)$$

Demnach haben wir zuvörderst die zwei Bedingungsgleichungen

$$(5) \qquad \begin{aligned} k - b - a \operatorname{Arc\,tg} p_\alpha &= 0 \\ k - b - a \operatorname{Arc\,tg} p_\xi &= 0 \end{aligned}$$

und mit Rücksicht hierauf folgt aus (2) für $y = y_\alpha = 0$ und $y = y_\xi = 0$ sofort

$$(6) \qquad \left[\frac{ap+b}{1+p^2}\right]_\alpha = 0 \qquad \left[\frac{ap+b}{1+p^2}\right]_\xi = 0$$

andererseits giebt die Gl. (3), indem man sie auf die Abscissen $x = \alpha$, $x = \xi$ bezieht,

$$(7) \qquad \alpha - h = \left[\frac{a-bp}{1+p^2}\right]_\alpha - b \operatorname{Arc\,tg} p_\alpha$$

$$(8) \qquad \xi - h = \left[\frac{a-bp}{1+p^2}\right]_\xi - b \operatorname{Arc\,tg} p_\xi$$

Jede der beiden Gleichungen (6) scheint nun zwar auf zweifache Weise befriedigt werden zu können, nämlich dadurch daß man

$$\partial_q V = 2xyp + x^2y$$
$$d\partial_q V = [2xyq + 2xp^2 + (2y + x^2)p + 2xy]dx$$
$$d^2\partial_q V = [2xyr + (6xp + 4y + x^2)q + 4p^2 + 4xp + 2y]dx^2$$

Hieraus folgt $\partial_y V - \frac{d\partial_p V}{dx} + \frac{d^2\partial_q V}{dx^2} = 0$ und deshalb ist

$$\partial_y u = xp^2 + x^2p + 3xy^2$$
$$\partial_p u = 2xyp + x^2y$$
$$\partial_x u = V - [x(p^2 + xp + 3y^2)p + xy(x + 2p)q] = yp^2 + 2xyp + y^3$$

also

$$du = \left\{\begin{array}{l}(yp^2 + 2xyp + y^3)dx \\ \quad + (xp^2 + x^2p + 3xy^2)dy + (2xyp + x^2y)dp\end{array}\right\}$$

Da nun hier die Coefficienten von dx, dy, dp homogen und zwar von der dritten Dimension sind, so findet man sogleich nach dem bekannten Euler'schen Lehrsatz über die Integration der homogenen Differenzialien

$$u = \tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}(xyp^2 + 2x^2yp + xy^3) \\ + (xyp^2 + x^2yp + 3xy^3) + (2xyp^2 + x^2yp)\end{array}\right\}$$

d. h. $u = xyp^2 + x^2yp + xy^3$

Daher ist $xy(p^2 + xp + y^2) = \text{Const.}$

das Integral der oben vorgelegten Differenzialgleichung.

IV) Wir haben in der vorhergehenden Nro. III) die Existenz der mit u bezeichneten Function $\Phi(x, y, p, q, \ldots) = \int V dx$ vorausgesetzt, und nur unter dieser Voraussetzung sie finden gelehrt. Man kann jedoch auch umgekehrt behaupten, daß wenn die Bedingungsgleichung (6) erfüllt ist, die fragliche Function Φ wirklich existire, — daß also die Gl. (6) nicht nur die nothwendige, sondern auch die ausreichende Bedingung für die Möglichkeit der allgemeinen Integration solcher Ausdrücke wie $V dx = F(x, y, p, q, \ldots)dx$ sei. Der Beweis dieses wichtigen Lehrsatzes scheint sich am einfachsten auf folgende Art führen zu laßen.

Setzen wir $y = y_0 + \omega$ und denken unter y_0 und ω zwei Functionen von x, von denen wir die erstere beliebig annehmen können, so folgt durch Differenziation

$$p = p_0 + \omega' \qquad q = q_0 + \omega'' \qquad r = r_0 + \omega''' \quad \text{u. s. f.}$$

wobei wir die derivirten Functionen von ω durch Accente anzeigen, während $p_0 = \frac{dy_0}{dx}$, $q_0 = \frac{dp_0}{dx}$ u. s. f. sein soll.

Es wird jetzt $V = F(x, y_0 + \omega, p_0 + \omega', q_0 + \omega'', \ldots)$, statt

dieſer Function wollen wir aber zunächſt den Ausdruck

(○) $F(x, y_0+\omega t, p_0+\omega' t, q+\omega'' t, r_0+\omega''' t, \ldots) = \Psi(t)$

betrachten, worin t, unſerm in §. 2 eingeführten Variationsargument vergleichbar, unabhängig von x ſich ſucceſſive ändern ſoll. Alsdann giebt die Differenziation nach t

$$\Psi'(t) = \left(\frac{dF}{dy_0}\omega + \frac{dF}{dp_0}\omega' + \frac{dF}{dq_0}\omega'' + \frac{dF}{dr_0}\omega''' + \cdots\right)$$

und hierin können wir nach Belieben die Größen $\frac{dF}{dy_0}$, $\frac{dF}{dp_0}$, ꝛc. entweder aus (○), oder beßer dadurch bilden, daß wir in den aus $V = F(x, y, p, \ldots)$ herzuleitenden partiellen Differenzialquotienten $\partial_y V$, $\partial_p V$, ... an die Stelle von y, p, q, ... überall die Binome $y_0+\omega t$, $p_0+\omega' t$, $q_0+\omega'' t$, ... einſetzen. Nehmen wir nun an, daß $\Psi(0)$, nämlich der zu $y = y_0$ gehörige Werth von V, welchen wir im Folgenden durch V_0 vorſtellen wollen, nicht etwa unendlich ausfalle, was ſich, da wir für y_0 einen tauglichen Werth beliebig ausſuchen dürfen, immer wird erreichen laßen, und ſetzen wir aus eben dieſem Grunde voraus, daß keiner der Differenzialquotienten $\frac{dF}{dy_0}$, $\frac{dF}{dp_0}$ ꝛc. unendlich werde, während t das Intervall von 0 bis 1 durchläuft d. h. während y von y_0 bis zu $y_0+\omega$ continuirlich zunimmt; ſo erhalten wir nach der Formel $\int_0^1 \Psi'(t)dt = \Psi(1) - \Psi(0) = V - V_0$ ſofort

$$V = V_0 + \int_0^1 \left(\frac{dF}{dy_0}\omega + \frac{dF}{dp_0}\omega' + \frac{dF}{dq_0}\omega'' + \cdots\right)dt$$

alſo

(9) $$\int V dx = \int V_0 dx + \int_0^1 dt \int \left(\frac{dF}{dy_0}\omega + \frac{dF}{dp_0}\omega' + \frac{dF}{dq_0}\omega'' + \cdots\right)dx$$

Hierin iſt die Integration $\int V_0 dx$ unmittelbar ausführbar, weil wir y_0, p_0, q_0 ... als beſtimmte Functionen von x gegenwärtig denken. In concreten Fällen würde man übrigens meiſtens ganz einfache Formen z. B. $y_0 = 0$, oder $y_0 = \text{Const.} = \beta$, oder $y_0 = ax + \beta$ u. dgl. annehmen können. Ferner iſt

$$\int\left(\frac{dF}{dy_0}\omega dx + \frac{dF}{dp_0}\omega' dx + \frac{dF}{dq_0}\omega'' dx + \frac{dF}{dr_0}\omega''' dx + \cdots\right)$$
$$= \int \frac{dF}{dy_0}\omega dx + \int \frac{dF}{dp_0} d\omega + \int \frac{dF}{dq_0} d\frac{d\omega}{dx} + \int \frac{dF}{dr_0} d\frac{d^2\omega}{dx^2} + \cdots$$

und sobald man hierin die hinter $\int \frac{dF}{dy_0}\omega dx$ nachfolgenden Glieder sämmtlich mittelst partieller Integration ganz ebenso behandelt, wie in §. 23 II) in dem analogen Falle geschehen ist, (indem man nur statt des dortigen δy gegenwärtig den Buchstaben ω zu setzen braucht) — so erhält man als Transformation der rechten Seite dieser Gleichung

$$\begin{aligned}&\left(\frac{dF}{dp_0}-\frac{1}{dx}d\frac{dF}{dq_0}+\frac{1}{dx^2}d^2\frac{dF}{dr_0}-\cdots\right)\omega\\&+\left(\frac{dF}{dq_0}-\frac{1}{dx}d\frac{dF}{dr_0}+\cdots\right)\omega'\\&+\left(\frac{dF}{dr_0}-\cdots\right)\omega''\\&+\cdots\\&\cdots\\&+\int\left(\frac{dF}{dy_0}-\frac{1}{dx}d\frac{dF}{dp_0}+\frac{1}{dx^2}d^2\frac{dF}{dq_0}-\frac{1}{dx^3}d^3\frac{dF}{dr_0}+\cdots\right)\omega dx\end{aligned}$$

Hierin verschwindet nun aber das letzte Integral von selbst; denn nach der Voraussetzung soll das Aggregat

$$\frac{dV}{dy}-\frac{1}{dx}d\frac{dV}{dp}+\frac{1}{dx^2}d^2\frac{dV}{dq}-\frac{1}{dx^3}d^3\frac{dV}{dr}+\cdots$$

sich auf Null reduciren, gleichviel was für eine Function von x man anstatt y in $V=F(x,\ y,\ p,\ q,\ldots)$ und die Differenzialquotienten $\frac{dF}{dy}$, $\frac{dF}{dp}$, ꝛc. einsetzt, dasselbe muß also auch Null bleiben, wenn man, wie wir hier gethan haben, $y_0+\omega t$ an die Stelle von y einführt.

Aus diesen Gründen, und weil ω bei der nach t auszuführenden Integration constant bleibt, verwandelt sich (9) in

$$\begin{aligned}\int V dx=\int V_0 dx&+\omega\int_0^1\left(\frac{dF}{dp_0}-\frac{1}{dx}d\frac{dF}{dq_0}+\frac{1}{dx^2}d^2\frac{dF}{dr_0}-\cdots\right)dt\\&+\omega'\int_0^1\left(\frac{dF}{dq_0}-\frac{1}{dx}d\frac{dF}{dr_0}+\cdots\right)dt\\&+\omega''\int_0^1\left(\frac{dF}{dr_0}-\cdots\right)dt\\&+\cdots\end{aligned}\qquad(10)$$

Da nun die Inhalte der unter den Integralzeichen stehenden Parentheſen hier lauter gegebene Ausdrücke ſind, in denen außer x und den Functionen y_0 und ω nebſt ihren Derivirten $p_0, q_0, \ldots \omega', \omega'', \ldots$ noch die Variable t vorkommt, und da bei der Ausführung der angezeigten Integrationen nur t veränderlich iſt, während ſich die erſtgenannten Größen ſämmtlich als Conſtante verhalten: ſo ſieht man, daß die Beſtimmung von $\int V dx$ auf bloße Quadraturen zurückgeführt worden iſt. Hierin liegt der Beweis von der Richtigkeit der oben ausgeſprochenen Behauptung; aber nicht allein dies, ſondern es iſt zugleich hiermit ein von der in III) erklärten Methode etwas verſchiedenes Verfahren zur Berechnung von $\int V dx$ dargelegt. Nach Ausführung der angezeigten Quadraturen hat man natürlich überall $y - y_0$ an die Stelle von ω zu ſetzen, alſo $p - p_0$ an die Stelle von ω', $q - q_0$ an die Stelle von ω'', u. ſ. w.

Zur Erläuterung wollen wir von den beiden zu Nro. III) benutzten Beiſpielen das erſte, nämlich

$$\int V dx = \int (3p + 2ypq + y^2 r) dx$$

auch nach dieſem Verfahren behandeln. Offenbar iſt es hier, ohne daß V aufhörte eine endliche Größe zu ſein, uns erlaubt $y_0 = 0$ anzunehmen, wodurch auch

$$p_0 = 0 \qquad q_0 = 0 \qquad r_0 = 0 \qquad \text{u. ſ. f.}$$

wird. Aus $\partial_y V = 2pq + 2yr$ folgt nun zunächſt

$$\frac{dF}{dy_0} = 2(p_0 + \omega' t)(q_0 + \omega'' t) + 2(y_0 + \omega t)(r_0 + \omega''' t)$$

aber wegen der angegebenen Werthe von y_0, p_0, q_0, r_0 reducirt ſich dieſes auf

$$\frac{dF}{dy_0} = 2(\omega'\omega'' + \omega\omega''')t^2$$

und ebenſo erhält man

$$\frac{dF}{dp_0} = 3 + 2\omega\omega'' t^2 \qquad \frac{dF}{dq_0} = 2\omega\omega' t^2 \qquad \frac{dF}{dr_0} = \omega^2 t^2$$

$$\text{alſo} \qquad \frac{dF}{dq_0} - \frac{1}{dx} d\frac{dF}{dr_0} = 0$$

Ferner wird $V_0 = 0$; daher

$$\int V dx = \text{Const.} + \omega \int_0^1 (3 + 2\omega\omega'' t^2) dt + \omega'' \int_0^1 \omega^2 t^2 dt$$
$$= \text{Const.} + 3\omega + \omega^2 \omega''$$

und ſchließlich, wenn man y und q an die Stelle von ω und ω'' einſetzt,

$$\int V dx = 3y + y^2 q + \text{Const.}$$

Man sieht übrigens, daß in allen Fällen, wenn es die Natur von V wegen Abwesenheit von Divisoren ꝛc. gestattet $y_0 = 0$ anzunehmen, sich die Functionen von t, welche in (10) unter den auf einander folgenden mit ω, ω', ω'', ... multiplicirten Integralzeichen stehen, ganz einfach aus unseren für $\partial_y u$, $\partial_p u$, ... entwickelten Formeln (7) dadurch ergeben, daß man in diesen ωt, $\omega' t$, $\omega'' t$ u. s. f. an die Stelle von y, p, q ... setzt. Auf diese Weise entspringt im vorliegenden Beispiel $(3 + 2\omega\omega'' t^2)$ aus unserm oben gefundenen Werthe $\partial_y u = 3 + 2yq$ und $\omega^2 t^2$ aus $\partial_q u = y^2$.

§. 33.

Wir laßen nun noch die vollständige Bearbeitung zweier Aufgaben über das Maximum resp. Minimum der Integralausdrücke $\int V dx$ folgen, von denen die eine in V keine höhern Differenzialquotienten als $\frac{dy}{dx}$, die andere aber außer $\frac{dy}{dx}$ auch noch $\frac{d^2y}{dx^2}$ enthält.*)

Aufgabe. Es wird diejenige Beschaffenheit von $y = f(x)$ gesucht, wodurch

$$U = \int_a^\xi \left(\frac{2ay}{x^2} - \frac{dy^2}{dx^2} \right) dx$$

zu einem Maximum oder Minimum gemacht wird. — Es ist dieses dasjenige Integral, von welchem wir bereits in §. 23 in einer anderen Ab-

*) Wenn der geneigte Leser, nachdem er die Auflösung der im vorliegenden Buche behandelten Aufgaben durchgegangen hat, zur Uebung noch andere Beispiele bearbeiten mögte, so wird er außer in den Werken von Euler und Strauch, die wir bereits in §. 8 beziehungsw. §. 5 citirt haben, eine hinreichende Auswahl finden in

Hohl, Aufgaben zur Lehre vom Größten und Kleinsten der Differenzialfunctionen, Stuttgart 1852. (enthält Aufgaben ohne Integralien, wie die in unserm zweiten Capitel behandelten);

Francoeur, Vollständiger Lehrcurs der reinen Math. IIn Bandes 4s Buch §. 23 fgg. (enthält eine Zusammenstellung der wichtigsten Euler'schen Aufgaben über Integrale);

Ohm, Uebungsaufgaben zur Lehre vom Größten und Kleinsten, als zweiter Anhang zum VII. Theil seines „Systems der Mathematik" (enthält Aufgaben von beiden Arten).

ſicht Erwähnung gethan haben. Dabei ſetzen wir, damit innerhalb des Integrationsintervalls die Indepenbente x nicht Null werde, $0<\alpha<\xi$ voraus.

I) Wir haben hier $V=\frac{2ay}{x^2}-p^2$, alſo

$$\frac{dV}{dy}=\frac{2a}{x^2} \qquad \frac{dV}{dp}=-2p \qquad d\frac{dV}{dp}=-2qdx$$

daher beſteht als Hauptgleichung die Bedingung

$$(1) \qquad \frac{2a}{x^2}+2q=0$$

Hieraus folgt $dp=-\frac{adx}{x^2}$ alſo durch Integration

$$p=\frac{a}{x}+\text{Const.}=\frac{a}{x}+\frac{a}{B}$$

und dieſe Gleichung mit dx multiplicirt und nochmals integrirt giebt als geſuchte Function

$$(2) \qquad y=a\log\frac{x}{A}+\frac{ax}{B}$$

worin der Logarithmus ein hyperboliſcher iſt.

II) Um zuzuſehen, ob wir von dieſer Gleichung (2) ein Maximum oder Minimum für U erwarten dürfen, berechnen wir zuvörderſt den variirten Werth von V, nämlich

$$V+\nabla V=\frac{2a}{x^2}(y+\nabla y)-(p+\nabla p)^2=\begin{array}{l|l}\frac{2ay}{x^2} & +\frac{2a}{x^2}\nabla y \\ -p^2 & -2p\nabla p\end{array}-\nabla p^2$$

Hier erhält nun $\int_\alpha^\xi \Xi_2 dx=-\int_\alpha^\xi \nabla p^2 dx$ offenbar einen negativen Werth, daher haben wir ein Maximum gefunden (§. 28 1).

III) Dieſes Maximum läßt ſich auch ohne Mühe berechnen. Es wird nämlich, wenn wir diejenige Function $F(x)$, in welche ſich V durch Einführung der gefundenen Functionen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)\ldots$ verwandelt, der in §. 28 benutzten Bezeichnung gemäß durch V_0 vorſtellen,

$$V_0=\frac{2a^2}{x^2}\log\frac{x}{A}-a^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{B^2}\right).$$

und da $\int\frac{2}{x^2}l\frac{x}{A}dx=-\frac{2}{x}l\frac{x}{A}-\frac{2}{x}$ iſt, ſo erhält man

$$\int V_0 dx=-\frac{2a^2}{x}l\frac{x}{A}-\frac{a^2}{x}-\frac{a^2x}{B^2}+\text{Const.}$$

Wegen der in Betreff der Integrationsgränzen gemachten Voraussetzung $0<\alpha<\xi$ folgt hieraus

$$U_0 = \int_\alpha^\xi V_0 dx = a^2\left[\frac{2}{\alpha} l\frac{\alpha}{A} - \frac{2}{\xi} l\frac{\xi}{A} + \frac{\xi-\alpha}{\alpha\xi} - \frac{\xi-\alpha}{B^2}\right]$$

§. 34.

Aufgabe. Diejenige Curve **AMB** zu bestimmen, welche mit ihrer Evolute **ANB** (Fig. 9) und den zu den Gränzpunkten **A** und **B** gehörigen Krümmungshalbmeßern den möglich kleinsten Flächenraum einschließt.*)

I) Bezeichnet man den zu einem beliebigen Punkt **M** der gesuchten Curve gehörigen Krümmungshalbmeßer **MN** mit ϱ und das Curvenelement **MM'** in demselben Punkte mit ds, so wird das Differenzial der Fläche, welche ein Minimum werden soll, nämlich der verschwindende Sector **MM'N'**, durch $\frac{1}{2}\varrho ds$ angegeben. In Beziehung auf ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem ist aber $\varrho = \mp\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ und $ds = \pm(1+p^2)^{\frac{1}{2}}dx$

daher $$U = \mp\tfrac{1}{2}\int_\alpha^\xi \frac{(1+p^2)^2}{q}dx$$

Sehen wir zunächst von dem Factor $\mp\frac{1}{2}$ ab, so haben wir

$$V = \frac{(1+p^2)^2}{q} \quad \frac{dV}{dy} = 0 \quad \frac{dV}{dp} = \frac{4(1+p^2)p}{q} \quad \frac{dV}{dq} = -\frac{(1+p^2)^2}{q^2}$$

Zu Folge der in §. 30 I) gemachten Bemerkung läßt sich wegen $\partial_y V = 0$ die Hauptgleichung ohne Weiteres integriren, so daß man hat

$$4(1+p^2)\frac{p}{q} + \frac{1}{dx}d.\frac{(1+p^2)^2}{q^2} = C_1$$

oder abgekürzt

$$2pdx + d.\frac{1+p^2}{q} - \frac{C_1 q dx}{1+p^2} = 0$$

und durch Integration ergiebt sich

$$(1) \qquad 2y + \frac{1+p^2}{q} - C_1 \operatorname{Arc\,tang} p = C_2$$

*) Euler meth. inv. Cap. III No. 51. Lacroix traité ect. T. II No. 868. Francoeur, Lehrcursus ꝛc. Th. II Buch 4 §. 26. Strauch, Variationscalc. Th. II p. 289 Aufg. 173.

Indem man nun hierin für q den Ausdruck $\frac{dp}{dx} = \frac{pdp}{dy}$ substituirt, und größerer Bequemlichkeit wegen $-C_1 = 2a$, $C_2 = 2c$ setzt, gelangt man zu

$$2ydp + (1+p^2)\frac{dy}{p} + 2a \operatorname{Arc\,tg} p\, dp = 2cdp$$

oder

$$dy + \frac{2p}{1+p^2} ydp = [c - a \operatorname{Arc\,tg} p]\frac{2pdp}{1+p^2}$$

Dieses ist eine lineäre Differenzialgleichung zwischen y und p, und man findet ohne Weiteres als Integral derselben

$$y = e^{-l(1+p^2)}\left(k + \int e^{l(1+p^2)}[c - a \operatorname{Arc\,tg} p]\frac{2pdp}{1+p^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+p^2}[k + cp^2 - a(1+p^2)\operatorname{Arc\,tg} p + ap]$$

wobei wir die neue Integrationsconstante durch k vorgestellt haben. Schreiben wir jedoch $k - b$ anstatt der noch willkührlichen Constanten c, so nimmt die Gleichung die noch einfachere Gestalt an

$$(2) \qquad y - k = \frac{a - bp}{1+p^2} p - a \operatorname{Arc\,tg} p$$

Um nun auch eine Gleichung zwischen x und p zu finden, subtrahiren wir von dieser Gl. (2) die Gleichung (1), nachdem wir darin an die Stelle von C_1 und C_2 ihre Werthe, nämlich

$$C_1 = -2a \qquad C_2 = 2k - 2b$$

eingesetzt und die ganze Gleichung durch 2 dividirt haben. Dadurch entsteht nämlich

$$-\tfrac{1}{2}\frac{1+p^2}{q} = \frac{ap+b}{1+p^2} \qquad \text{oder} \qquad -\tfrac{1}{2} = \frac{ap+b}{(1+p^2)^2} q$$

und wenn man diese Gleichung mit $-2dx$ multiplicirt, so erhält man

$$dx = -\frac{2ap + 2b}{(1+p^2)^2} dp$$

Hierin sind die Variablen x und p bereits abgesondert, und man findet ohne Weiteres das Integral

$$(3) \qquad x - h = \frac{a - bp}{1+p^2} - b \operatorname{Arc\,tg} p$$

Durch das System der Gleichungen (2) und (3) ist nun die gesuchte Curve bereits bestimmt; eine endliche Gleichung zwischen x und y würde sich durch Elimination von p aus diesen zwei Gleichungen ergeben. Zu diesem Zwecke kann man sich aus (2) und (3) zunächst eine neue Glei-

$$\delta\mathfrak{W}_{1\cdot n} = \mathfrak{A}_0 u.u_{00} + \frac{u}{dx}d\left(\mathfrak{A}_1\frac{d.u_{00}}{dx}\right) + \frac{u}{dx^2}d^2\left(\mathfrak{A}_2\frac{d^2.u_{00}}{dx^2}\right)$$
$$+ \frac{u}{dx^3}d^3\left(\mathfrak{A}_3\frac{d^3.u_{00}}{dx^3}\right)$$
$$(3) \qquad + \quad . \quad . \quad .$$
$$+ \frac{u}{dx^n}d^n\left(\mathfrak{A}_n\frac{d^n.u_{00}}{dx^n}\right)$$

Nehmen wir ein beliebiges Glied aus dieſem Aggregat heraus, nämlich

$$\frac{u}{dx^r}d^r\left(\mathfrak{A}_r\frac{d^r.u_{00}}{dx^r}\right)$$

wobei r irgend eine ganze Zahl zwiſchen 1 und n bedeuten ſoll, ſo können wir daſſelbe unmittelbar umformen in

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{dx^{r-1}}d^{r-1}\left(\mathfrak{A}_r\frac{d^r.u_{00}}{dx^r}\right)\right] - \frac{u'}{dx^{r-1}}d^{r-1}\left(\mathfrak{A}_r\frac{d^r.u_{00}}{dx^r}\right)$$

worin u' die derivirte Function von u anzeigt. Der erſte Beſtandtheil dieſes Ausdrucks iſt ein vollſtändiger Differenzialquotient und läßt ſich nach vorgängiger Multiplikation mit dx ohne Weiteres integriren; der Subtrahendus dagegen läßt ſich wieder in derſelben Weiſe transformiren wie mit dem urſprünglichen Ausdrucke geſchehen iſt, nämlich in

$$-\frac{d}{dx}\left[\frac{u'}{dx^{r-2}}d^{r-2}\left(\mathfrak{A}_r\frac{d^r.u_{00}}{dx^r}\right)\right] + \frac{u''}{dx^{r-2}}d^{r-2}\left(\mathfrak{A}_r\frac{d^r.u_{00}}{dx^r}\right)$$

Das zweite Glied hiervon iſt wieder gleichbedeutend mit

$$+\frac{d}{dx}\left[\frac{u''}{dx^{r-3}}d^{r-3}\left(\mathfrak{A}_r\frac{d^r.u_{00}}{dx^r}\right)\right] - \frac{u'''}{dx^{r-3}}d^{r-3}\left(\mathfrak{A}_r\frac{d^r.u_{00}}{dx^r}\right)$$

u. ſ. f.

Auf dieſem Wege immer weiter fortſchreitend werden wir, wenn wir $\frac{d^r u}{dx^r}$ durch $u^{[r]}$ vorſtellen, ſchließlich zu

$$(-1)^{r-1}\frac{d}{dx}\left[u^{[r-1]}.\mathfrak{A}_r\frac{d^r.u_{00}}{dx^r}\right] + (-1)^r u^{[r]}\mathfrak{A}_r\frac{d^r.u_{00}}{dx^r}$$

gelangen. Der letzte Beſtandtheil hiervon aber, nämlich

$$(4) \qquad (-1)^r u^{[r]}\mathfrak{A}_r\frac{d^r.u_{00}}{dx^r}$$

läßt ſich nun nicht mehr in die Form eines vollſtändigen Differenzialquotienten bringen.

Dieſe Betrachtung, auf jedes einzelne der Glieder bezogen, welche auf der rechten Seite der Gleichung (3) hinter $\mathfrak{A}_0 u.u_{00}$ nachfolgen, führt

sogleich zu dem Resultat, daß es, abgesehen von den eben angedeuteten unmittelbar integrablen Bestandtheilen von $\delta\mathfrak{W}_1 u dx$, nur noch auf das Aggregat

$$u\mathfrak{A}_0 u\omega - u'\mathfrak{A}_1\frac{du\omega}{dx} + u''\mathfrak{A}_2\frac{d^2u\omega}{dx^2} - u'''\mathfrak{A}_3\frac{d^3u\omega}{dx^3} + \cdots$$

$$\pm u^{[n-1]}\mathfrak{A}_{n-1}\frac{d^{n-1}u\omega}{dx^{n-1}} \mp u^{[n]}\mathfrak{A}_n\frac{d^n u\omega}{dx^n} \tag{5}$$

ankommt, worin die auf das Anfangsglied nachfolgenden Glieder aus (4) hervorgehen, indem man successiv r gleich 1, 2, 3, ... setzt. Wird der Kürze wegen diese Summe durch S bezeichnet, so findet man leicht

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{d\omega} &= \mathfrak{A}_0 uu - \mathfrak{A}_1 u'u' + \binom{2}{0}\mathfrak{A}_2 u''u'' - \binom{3}{0}\mathfrak{A}_3 u'''u''' + \cdots \mp \binom{n}{0}\mathfrak{A}_n u^{[n]}u^{[n]} \\
\frac{dS}{d\omega'} &= -\mathfrak{A}_1 u'u + \binom{2}{1}\mathfrak{A}_2 u''u' - \binom{3}{1}\mathfrak{A}_3 u'''u'' + \cdots \mp \binom{n}{1}\mathfrak{A}_n u^{[n]}u^{[n-1]} \\
\frac{dS}{d\omega''} &= \binom{2}{2}\mathfrak{A}_2 u''u - \binom{3}{2}\mathfrak{A}_3 u'''u' + \cdots \mp \binom{n}{2}\mathfrak{A}_n u^{[n]}u^{[n-2]} \\
\frac{dS}{d\omega'''} &= -\binom{3}{3}\mathfrak{A}_3 u'''u + \cdots \mp \binom{n}{3}\mathfrak{A}_n u^{[n]}u^{[n-3]} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dS}{d\omega^{[n]}} &= \mp\binom{n}{n}\mathfrak{A}_n u^{[n]}u
\end{aligned} \tag{6}$$

worin $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$, $\binom{2}{2} = 1$ die in die Entwickelung von $\frac{d^2u\omega}{dx^2}$ eintretenden Binomialcoefficienten zur zweiten Potenz, $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{3}{3}$ die Binomialcoefficienten zur dritten Potenz u. s. f. anzeigen. Zu Folge §. 32 III) kommt es nun auf die Untersuchung von

$$\frac{dS}{d\omega} - \frac{1}{dx}d\frac{dS}{d\omega'} + \cdots + (-1)^r\frac{d^r}{dx^r}\left(\frac{dS}{d\omega^{[r]}}\right)\cdots \pm\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{dS}{d\omega^{[n]}}\right)$$

an; wenn sich zeigen läßt, daß diese Größe gleich Null ausfallen müße, so ist die Integrabilität von $\delta\mathfrak{W}_1 u dx$ bewiesen. Es ist aber, wenn r wieder eine ganze Zahl zwischen 1 und n bedeutet,

$$\begin{aligned}
&\binom{r}{0}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r]} - \frac{d}{dx}\left[\binom{r}{1}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r-1]}\right] + \frac{d^2}{dx^2}\left[\binom{r}{2}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r-2]}\right] - \cdots \\
&\quad - (-1)^r\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\left[\binom{r}{r-1}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u'\right] + (-1)^r\frac{d^r}{dx^r}\left[\binom{r}{r}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u\right]
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{r}\text{entweder } p_\alpha = \pm\infty \\ \text{oder } p_\alpha = -\frac{b}{a}\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r}\text{entweder } p_\xi = \pm\infty \\ \text{oder } p_\xi = -\frac{b}{a}\end{array}\right\}$$

daraus folgerte. Diese Auflösungen reduciren sich aber paarweise auf eine einzige, weil der Werth für $\frac{b}{a}$ selbst unter der Form $\frac{1}{0}$ steht. Denn sobald wir in der Gleichung (4)

zuerst $\quad x = \alpha \qquad y = 0 \qquad p = p_\alpha = -\frac{b}{a}$

und dann $\quad x = \xi \qquad y = 0 \qquad p = p_\xi = -\frac{b}{a}$

einsetzen, so erhalten wir

$$a\alpha - ah + bk = a^2 + b^2$$
$$a\xi - ah + bk = a^2 + b^2$$

also $$a(\xi - \alpha) = 0$$

woraus, weil nach der Voraussetzung $(\xi - \alpha)$ eine positive Größe ist, $a = 0$ folgt. Wenn man dagegen annehmen wollte, daß von den beiden Größen p_α, p_ξ die eine unendlich wäre, die andere aber $(= -\frac{b}{a})$ einen endlichen Werth besäße, z. B. wenn $p_\xi = -\frac{b}{a}$ und $p_\alpha = \frac{1}{0}$ also Arc tg $p_\alpha = \pm\frac{1}{2}\pi$ sein sollte, so würde die aus der Subtraction der Gleichungen (5) entspringende Bedingungsgleichung

$$a\left[\pm\frac{\pi}{2} + \text{Arc tg}\frac{b}{a}\right] = 0$$

ebenfalls zur Folgerung $a = 0$ nöthigen. Zugleich mit $a = 0$ kann aber nicht etwa auch $b = 0$ sein, weil die Gleichung (3) bei dieser Annahme sich auf $x = \text{Const.} = h$ reducirte. Daher ist $\frac{b}{a} = \frac{1}{0}$, und wie wir behauptet hatten, p_α, p_ξ beide zugleich unendlich. Es müßen also die Tangenten der Cykloide in den Gränzpunkten A, B perpendikulär auf der Abscissenaxe AB stehen.

Aus diesen Gründen sind nun die Gleichungen (5), (7), (8) gleichbedeutend mit

$$k - b = 0$$
$$h - \alpha \pm \tfrac{1}{2}\pi b = 0$$
$$h - \xi \pm \tfrac{1}{2}\pi b = 0$$

Die Bedingung $\xi > \alpha$ macht aber nothwendig, daß die Größe $\frac{1}{2}\pi b$ in den beiden letzten Gleichungen mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen werde; daher giebt

die Addition derselben $\quad \xi + \alpha = 2h$

die Subtraction aber $\quad \xi - \alpha = \pm\pi b$

und die zu bestimmenden vier Constanten erhalten also die Werthe

$$a = 0 \qquad h = \tfrac{1}{2}(\xi + \alpha)$$

$$(9) \qquad b = \pm\frac{1}{\pi}(\xi - \alpha) \qquad k = b$$

Wegen $a = 0$ und $k = b$ zieht sich aber die Gl. (4) zusammen in $y - b = -\frac{bp^2}{1+p^2}$ d. h.

$$(10) \qquad (1+p^2)y = b$$

woraus folgt $\quad p = \pm\frac{\sqrt{by - yy}}{y} \quad$ oder $\quad dx = \pm\frac{ydy}{\sqrt{by - yy}}$

Nehmen wir diejenige Seite des Coordinatenfeldes, auf welcher der im Punkte A $[x = \alpha,\ y = 0]$ anfangende Bogen der Cykloide liegt, als die Seite der positiven Y, so sind gleichzeitig mit dx auch dy und y positiv.

Bei dieser Lage der Coordinatenaxen ist also in der letzten Gleichung von den doppelten Vorzeichen das obere anzuwenden, und wir erhalten durch Integration

$$(11) \qquad x - \alpha = \tfrac{1}{2}b \operatorname{Arc\,Cos}\frac{\frac{1}{2}b - y}{\frac{1}{2}b} - \sqrt{by - y^2}$$

Diese Gleichung lehrt, daß die Basis der Cykloide mit der Axe der X d. h. mit der Geraden AB zusammenfalle, so wie, daß man der Constanten b keinen negativen Werth anweisen könne, daß man also in (9)

$$(12) \qquad b = +\frac{1}{\pi}(\xi - \alpha) = \frac{1}{\pi}\overline{AB}$$

zu nehmen habe, mit andern Worten, daß sich der Wälzungskreis auf der Basis AB gerade einmal abgerollt habe, daß also die gesuchte Minimums- oder Maximumsfläche wirklich so gestaltet sei wie sie in Fig. 9 vorgestellt worden ist. Bekanntlich sind die Bogen AND und DB, von welchen die Evolute gebildet wird, mit den Bogen AMC und CB durchaus gleiche Cykloiden.

III) Obwohl nun aus der Natur der Aufgabe schon erhellt, daß für die in Untersuchung stehende Fläche $U = \frac{1}{2}\int \varrho ds$ ein Maximum nicht möglich sei, so wird es sich doch der Mühe lohnen durch den Calkul direkt

zu prüfen, ob wirklich diese Fläche, wenn man eine von der Cykloide AMCB abweichende Curve zwischen den gegebenen Punkten A und B ziehen wollte, immer größer ausfallen werde als das zur Gleichung (11) gehörige U_0.

Da in der Cykloide $q = \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{1}{2}b}{yy}$ durchweg negativ ist, so haben wir für den Krümmungshalbmeßer die Formel $\varrho = -\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$ anzuwenden. Wollte man nämlich, was zu andern Zwecken manchmal nützliche Dienste leistet, den Krümmungshalbmeßer bald als positive bald als negative Größe nehmen, je nachdem die Curve concav oder conver gegen die Abscissenaxe liegt, so würde unsere Aufgabe keinen bestimmten Sinn mehr haben, weil sich durch Annahme einer mit einem Wendungspunkte zwischen A und B versehenen Curve bewirken ließe, daß die fragliche Fläche gleich Null würde oder beliebig große *negative* Werthe erhielte. Wir haben daher zu setzen

$$U = \tfrac{1}{2}\int \varrho\, ds = -\tfrac{1}{2}\int_a^\xi \frac{(1+p^2)^2}{q}\,dx$$

$$U + \nabla U = -\tfrac{1}{2}\int_a^\xi \Big(1 + [p+\nabla p]^2\Big)^2 \frac{1}{q+\nabla q}\,dx$$

Hierin ist nun

$$(1+p^2+2p\nabla p+\nabla p^2)^2 = (1+p^2)^2 + 4(1+p^2)p\nabla p + 2(1+3p^2)\nabla p^2 + \cdots$$

$$\frac{1}{q+\nabla q} = \frac{1}{q} - \frac{\nabla q}{q^2} + \frac{\nabla q^2}{q^3} - \cdots$$

daher die in §. 28 I) durch Ξ_2 bezeichnete Summe

$$-\tfrac{1}{2}\Big(\frac{2(1+3p^2)}{q}\nabla p^2 - \frac{4(1+p^2)}{q^2}\nabla p\nabla q + \frac{(1+p^2)^2}{q^3}\nabla q^2\Big)$$

$$= -\frac{1}{2q}\Big(2(1+p^2)\nabla p^2 + [2p\nabla p - \frac{1+p^2}{q}\nabla q]^2\Big)$$

Da innerhalb des Integrationsintervalls weder die negative Größe $\frac{1}{q} = -\frac{yy}{\frac{1}{2}b}$ noch p unendlich wird, so ist die Möglichkeit daß, obwohl Ξ_2 während des Integrationsintervalls fortwährend positiv ist, dennoch $\int \Xi_2 dx$ vielleicht negativ ausfiele, hier abgeschnitten; es besitzt also

$\int_\alpha^\xi Z_2 dx$, gerade wie $U_0 = -\frac{1}{2}\int_\alpha^\xi \frac{(1+p^2)^2}{q} dx$ selbst, einen positiven Werth d. h. es ist U_0 wirklich ein Minimum.

Der Ausdruck für dieses Minimum U_0 gestaltet sich sehr einfach. Zu Folge unserer obigen Gleichung (10) ist nämlich

$$(1+p^2)^2 = \frac{b^2}{y^2}$$

daher $$V_0 = \frac{-\frac{1}{2}(1+p^2)^2}{q} = b$$

und hieraus $$U_0 = \int_\alpha^\xi b dx = b(\xi - \alpha)$$

oder vermöge (12) $$U_0 = \pi b^2$$

also an Inhalt gleich dem über CD als Durchmeßer beschriebenen Kreise.

Anmerkung. Wir benutzen das hier gewonnene Resultat, um nochmals die in §. 30 gemachte Bemerkung über den Gebrauch der Gränzgleichungen zur Bestimmung der Integrationsconstanten zu bestätigen. Da bei der Integration der ursprünglichen Differenzialgleichung vier unbestimmte Constanten eintreten mußten, so sagt Euler am Schluße seiner Behandlung: **Ex quo intelligitur curvam quaesito respondentem esse Cycloidem, quae per quatuor data puncta determinatur.** Spätere Bearbeiter derselben Aufgabe wiederholen dies, oder verlangen, daß zur Bestimmung der gedachten vier Constanten außer den Gränzpunkten A und B noch die Tangenten dieser Punkte oder sonst zwei Bestimmungsstücke der Curve gegeben seien. Gleichwohl darf man hierbei nicht unbeachtet laßen, daß so oft in einer derartigen Aufgabe die Integrationsconstanten ohne Benutzung der Gränzgleichungen aus anderen Bedingungen bestimmt würden, durch die auf diese Weise erhaltene Gleichung $y = f(x)$ eigentlich nicht die ursprünglich formulirte Aufgabe, sondern eine merklich beschränktere aufgelöst wird. Denn wenn man z. B. die Lage der Tangenten in den Gränzpunkten A und B als gegeben voraussetzt und zur Bestimmung von zwei Constanten benutzt, so erhält man für U nicht ein Minimum in Vergleich mit allen überhaupt möglichen Curven zwischen A und B, sondern nur in Vergleich mit solchen, welche an diesen Gränzpunkten unter sich (und mit der gesuchten Curve) in einer Berührung der ersten Ordnung

stehen. Und durch diese Beschränkung in der Auswahl der variirenden Curven erleidet der Sinn der Aufgabe eine nicht zu übersehende Modifikation.

§. 35.

Obwohl es uns bei den im Verlaufe dieses Capitels behandelten Aufgaben gelungen ist, die Frage, ob die durch Integration der Hauptgleichung gefundene Function $y = f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum geliefert habe, nach den in §. 28 von uns entwickelten Regeln leicht zu entscheiden, so darf man doch nicht glauben, daß man mit diesem Verfahren in allen Fällen ausreiche. Denn da es, wie wir im angeführten Paragraphen unter IV) bereits bemerkt haben, unter Umständen auf eine zweckmäßige Transformation des Ausdrucks $\int \Xi_2 dx$ ankommt, so kann es sich leicht ereignen, daß man viele Mühe aufwendet und an das gewünschte Ziel doch nicht gelangt. Wir glauben daher zum Beschluße noch eine Methode auseinandersetzen zu müßen, welche zur Entscheidung der angeregten Frage von Jacobi angegeben worden ist*) und wodurch dieser tiefsinnige Geometer nicht nur eine bis hierher unvollkommen ausgefüllte Lücke in der Lehre vom Maximum und Minimum geebnet, sondern zugleich drei für die reine Theorie der Functionen sehr interessante Sätze aufgestellt hat.

Erster Lehrsatz: Bezeichnet man den linken Theil der Hauptgleichung (§. 25) nämlich den Ausdruck

$$\partial_y V - \frac{1}{dx} d\partial_p V + \frac{1}{dx^2} d^2 \partial_q V - \frac{1}{dx^3} d^3 \partial_r V + \cdots$$

durch $\mathfrak{W}$, so läßt sich die Variation $\delta\mathfrak{W}$ auf folgende Form bringen

$$\delta\mathfrak{W} = \mathfrak{A}_0 \delta y + \frac{1}{dx} d\left(\mathfrak{A}_1 \frac{d\delta y}{dx}\right) + \frac{1}{dx^2} d^2\left(\mathfrak{A}_2 \frac{d^2\delta y}{dx^2}\right) + \cdots$$

worin $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, .. gewisse aus den partiellen Differenzialquotienen zweiter Ordnung von V gebildete Functionen sind.

I) Man erhält nämlich zunächst

---

*) Crelle's Journal für d. Math. T. XVII (1837) p. 68. Auch in dem von Liouville herausgegebenen Journal de Mathématiques, T. III (1838) p. 44.

$$\delta\mathfrak{W} = \partial^1_y V\delta y + \partial^1_p V\delta p + \partial^1_q V\delta q + \partial^1_r V\delta r + \cdots$$
$$- \frac{1}{dx} d\,[\partial^1_y V\delta y + \partial^1_p V\delta p + \partial^1_q V\delta q + \partial^1_r V\delta r + \cdots]$$
$$(1) \quad + \frac{1}{dx^2} d^2[\partial^2_{yy} V\delta y + \partial^2_{pq} V\delta p + \partial^2_{qq} V\delta q + \partial^2_{qr} V\delta r + \cdots]$$
$$- \frac{1}{dx^3} d^3[\partial^3_{yr} V\delta y + \partial^3_{pr} V\delta p + \partial^3_{qr} V\delta q + \partial^3_{rr} V\delta r + \cdots]$$
$$+ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

Diese Entwickelung stützt sich darauf, daß für jeden Werth der ganzen positiven Zahl n die Ausdrücke $\delta\left(\frac{1}{dx^n} d^n V_n\right)$ und $\frac{1}{dx^n} d^n \delta V_n$ identisch sind, wobei V_n den nten von den partiellen Differenzialquotienten $\partial_p V$, $\partial_q V, \ldots$ vorstellt. Da die Uebertragung der in §. 3 bewiesenen Gleichung $\delta d^n y = d^n \delta y$ auf den vorliegenden Fall vielleicht aus dem Grunde beanstandet werden könnte, weil dort δy eine unmittelbare Variation war, während gegenwärtig V_n nur vermöge des Einschlußes von $y, p, q, \ldots$ mittelbar variirt (§. 5), so wollen wir zur vollständigeren Begründung die nöthige Anweisung geben. Es reicht zu diesem Zwecke schon hin, indem wir unter v irgend eine Function von $x, y, p, q, \ldots$ verstehen, die einzige Gleichung

$$(2) \qquad \delta dv = d\delta v$$

zu erweisen; denn offenbar wird man hiervon ausgehend auf dem in §. 3 eingeschlagenen Wege zu $\delta d^n v = d^n \delta v$ gelangen.

Nun ist

$$\begin{aligned}
\delta dv = {} & \delta(\partial_x v dx + \partial_y v dy + \partial_p v dp + \cdots) \\
= {} & \left\{ \begin{array}{l} \quad + \partial_y v \delta dy + \partial_p v \delta dp + \cdots \\ \partial\partial_x v dx + \delta\partial_y v dy + \delta\partial_p v dp + \cdots \end{array} \right. \\
= {} & \partial_y v . d\delta y + \partial_p v . d\delta p + \cdots \\
& + [\partial^2_{xy} v \delta y + \partial^2_{xp} v \delta p + \cdots] dx \\
& + [\partial^2_{yy} v \delta y + \partial^2_{yp} v \delta p + \cdots] dy \\
& + [\partial^2_{yp} v \delta y + \partial^2_{pp} v \delta p + \cdots] dp \\
& + \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{aligned}$$

Summirt man hier in Vertikalcolumnen, so wird

die erste gleich $\partial_y v . d\delta y + d\partial_y v . \delta y = d(\partial_y v . \delta y)$

die zweite gleich $\partial_p v . d\delta p + d\partial_p v . \delta p = d(\partial_p v . \delta p)$

u. s. f.

also die ganze Summe gleich

$$d(\partial_y V \delta y + \partial_p V \delta p + \cdots) = d\delta V$$

was zu beweisen war.

II) Nun beachte man für den Fall, daß in V nur x, y, p vorkommen, die Transformation

$$-\frac{1}{dx} d\left[\partial^2_{yp} V \delta y\right] + \partial^2_{yp} V \delta p = -\frac{d\partial^2_{yp} V}{dx} \delta y$$

Ferner, wenn in V auch noch q enthalten ist, hat man

$$\frac{1}{dx^2} d^2\left[\partial^2_{yq} V \delta y\right] + \partial^2_{yq} V \delta q = \frac{d^2 \partial^2_{yq} V}{dx^2} \delta y + 2\frac{d}{dx}\left[\partial^2_{yq} V \delta p\right]$$

und $$\frac{1}{dx^2} d^2\left[\partial^2_{pq} V \delta p\right] - \frac{d}{dx}\left[\partial^2_{pq} V \delta q\right] = \frac{1}{dx} d\left[\frac{d\partial^2_{pq} V}{dx} \delta p\right]$$

Ferner, wenn außer p und q auch noch r in V vorkommt, wird

$$-\frac{1}{dx^3} d^3\left[\partial^2_{yr} V \delta y\right] + \partial^2_{yr} V \delta r = -\frac{d^3 \partial^2_{yr} V}{dx^3} \delta y - 3\frac{d}{dx}\left[\frac{d\partial^2_{yr} V}{dx} \delta p\right]$$

$$-\frac{1}{dx^3} d^3\left[\partial^2_{pr} V \delta p\right] - \frac{1}{dx} d\left[\partial^2_{pr} V \delta r\right]$$

$$= -\frac{1}{dx} d\left(2\partial^2_{pr} V \delta r + 2\frac{d\partial^2_{pr} V}{dx} \delta q + \frac{d^2 \partial^2_{pr} V}{dx^2} \delta p\right)$$

$$= -\frac{2}{dx^2} d^2\left[\partial^2_{pr} V \delta q\right] - \frac{1}{dx} d\left[\frac{d^2 \partial^2_{pr} V}{dx^2} \delta p\right]$$

$$-\frac{d^3}{dx^3}\left[\partial^2_{qr} V \delta q\right] + \frac{1}{dx^2} d^2\left[\partial^2_{qr} V \delta r\right] = -\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d\partial^2_{qr} V}{dx} \delta q\right]$$

u. s. w.

Mittelst dieser Transformationen folgt nun aus (1) im Ganzen $\delta W =$

$$\left(\partial^2_{yy} V - \frac{d\partial^2_{yp} V}{dx} + \frac{d^2 \partial^2_{yq} V}{dx^2} - \frac{d^3 \partial^2_{yr} V}{dx^3} + \cdots\right) \delta y$$

$$-\frac{d}{dx}\left[\left(\partial^2_{pp} V - 2\partial^2_{yq} V - \frac{d\partial^2_{pq} V}{dx} + 3\frac{d\partial^2_{yr} V}{dx} + \frac{d^2 \partial^2_{pr} V}{dx^2} - \cdots\right) \delta p\right]$$

(3)
$$+\frac{1}{dx^2} d^2\left[\left(\partial^2_{qq} V - 2\partial^2_{pr} V - \frac{d\partial^2_{qr} V}{dx} + \cdots\right) \delta q\right]$$

$$-\frac{1}{dx^3} d^3\left[\left(\partial^2_{rr} V - \cdots\right) \delta r\right]$$

$$+ \cdots$$

Diese Formel ist, wenn $V = F(x, y, p, \ldots)$ keine höhern Differenzialquotienten von y als den zur dritten Ordnung gehörigen $r = \frac{d^3 y}{dx^3}$ ent-

hält, vollständig d. h. außer den hingeschriebenen Bestandtheilen giebt es weiter keine; und sie besitzt wirklich die im Lehrsatze behauptete Form. Wenn in V, wie das bei den Anwendungen meistens der Fall sein wird, der Differenzialquotient r fehlt, so fallen diejenigen sechs Glieder weg, worin $\partial^2_{rr}V$, $\partial^2_{pr}V$, $\partial^2_{qr}V$, $\partial^2_{rr}V$ vorkommen. U. s. w.

§. 36.

Zweiter Lehrsatz. Es möge in dem Ausdrucke

$$(1)\quad \delta\mathfrak{W} = \mathfrak{A}_0\Omega(x) + \frac{1}{dx}d\left[\mathfrak{A}_1\frac{d\Omega(x)}{dx}\right] + \frac{1}{dx^2}d^2\left[\mathfrak{A}_2\frac{d^2\Omega(x)}{dx^2}\right] + \cdots$$

$\Omega(x)$ eine völlig unbestimmte Function von x, dagegen $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, .. gegebene Functionen von x bedeuten. Schreibt man nun bloß Ω anstatt $\Omega(x)$ und denkt sich die Gleichung

$$\delta\mathfrak{W} = 0$$

welche in Beziehung auf Ω eine gewöhnliche Differenzialgleichung der zweiten, oder der vierten oder 6ten u. s. f. Ordnung sein wird, je nachdem in $\delta\mathfrak{W}$ hinter $\mathfrak{A}_0\Omega$ noch ein oder zwei oder 3 ꝛc. Glieder folgen, bereits integrirt, so daß etwa $\Omega = \psi(x) = u$ ein Integral wäre, — setzt in (1) alsdann $\Omega = u\omega$, wobei ω eine beliebige Function von x vorstellen soll, und bezeichnet den Ausdruck, in welchen sich $\delta\mathfrak{W}$ durch diese Substitution verwandelt, mit $\delta\mathfrak{W}_1$; so wird die Integration $\int\delta\mathfrak{W}_1.udx$ sich in völliger Allgemeinheit ausführen laßen, nämlich ohne daß über die Beschaffenheit von ω etwas Näheres festgesetzt zu werden braucht; und man wird einen Ausdruck erhalten, der in Beziehung auf die unbestimmte Function $\frac{d\omega}{dx} = \omega'$ nach demselben Gesetze gebildet ist, wie $\delta\mathfrak{W}$ aus Ω nämlich

$$(2)\quad \int\delta\mathfrak{W}_1 u dx = \mathfrak{B}_0\omega' + \frac{1}{dx}d\left[\mathfrak{B}_1\frac{d\omega'}{dx}\right] + \frac{1}{dx^2}d^2\left[\mathfrak{B}_2\frac{d^2\omega'}{dx^2}\right] + \cdots$$

der jedoch in Beziehung auf die angezeigten Differentiationen zu einer niedrigeren Ordnung gehört, so daß wenn $\frac{d^n}{dx^n}\left[\mathfrak{A}_n\frac{d^n\Omega}{dx^n}\right]$ in (1) das letzte Glied ist, in (2) das letzte Glied $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\mathfrak{B}_{n-1}\frac{d^{n-1}\omega'}{dx^{n-1}}\right]$ sein wird.

1) Zunächst ist

$$\delta W_1 . u = \mathfrak{A}_0 u . u\omega + \frac{u}{dx} d\left(\mathfrak{A}_1 \frac{d.u\omega}{dx}\right) + \frac{u}{dx^2} d^2\left(\mathfrak{A}_2 \frac{d^2.u\omega}{dx^2}\right)$$
$$+ \frac{u}{dx^3} d^3\left(\mathfrak{A}_3 \frac{d^3.u\omega}{dx^3}\right)$$
$$(3) \qquad + \quad . \quad . \quad .$$
$$+ \frac{u}{dx^n} d^n\left(\mathfrak{A}_n \frac{d^n.u\omega}{dx^n}\right)$$

Nehmen wir ein beliebiges Glied aus diesem Aggregat heraus, nämlich

$$\frac{u}{dx^r} d^r\left(\mathfrak{A}_r \frac{d^r.u\omega}{dx^r}\right)$$

wobei r irgend eine ganze Zahl zwischen 1 und n bedeuten soll, so können wir dasselbe unmittelbar umformen in

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{dx^{r-1}} d^{r-1}\left(\mathfrak{A}_r \frac{d^r.u\omega}{dx^r}\right)\right] - \frac{u'}{dx^{r-1}} d^{r-1}\left(\mathfrak{A}_r \frac{d^r.u\omega}{dx^r}\right)$$

worin u' die derivirte Function von u anzeigt. Der erste Bestandtheil dieses Ausdrucks ist ein vollständiger Differenzialquotient und läßt sich nach vorgängiger Multiplikation mit dx ohne Weiteres integriren; der Subtrahendus dagegen läßt sich wieder in derselben Weise transformiren wie mit dem ursprünglichen Ausdrucke geschehen ist, nämlich in

$$-\frac{d}{dx}\left[\frac{u'}{dx^{r-2}} d^{r-2}\left(\mathfrak{A}_r \frac{d^r.u\omega}{dx^r}\right)\right] + \frac{u''}{dx^{r-2}} d^{r-2}\left(\mathfrak{A}_r \frac{d^r.u\omega}{dx^r}\right)$$

Das zweite Glied hiervon ist wieder gleichbedeutend mit

$$+\frac{d}{dx}\left[\frac{u''}{dx^{r-3}} d^{r-3}\left(\mathfrak{A}_r \frac{d^r.u\omega}{dx^r}\right)\right] - \frac{u'''}{dx^{r-3}} d^{r-3}\left(\mathfrak{A}_r \frac{d^r.u\omega}{dx^r}\right)$$

u. s. f.

Auf diesem Wege immer weiter fortschreitend werden wir, wenn wir $\frac{d^r u}{dx^r}$ durch $u^{[r]}$ vorstellen, schließlich zu

$$(-1)^{r-1} \frac{d}{dx}\left[u^{[r-1]} . \mathfrak{A}_r \frac{d^r.u\omega}{dx^r}\right] + (-1)^r u^{[r]} \mathfrak{A}_r \frac{d^r.u\omega}{dx^r}$$

gelangen. Der letzte Bestandtheil hiervon aber, nämlich

$$(4) \qquad (-1)^r u^{[r]} \mathfrak{A}_r \frac{d^r.u\omega}{dx^r}$$

läßt sich nun nicht mehr in die Form eines vollständigen Differenzialquotienten bringen.

Diese Betrachtung, auf jedes einzelne der Glieder bezogen, welche auf der rechten Seite der Gleichung (3) hinter $\mathfrak{A}_0 u u\omega$ nachfolgen, führt

sogleich zu dem Resultat, daß es, abgesehen von den eben angedeuteten unmittelbar integrablen Bestandtheilen von $\delta\mathfrak{W}_1 u dx$, nur noch auf das Aggregat

$$u\mathfrak{A}_0.u\omega - u'\mathfrak{A}_1\frac{d.u\omega}{dx} + u''\mathfrak{A}_2\frac{d^2.u\omega}{dx^2} - u'''\mathfrak{A}_3\frac{d^3.u\omega}{dx^3} + \cdots$$

$$(5) \qquad \pm u^{[n-1]}\mathfrak{A}_{n-1}\frac{d^{n-1}.u\omega}{dx^{n-1}} \mp u^{[n]}\mathfrak{A}_n\frac{d^n.u\omega}{dx^n}$$

ankommt, worin die auf das Anfangsglied nachfolgenden Glieder aus (4) hervorgehen, indem man successiv r gleich 1, 2, 3, ... setzt. Wird der Kürze wegen diese Summe durch S bezeichnet, so findet man leicht

$$\frac{dS}{d\omega} = \mathfrak{A}_0 uu - \mathfrak{A}_1 u'u' + \binom{2}{0}\mathfrak{A}_2 u''u'' - \binom{3}{0}\mathfrak{A}_3 u'''u''' + \cdots \mp \binom{n}{0}\mathfrak{A}_n u^{[n]}u^{[n]}$$

$$\frac{dS}{d\omega'} = -\mathfrak{A}_1 u'u + \binom{2}{1}\mathfrak{A}_2 u''u' - \binom{3}{1}\mathfrak{A}_3 u'''u'' + \cdots \mp \binom{n}{1}\mathfrak{A}_n u^{[n]}u^{[n-1]}$$

$$\frac{dS}{d\omega''} = \binom{2}{2}\mathfrak{A}_2 u''u - \binom{3}{2}\mathfrak{A}_3 u'''u' + \cdots \mp \binom{n}{2}\mathfrak{A}_n u^{[n]}u^{[n-2]}$$

$$\frac{dS}{d\omega'''} = -\binom{3}{3}\mathfrak{A}_3 u'''u + \cdots \mp \binom{n}{3}\mathfrak{A}_n u^{[n]}u^{[n-3]}$$

$$(6) \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$\frac{dS}{d\omega^{[n]}} = \mp\binom{n}{n}\mathfrak{A}_n u^{[n]}u$$

worin $\binom{2}{0} = 1$, $\binom{2}{1} = 2$, $\binom{2}{2} = 1$ die in die Entwickelung von $\frac{d^2.u\omega}{dx^2}$ eintretenden Binomialcoefficienten zur zweiten Potenz, $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$, $\binom{3}{3}$ die Binomialcoefficienten zur dritten Potenz u. s. f. anzeigen. Zu Folge §. 32 III) kommt es nun auf die Untersuchung von

$$\frac{dS}{d\omega} - \frac{1}{dx}d\frac{dS}{d\omega'} + \cdots + (-1)^r\frac{d^r}{dx^r}\left(\frac{dS}{d\omega^{[r]}}\right)\cdots \pm\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{dS}{d\omega^{[n]}}\right)$$

an; wenn sich zeigen läßt, daß diese Größe gleich Null ausfallen müße, so ist die Integrabilität von $\delta\mathfrak{W}_1 u dx$ bewiesen. Es ist aber, wenn r wieder eine ganze Zahl zwischen 1 und n bedeutet,

$$\binom{r}{0}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r]} - \frac{d}{dx}\left[\binom{r}{1}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r-1]}\right] + \frac{d^2}{dx^2}\left[\binom{r}{2}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r-2]}\right] - \cdots$$

$$- (-1)^r\frac{d^{r-1}}{dx^{r-1}}\left[\binom{r}{r-1}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u'\right] + (-1)^r\frac{d^r}{dx^r}\left[\binom{r}{r}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \binom{r}{0}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r]}\\
&- \binom{r}{1}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r]} - \binom{r}{1}\binom{1}{1}u^{[r-1]}\frac{d.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx}\\
&+ \binom{r}{2}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r]} + \binom{r}{2}\binom{2}{1}u^{[r-1]}\frac{d.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx} + \binom{r}{2}\binom{2}{2}u^{[r-2]}\frac{d^2.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx^2}\\
(7)\quad &- \binom{r}{3}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r]} - \binom{r}{3}\binom{3}{1}u^{[r-1]}\frac{d.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx} - \binom{r}{3}\binom{3}{2}u^{[r-2]}\frac{d^2.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx^2} - \cdots\\
&+ \quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots\\
&\qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots\\
(-1)^r\Big[&- \binom{r}{r-1}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r]} - \binom{r}{r-1}\binom{r-1}{1}u^{[r-1]}\frac{d.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx} - \binom{r}{r-1}\binom{r-1}{2}u^{[r-2]}\frac{d^2.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx^2} - \cdots\\
(-1)^r\Big[&+ \binom{r}{r}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r]} + \binom{r}{r}\binom{r}{1}u^{[r-1]}\frac{d.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx} + \binom{r}{r}\binom{r}{2}u^{[r-2]}\frac{d^2.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx^2} + \cdots
\end{aligned}
$$

in welcher Entwickelung die beiden letzten Horizontalreihen mit folgenden Gliedern

$$-(-1)^r\binom{r}{r-1}\binom{r-1}{r-1}u'\frac{d^{r-1}.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx^{r-1}}$$

$$+(-1)^r\binom{r}{r}\binom{r}{r-1}u'\frac{d^{r-1}.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx^{r-1}} + (-1)^r\binom{r}{r}\binom{r}{r}u\frac{d^r.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx^r}$$

schließen. Indem wir beabsichtigen hier in Vertikalcolumnen zu summiren, bemerk wir zunächst, daß sich für jede ganze positive Zahl z, die wir jedoch $<r$ höchste $=r$ denken, sich die Summe

$$\binom{r}{z}\binom{z}{z} - \binom{r}{z+1}\binom{z+1}{z} + \binom{r}{z+2}\binom{z+2}{z} - \binom{r}{z+3}\binom{z+3}{z} + \cdots$$

$$+(-1)^{r-z-1}\binom{r}{r-1}\binom{r-1}{z} + (-1)^{r-z}\binom{r}{r}($$

auf die einfachere Gestalt

$$\binom{r}{z}\Big[\binom{r-z}{0} - \binom{r-z}{1} + \binom{r-z}{2} + \cdots + (-1)^{r-z-1}\binom{r-z}{r-z-1} + (-1)^{r-z}\binom{r-z}{r-z}\Big]$$

bringen läßt, weil nämlich in jedem Gliede anstatt $\binom{r}{z+q}\binom{z+q}{z}$ der ganz identische Au druck $\binom{r}{z}\binom{r-z}{q}$ substituirt werden darf. Die gewonnene Transformation ist aber n wieder gleichbedeutend mit

$$\binom{r}{z}\big[1-1\big]^{r-z} = \binom{r}{z}0^{r-z}$$

also gleich Null für jeden der hier in Betracht kommenden Werthe von z zwischen und $(r-1)$, diese beiden Gränzen noch miteingerechnet. Daher gelangt man dem Schluß, daß die Summe jeder einzelnen Vertikalcolumne in (7) gleich Null i mit Ausnahme der allerletzten, welche aus dem einzigen Gliede

$$(-1)^r u\frac{d.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx^r}$$

besteht. Demnach ergeben sich aus (7) indem wir successiv $r = 1, 2, 3, \ldots$ setzen, die Gleichungen

$$-\left[\mathfrak{A}_1 u' u' - \frac{d.\mathfrak{A}_1 u' u'}{dx}\right] = u\frac{d.\mathfrak{A}_1 u'}{dx}$$

$$+\left[\mathfrak{A}_2 u'' u'' - \binom{2}{1}\frac{d.\mathfrak{A}_2 u'' u'}{dx} + \binom{2}{2}\frac{d^2.\mathfrak{A}_2 u'' u}{dx^2}\right] = u\frac{d^2.\mathfrak{A}_2 u''}{dx^2}$$

$$-\left[\mathfrak{A}_3 u''' u''' - \binom{3}{1}\frac{d.\mathfrak{A}_3 u''' u''}{dx} + \binom{3}{2}\frac{d^2.\mathfrak{A}_3 u''' u'}{dx^2} - \binom{3}{3}\frac{d^3.\mathfrak{A}_3 u''' u}{dx^3}\right] = u\frac{d^3.\mathfrak{A}_3 u'''}{dx^3}$$

.. ..

u. s. f.

und mit Zuziehung der bei (6) aufgestellten Formeln für $\frac{dS}{d\omega}, \frac{dS}{d\omega'}, \frac{dS}{d\omega''}$ ꝛc. erhalten wir

$$\frac{dS}{d\omega} - \frac{1}{dx}d\frac{dS}{d\omega'} + \frac{1}{dx^2}d^2\frac{dS}{d\omega''} - \cdots + \frac{(-1)^n}{dx^n}d^n\frac{dS}{d\omega^{[n]}}$$

$$= u\left[\mathfrak{A}_0 u + \frac{d.\mathfrak{A}_1 u'}{dx} + \frac{d^2.\mathfrak{A}_2 u''}{dx^2} + \cdots + \frac{d^n.\mathfrak{A}_n u^{[n]}}{dx^n}\right]$$

Der rechte Theil dieser Gleichung reducirt sich aber der Bedeutung von u zu Folge auf Null, also muß auch der linke Theil gleich Null sein.

II) Um nun jetzt den Werth von $\int \delta \mathfrak{W}_1 u dx$ zu bestimmen, käme es zunächst auf die Berechnung von $\int S dx$ an, da die übrigen Bestandtheile von $\int \delta \mathfrak{W}_1 u dx$ vermöge der in I) erklärten Transformation der Größen $\frac{u}{dx}d\left[\mathfrak{A}_1\frac{d.u\omega}{dx}\right]$, $\frac{u}{dx^2}d^2\left[\mathfrak{A}_2\frac{d^2.u\omega}{dx^2}\right]$ u. s. w. sich ganz einfach durch Weglaßung des Differentiationszeichens ergeben. Es würde dermalen in den Formeln des §. 32 an die Stelle von V der Ausdruck S treten, während $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ dieselbe Rolle spielen wie dort $y, p, q, \ldots$ und wir könnten demnach die Berechnung von $\int S dx$ nach den dort entwickelten Regeln durchführen. Da die zu integrirende Function S, wie die unmittelbare Anschauung des obigen Ausdrucks (5) erkennen läßt, überhaupt nur die ersten Potenzen von $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ und nur in lineärer Weise enthält, so ist es gestattet, um das im angeführten Paragraphen unter IV) erklärte Verfahren anzuwenden, die daselbst durch $y_0, p_0, \ldots$ vorgestellten Größen (welche diesmal durch $\omega_0, \omega'_0, \omega''_0, \ldots$ zu bezeichnen sein würden) sämmtlich gleich Null anzunehmen.

Obwohl aber das weitere Vorgehen auf diesem Wege keiner Schwierigkeit unterworfen ist, so dürfte es dennoch, um das gesuchte Integral

gerade in der Form

$$(2) \qquad \int \delta\mathfrak{W}_1 u dx = \mathfrak{B}_0\omega' + \frac{d.\mathfrak{B}_1\omega'}{dx} + \frac{d^2.\mathfrak{B}_2\omega'}{dx^2} + \cdots$$

zu erhalten, viel räthlicher sein von dem ursprünglichen Ausdrucke selbst, nämlich $\delta\mathfrak{W}_1.u =$

$$u.\mathfrak{A}_0 u\omega + u\frac{d}{dx}\left[\mathfrak{A}_1\frac{d.u\omega}{dx}\right] + u\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathfrak{A}_2\frac{d^2.u\omega}{dx^2}\right] + u\frac{d^3}{dx^3}\left[\mathfrak{A}_3\frac{d^2.u\omega}{dx^3}\right]$$

auszugehen. Indem wir uns zur Abkürzung der Formeln auf die hier hingeschriebenen Bestandtheile von $\delta\mathfrak{W}_1 u$ beschränken, was für die Anwendungen weithin ausreichen wird, gedenken wir jeden dieser Bestandtheile, mit Ausnahme des ersten $\mathfrak{A}_0 uu\omega$, einzeln dem gegenwärtigen Zwecke gemäß zu transformiren.

Erstens also wird, wenn man für $\frac{d.u\omega}{dx}$ seinen Werth $u'\omega + u\omega'$ einsetzt und dann die übrig bleibende Differentiation ausführt,

$$u\frac{d}{dx}\left[\mathfrak{A}_1\frac{d.u\omega}{dx}\right] = \left\{\begin{array}{l} u\frac{d.\mathfrak{A}_1 u'}{dx}\omega + u.\mathfrak{A}_1 u'\omega' \\ + u\frac{d.\mathfrak{A}_1 u}{dx}\omega' + u.\mathfrak{A}_1 u\omega'' \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} [1,1] + [1,2] \\ [2,1] + [2,2] \end{array}\right.$$

Hierin ist die Summe

$$[2,1] + [1,2] = \left[u\frac{d.\mathfrak{A}_1 u}{dx} + u'.\mathfrak{A}_1 u\right]\omega' = \frac{d.\mathfrak{A}_1 uu}{dx}\omega'$$

daher $\left.\begin{array}{l} +[1,2] \\ [2,1]+[2,2] \end{array}\right\} = \frac{d.\mathfrak{A}_1 uu}{dx}\omega' + \mathfrak{A}_1 uu.\omega'' = \frac{d.}{dx}[\mathfrak{A}_1 uu\omega']$

und $$(8) \qquad u\frac{d}{dx}\left[\mathfrak{A}_1\frac{d.u\omega}{dx}\right] = u\frac{d.\mathfrak{A}_1 u'}{dx}\omega + \frac{d}{dx}[\mathfrak{A}_1 uu\omega']$$

III) Als unmittelbare Entwickelung des dritten Gliedes von $\delta\mathfrak{W}_1 u$ nämlich $u\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathfrak{A}_2\frac{d^2.u\omega}{dx^2}\right]$ hat man

$$\begin{array}{ccccc} u\frac{d^2.\mathfrak{A}_2 u''}{dx^2}\omega & + 2u\frac{d.\mathfrak{A}_2 u''}{dx}\omega' & + & u\mathfrak{A}_2 u''\omega'' & \\ [1,1] & [1,2] & & [1,3] & \\ + 2u\frac{d^2.\mathfrak{A}_2 u'}{dx^2}\omega' & + 4u\frac{d.\mathfrak{A}_2 u'}{dx}\omega'' & + & 2u\mathfrak{A}_2 u'\omega''' & \\ [2,1] & [2,2] & & [2,3] & \\ + u\frac{d^2.\mathfrak{A}_2 u}{dx^2}\omega'' & + 2u\frac{d.\mathfrak{A}_2 u}{dx}\omega''' & + & u\mathfrak{A}_2 u\omega'''' & \\ [3,1] & [3,2] & & [3,3] & \end{array}$$

Nun ist

$$[3,2]+[2,3]=2\Big[u\frac{d.\mathfrak{A}_2u}{dx}+u'.\mathfrak{A}_2u\Big]\omega'''=2\frac{d.\mathfrak{A}_2uu}{dx}\omega'''$$

$$[3,1]+[1,3]=\Big[u\frac{d^2.\mathfrak{A}_2u}{dx^2}+u''.\mathfrak{A}_2u\Big]\omega''=\frac{d^2.\mathfrak{A}_2uu}{dx^2}\omega''-2\frac{d.\mathfrak{A}_2u}{dx}u'\omega''$$

daher

$$\left.\begin{matrix}[3,1]+[1,3]\\+[3,2]+[2,3]+[3,3]\end{matrix}\right\}=\frac{d^2.\mathfrak{A}_2uu\omega''}{dx^2}-2\frac{d.\mathfrak{A}_2u}{dx}u'\omega''$$

Hierin ist das letzte Glied gleichwerthig mit

$$-2\frac{d.\mathfrak{A}_2uu'}{dx}\omega''+2\mathfrak{A}_2uu''\omega''=-2u\frac{d.\mathfrak{A}_2u'}{dx}\omega''+2\mathfrak{A}_2(uu''-u'u')\omega''$$

und die Summe hiervon und dem ebenfalls mit ω'' multiplicirten Bestandtheile $[2,2]$ ist

$$2\Big[u\frac{d.\mathfrak{A}_2u'}{dx}+\mathfrak{A}_2(uu''-u'u')\Big]\omega''$$

Endlich ist nun

$$[2,1]+[1,2]=2\Big[\frac{d.}{dx}\Big(u\frac{d.\mathfrak{A}_2u'}{dx}\Big)-u'\frac{d.\mathfrak{A}_2u'}{dx}+u\frac{d.\mathfrak{A}_2u''}{dx}\Big]\omega'$$

$$=2\frac{d}{dx}\Big[u\frac{d.\mathfrak{A}_2u'}{dx}+\mathfrak{A}_2(uu''-u'u')\Big]\omega'$$

Demnach ergiebt sich im Ganzen

$$\text{(9)}\quad \left.\begin{matrix}u\frac{d^2.\mathfrak{A}_2u''}{dx^2}\omega\\+[2,1]+[1,2]\\+[3,1]+[1,3]+[2,2]\\+[3,2]+[2,3]+[3,3]\end{matrix}\right\}=+2\frac{d.}{dx}\Big[\Big(u\frac{d.\mathfrak{A}_2u'}{dx}+\mathfrak{A}_2(uu''-u'u')\Big)\omega'\Big]+\frac{d^2}{dx^2}\Big[\mathfrak{A}_2uu\omega''\Big]$$

als die verlangte Transformation von $u\frac{d^2}{dx^2}\Big[\mathfrak{A}_2\frac{d^2.u\omega}{dx^2}\Big]$.

IV) Ebenso findet man für $u\frac{d^3}{dx^3}\Big[\mathfrak{A}_3\frac{d^3.u\omega}{dx^3}\Big]$ den Werth

$$\text{(10)}\quad u\frac{d^3.\mathfrak{A}_3u'''}{dx^3}\omega$$

$$+3\frac{d}{dx}\Big[\Big(u\frac{d^2.\mathfrak{A}_3u''}{dx^3}+u\frac{d.\mathfrak{A}_3u'''}{dx}-u'\frac{d.\mathfrak{A}_3u''}{dx}-\mathfrak{A}_3(u'u'''-u''u'')\Big)\omega'\Big]$$

$$+3\frac{d^2}{dx^2}\Big[\Big(u\frac{d.\mathfrak{A}_3u'}{dx}+2\mathfrak{A}_3(uu''-u'u')\Big)\omega''\Big]$$

$$+\frac{d^3}{dx^3}\Big[\mathfrak{A}_3uu\omega'''\Big]$$

Und indem man diese Ausdrücke (8) (9) (10) in den ursprünglichen Werth von $\delta\mathfrak{W}_1.u$ nämlich in

$$\delta\mathfrak{W}_1.u = u.\mathfrak{A}_0 u\omega + u\frac{d}{dx}\left[\mathfrak{A}_1\frac{du\omega}{dx}\right] + u\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathfrak{A}_2\frac{d^2u\omega}{dx^2}\right] + \cdot$$

einführt und zugleich beachtet, daß das Aggregat

$$u\left(\mathfrak{A}_0 u\omega + \frac{d.\mathfrak{A}_1 u'}{dx}\omega + \frac{d^2.\mathfrak{A}_2 u''}{dx^2}\omega + \frac{d^3.\mathfrak{A}_3 u'''}{dx^3}\omega\right)$$

vermöge der Bedeutung von u sich auf Null reducirt, so sieht man nicht allein, daß die übrigen Glieder einen vollständigen Differenzialquotienten bilden, was mit dem in I) bewiesenen übereinstimmt, sondern auch, daß der auf diese Weise gewonnene Ausdruck für das Integral $\int\delta\mathfrak{W}_1 u dx$ wirklich die Form

$$\mathfrak{B}_0\omega' + \frac{d.\mathfrak{B}_1\omega''}{dx} + \frac{d^2.\mathfrak{B}_2\omega'''}{dx^2}$$

besitzt. — Für den Fall, daß in $\delta\mathfrak{W}$ nur $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ vorkommen, daß also schon $\mathfrak{A}_3$ gleich Null ist, wie sich dies in unsern zukünftigen Anwendungen ereignen wird, haben wir

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned}\mathfrak{B}_0 &= \mathfrak{A}_1 uu + 2\left(u\frac{d.\mathfrak{A}_2 u'}{dx} + \mathfrak{A}_2(uu'' - u'u')\right)\\ \mathfrak{B}_1 &= \mathfrak{A}_2 uu\end{aligned}$$

während $\mathfrak{B}_2$ schon verschwindet.

§. 37.

Dritter Lehrsatz: Wenn durch Integration der sogenannten Hauptgleichung (des §. 25) nämlich

$$\text{(1)} \qquad \mathfrak{W} = \frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}d\frac{dV}{dp} + \frac{1}{dx^2}d^2\frac{dV}{dq} - \cdots = 0$$

die Form der gesuchten Function $y = f(x, C_1, C_2, \ldots)$ bestimmt worden ist, durch welche $U = \int V dx$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll und worin sich, je nach der Ordnung der Differenzialgleichung (1) eine größere oder geringere Anzahl anfangs unbestimmter und erst durch anderweite Bedingungen zu bestimmender Integrationsconstanten $C_1, C_2, \ldots$ vorfinden werden; so wird der Differenzialgleichung

$$\delta\mathfrak{W} = 0$$

welche unserm ersten Lehrsatze zu Folge sich auf die Form

$$\text{(2)} \qquad \mathfrak{A}_0\delta y + \frac{1}{dx}d\left(\mathfrak{A}_1\frac{d\delta y}{dx}\right) + \frac{1}{dx^2}d^2\left(\mathfrak{A}_2\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right) + \cdots$$

bringen läßt, jeder in Bezug auf eine der Integrationsconstanten $C_1, C_2, \ldots$ genommene partielle Differenzialquotient

$$\frac{dy}{dC_1} = u_1, \qquad \frac{dy}{dC_2} = u_2, \qquad \ldots$$

an die Stelle von δy gesetzt, Genüge leisten, so daß $\delta y = u_1$, $\delta y = u_2$, ꝛc. sämmtlich partikuläre Integrale der Gleichung $\delta \mathfrak{W} = 0$ sind.

I) Aus (1) wird man auf die unmittelbarste Weise $\delta \mathfrak{W}$ dadurch erhalten, daß man $y + \delta y$, $p + \delta p$, $q + \delta q, \ldots$ an die Stelle von $y, p, q, \ldots$ setzt, von dem dadurch entstandenen Ausdruck den ursprünglichen subtrahirt und dann durch das Differenzial des Variationsarguments dividirt, also

$$\delta \mathfrak{W} = \frac{d\mathfrak{W}}{dy}\delta y + \frac{d\mathfrak{W}}{dp}\delta p + \frac{d\mathfrak{W}}{dq}\delta q + \cdots$$

Wenn man nun aber das allgemeine Integral der Gleichung $\mathfrak{W} = 0$ nämlich die Function $y = f(x, C_1, C_2, \ldots)$ nach einer der in ihr enthaltenen Integrationsconstanten z. B. nach C_1 differentiirt und dann $\delta y = u_1 = \frac{dy}{dC_1}$ annimmt, also

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx} = \frac{d^2y}{dC_1 dx} = \frac{dp}{dC_1}$$

$$\delta q = \frac{d^2\delta y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dC_1 dx^2} = \frac{dq}{dC_1}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

setzt: so wird $\delta \mathfrak{W}$ den Werth erhalten

$$(3) \qquad \frac{d\mathfrak{W}}{dy}\frac{dy}{dC_1} + \frac{d\mathfrak{W}}{dp}\frac{dp}{dC_1} + \frac{d\mathfrak{W}}{dq}\frac{dq}{dC_1} + \cdots$$

Dieses ist offenbar einerlei mit $\frac{d\mathfrak{W}}{dC_1}$ d. h. demjenigen Ausdruck, den man erhält, wenn man in $\mathfrak{W}$ vermöge der Gleichung $y = f(x, C_1, C_2, \ldots)$ die Variablen $y, p, q, \ldots$ sämmtlich als Functionen von C_1 ansieht und in Beziehung auf dieses Argument C_1 den totalen Differenzialquotienten von $\mathfrak{W}$ bildet. Da nun aber die Gleichung $\mathfrak{W} = 0$ nach der Voraussetzung für jeden beliebigen Werth der in $f(x, C_1, C_2, \ldots)$ enthaltenen Constanten C_1 Geltung hat, so muß $\frac{d\mathfrak{W}}{dC_1} = 0$ sein. Folglich muß sich der bei (3) aufgestellte Werth von $\delta \mathfrak{W}$ identisch auf Null reduciren, d. h.

die aus dem gefundenen $y = f(x, C_1, C_2, \ldots)$ für $\frac{dy}{dC_1}$ zu derivirende Function von x muß ein Integral der Differenzialgleichung $\delta\mathfrak{W} = 0$ sein. Derselbe Schluß läßt sich aber offenbar in Betreff der andern Functionen $u_2 = \frac{dy}{dC_2}$, $u_3 = \frac{dy}{dC_3}$ u. s. f. anstellen. Folglich sind auch $\delta y = u_2$, $\delta y = u_3, \ldots$ lauter partikuläre Integrale der Differenzialgleichung (2); was zu beweisen war.

II) Fallen diese partikulären Integrale sämmtlich von einander verschieden aus und ist ihre Anzahl gleich der Ordnung der Differenzialgleichung (2), so wird, da diese Gleichung in Beziehung auf δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}, \ldots$ *linear* ist, ihr allgemeines Integral nach einem bekannten Satze der Integralrechnung durch

(4) $$\delta y = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3 + \cdots$$

angegeben, wobei μ_1, μ_2, $\mu_3, \ldots$ willkührliche Constanten sein sollen. Daß im Allgemeinen die Anzahl der u_1, $u_2, \ldots$ mit der Ordnungszahl der Gl. $\delta\mathfrak{W} = 0$ übereinstimme, ist aus der in §. 35 mit (1) numerirten Formel für $\delta\mathfrak{W}$ und mit Rücksicht auf das in §. 30 über die Ordnung der Hauptgleichung $\mathfrak{W} = 0$ Gesagte leicht einzusehen. Aber auch ohne die vollständige Summe (4) zu bilden kann man schon jede unvollständige Combination wie

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2$$

oder $$\mu_2 u_2 + \mu_3 u_3$$

u. dgl.

als ein Integral der Gl. (2) benutzen. Die beliebig annehmbaren Constanten μ_1, μ_2, $\mu_3, \ldots$ in (4) vertreten die durch Integration der Gl. (2) nothwendig herbeigeführten Integrationsconstanten, während C_1, $C_2, \ldots$ welche *in Beziehung auf die Integration der Gleichung* (1) *nämlich* $\mathfrak{W} = 0$ *willkührlich* waren, bei der Integration der Gleichung (2) nämlich $\delta\mathfrak{W} = 0$ wie *gegebene Constanten* anzusehen sind, da man die in (2) vorkommenden Größen A_0, $A_1, \ldots$ dadurch zu bestimmten und gegebenen Functionen von x zu machen hat, daß man in die allgemeinen aus den Differenzialquotienten von V gebildeten und bei der Begründung des ersten Lehrsatzes entwickelten Ausdrücke für A_0, $A_1, \ldots$ an die Stelle von y, p, ꝛc. die Werthe $f(x, C_1, C_2, \ldots)$, $\frac{df(x, C_1, C_2, \ldots)}{dx}$ ꝛc. substituirt.

§. 38.

Mit Hülfe der in den vorangehenden drei §§. entwickelten Lehrsätze läßt sich nun das Hinderniß, welches bei der Entscheidung der Frage ob man durch Behandlung der Hauptgleichung einen Maximalwerth des Integrals $U = \int V dx$ oder ein Minimum oder keines von beiden gefunden habe, die bedeutendste Schwierigkeit bildet, und welches darin besteht, daß in den für ∇U_0 oder $\delta^2 U$ gebildeten Ausdrücken (§. 28) sich noch ungerade Potenzen von willkührlichen Functionen unter dem Integralzeichen vorfinden, ziemlich leicht bewältigen. Das zu diesem Zwecke dienſame Verfahren werden wir für die drei Fälle, daß der gegebene Ausdruck V entweder nur x und y enthält, oder zweitens, daß darin der Differenzialquotient erſter Ordnung p, oder endlich, daß darin auch der Differenzialquotient zweiter Ordnung q vorkommt, im Einzelnen jetzt angeben; dabei gehen wir geradezu von der Betrachtung des zweiten Variationsquotienten $\delta^2 U = \delta^2 \int_\alpha^\xi V dx = \int_\alpha^\xi \delta^2 V dx$ ſelbſt aus.

I) Im erſten Falle, wenn nämlich $V = F(x, y)$ iſt, hat man die Hauptgleichung $\partial_y V = 0$, woraus $y = f(x)$ ohne Integration folgt; und Gränzgleichungen giebt es keine. Aus

$$\delta U = \int_\alpha^\xi \delta V dx = \int_\alpha^\xi \partial_y V \delta y dx$$

folgt nun ferner

$$(1) \qquad \delta^2 U = \int_\alpha^\xi \partial_{yy}^2 V \delta y^2 dx + \int_\alpha^\xi \partial_y V \delta^2 y dx$$

Hierin wird jedoch der zweite Beſtandtheil wegen $\partial_y V = 0$ verſchwinden, und in dem übrig bleibenden Ausdruck erhält der unter dem Integralzeichen befindliche Factor δy^2 einen poſitiven Werth für jede beliebige Beſchaffenheit von δy, die wir jedoch ſelbſtverſtändlich als eine reelle und innerhalb des Integrationsintervalls continuirliche Function von x denken. Deshalb iſt $\delta^2 U$ eine $\left|\begin{matrix}\text{poſitive}\\ \text{negative}\end{matrix}\right|$ Größe und $U = \int_\alpha^\xi V dx$ ein $\left|\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right|$ wenn während des Integrationsintervalls $x = \alpha$ bis $x = \xi$ die Function $\partial_{yy}^2 V$ fortwährend einen $\left|\begin{matrix}\text{poſitiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}\right|$ Werth beſitzt, und nicht etwa unendlich wird.

Träfe es ſich, daß $\partial_{yy}^2 V$ von $x = \alpha$ nur bis zu einem zweiten Werthe $x = \xi_1$, der zwar $> \alpha$ aber $< \xi$ wäre, einerlei Vorzeichen be-

hielte, so würde man auch nur von einem Maximum oder Minimum des Integrals $\int V dx$ innerhalb solcher engerer Gränzen sprechen können. Diese Bemerkung würde übrigens auch bei der Discussion der folgenden Fälle anzubringen sein, weshalb wir sie hier ein für alle Mal machen wollen ohne sie in Zukunft zu wiederholen.

II) Zweiter Fall: Es sei $V = F(x, y, p)$. Hier ist

$$\delta \int V dx = \partial_p V \delta y + \int \left(\partial_y V - \frac{d \partial_p V}{dx} \right) \delta y dx$$

was wir durch

$$\delta \int V dx = N \delta y + \int W \delta y dx$$

vorstellen wollen. Daraus folgt

$$\delta^2 \int V dx = \delta N \delta y + N \delta^2 y + \int \delta W \delta y dx + \int W \delta^2 y dx$$

Wegen $W = 0$, welches die zu integrirende Hauptgleichung war, verschwindet aber hierin das letzte Integral. Und sobald man zu den Integrationsgränzen übergeht, verschwinden auch die Größen $[N \delta^2 y]_\xi$, $[N \delta^2 y]_\alpha$. Denn entweder ist nach der Forderung der Aufgabe $[\delta y]_\xi = 0$ und dann ist wegen

$$[\delta y]_\xi = [\delta y]_{\xi \cdot \tau} + [\delta^2 y]_\xi \frac{\tau^2}{1 \cdot 2} + \cdots$$

auch $[\delta^2 y]_\xi = 0$, — oder es ist $[\delta y]_\xi$ nicht gleich Null zu denken, dann aber muß wegen der Gränzgleichungen bekanntlich $N_\xi = 0$ sein (§. 25). Folglich verschwindet $[N \delta^2 y]_\xi$ jedenfalls; und derselbe Schluß läßt sich auf die Größe $[N \delta^2 y]_\alpha$ anwenden.

Ferner ist $\delta N = \partial^2_{yp} V \delta y + \partial^2_{pp} V \delta p$, daher

$$\delta^2 \int_\alpha^\xi V dx = \left[\partial^2_{yp} V \delta y^2 \right]_{\xi - \alpha}$$

$$(2) \qquad + \left[\partial^2_{pp} V \delta y \delta p \right]_{\xi - \alpha} + \int_\alpha^\xi \delta W \delta y dx$$

worin durch die den Klammern angehängte Differenz $\xi - \alpha$ kurz angedeutet wird, daß man in dem betreffenden Ausdrucke der Variablen x zuerst den Werth ξ, alsdann den Werth α beilegen und das Resultat der letzten Substitution von dem der ersten subtrahiren solle. Aus

$$W = \partial_y V - \frac{1}{dx} d \partial_p V$$

folgt aber nach Lehrsatz I (§. 35)

$$(3) \qquad \delta^{\prime}\mathfrak{W} = \mathfrak{A}_0 \delta^{\prime} y + \frac{1}{dx} d\left(\mathfrak{A}_1 \frac{d\delta^{\prime} y}{dx}\right)$$

worin $$\mathfrak{A}_0 = \partial^2_{yy} V - \frac{d\partial^2_{yp} V}{dx} \qquad \mathfrak{A}_1 = -\partial^2_{pp} V$$

ist. — Faßen wir nun zuvörderst den einfachern Fall in's Auge, daß $\partial^2_{pp} V = 0$ ist, welcher Statt findet, wenn die gegebene Function $V = F(x, y, p)$ nach p *linear* ist, so daß $\partial_p V$ kein p mehr enthält. Alsdann reducirt sich die Gleichung (2) auf

$$(4) \qquad \delta^{\prime 2} U = \left[\partial^2_{yp} V \delta^{\prime} y^2\right]_{\xi \ldots \alpha} + \int^{\xi} \left(\partial^2_{yy} V - \frac{d\partial^2_{yp} V}{dx}\right) \delta^{\prime} y^2 dx$$

und da hier die willkührliche Function $\delta^{\prime} y$ sowohl in den von dem Integralzeichen befreiten Gliedern als auch unter dem Integrationszeichen nur in der zweiten Potenz vorkommt, so sind die Hindernisse für die Entscheidung, ob $\delta^{\prime 2} U$ eine positive oder negative Größe sei aus dem Wege geräumt. Diese Entscheidung wird in der Regel, (abgesehen von den im fünften Capitel zu besprechenden Aufgaben, welche die Nothwendigkeit mit sich bringen $[y]_\xi$ und $[y]_\alpha$ als variirende Functionen anzusehen), dadurch noch erleichtert, daß $[\delta^{\prime} y]_\alpha$ gleich Null sein muß, weil die auf das Maximum oder Minimum von $U = \int V dx$ bezüglichen Aufgaben meistentheils erst dadurch einen bestimmten Sinn gewinnen und einen Gegenstand analytischer Untersuchung abgeben können, daß für die verlangte Curve entweder beide Gränzpunkte A und B oder wenigstens der Anfangspunkt A $[x = \alpha,\ y = \beta]$ gegeben ist.

III) In dem allgemeinern Falle dagegen, wenn $\partial_p V$ nicht von p frei ist, setzen wir, um das Integral $\int \delta^{\prime} \mathfrak{W} \delta^{\prime} y dx$ in eine bequemere Gestalt zu bringen, in der Gleichung (3) an die Stelle von $\delta^{\prime} y$ das Produkt $u\omega$, wobei u irgend ein partikuläres oder auch das allgemeine Integral der Differenzialgleichung

$$\left(\partial^2_{yy} V - \frac{d\partial^2_{yp} V}{dx}\right) u - \frac{1}{dx} d\left(\partial^2_{pp} V \frac{du}{dx}\right) = 0$$

sein, ω dagegen eine ganz willkührliche Function bedeuten möge, welche man nur der selbstverständlichen Beschränkung in Gedanken unterwerfen muß, daß so oft $\delta^{\prime} y$ für einen gegebenen Werth von x z. B. $x = \alpha$ eine vorgeschriebene Größe erhalten soll, ebenso oft sich auch für ω ein bestimmter Werth ergebe, da in dem Produkte $u\omega$ der erste Factor u

$$
\begin{aligned}
&= \binom{r}{0}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r]}\\
&- \binom{r}{1}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r]} - \binom{r}{1}\binom{1}{1}u^{[r-1]}\frac{d.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx}\\
&+ \binom{r}{2}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r]} + \binom{r}{2}\binom{2}{1}u^{[r-1]}\frac{d.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx} + \binom{r}{2}\binom{2}{2}u^{[r-2]}\frac{d^2.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx^2}\\
(7)\quad &- \binom{r}{3}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r]} - \binom{r}{3}\binom{3}{1}u^{[r-1]}\frac{d.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx} - \binom{r}{3}\binom{3}{2}u^{[r-2]}\frac{d^2.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx^2} - \cdots\\
&+ \quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots\\
&\qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots
\end{aligned}
$$

$$(-1)^r\Big[-\binom{r}{r-1}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r]} - \binom{r}{r-1}\binom{r-1}{1}u^{[r-1]}\frac{d.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx} - \binom{r}{r-1}\binom{r-1}{2}u^{[r-2]}\frac{d^2.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx^2} - \cdots$$

$$(-1)^r\Big[+\binom{r}{r}\mathfrak{A}_r u^{[r]}u^{[r]} + \binom{r}{r}\binom{r}{1}u^{[r-1]}\frac{d.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx} + \binom{r}{r}\binom{r}{2}u^{[r-2]}\frac{d^2.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx^2} + \cdots$$

in welcher Entwickelung die beiden letzten Horizontalreihen mit folgenden Gliedern

$$-(-1)^r\binom{r}{r-1}\binom{r-1}{r-1}u'\frac{d^{r-1}.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx^{r-1}}$$

$$+(-1)^r\binom{r}{r}\binom{r}{r-1}u'\frac{d^{r-1}.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx^{r-1}} + (-1)^r\binom{r}{r}\binom{r}{r}u\frac{d^r.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx^r}$$

schließen. Indem wir beabsichtigen hier in Vertikalcolumnen zu summiren, bemerke wir zunächst, daß sich für jede ganze positive Zahl z, die wir jedoch $<r$ höchsten $=r$ denken, sich die Summe

$$\binom{r}{z}\binom{z}{z} - \binom{r}{z+1}\binom{z+1}{z} + \binom{r}{z+2}\binom{z+2}{z} - \binom{r}{z+3}\binom{z+3}{z} + \cdots$$

$$+(-1)^{r-z-1}\binom{r}{r-1}\binom{r-1}{z} + (-1)^{r-z}\binom{r}{r}\binom{r}{z}$$

auf die einfachere Gestalt

$$\binom{r}{z}\Big[\binom{r-z}{0} - \binom{r-z}{1} + \binom{r-z}{2} + \cdots + (-1)^{r-z-1}\binom{r-z}{r-z-1} + (-1)^{r-z}\binom{r-z}{r-z}\Big]$$

bringen läßt, weil nämlich in jedem Gliede anstatt $\binom{r}{z+q}\binom{z+q}{z}$ der ganz identische Aus druck $\binom{r}{z}\binom{r-z}{q}$ substituirt werden darf. Die gewonnene Transformation ist aber nu wieder gleichbedeutend mit

$$\binom{r}{z}\big[1-1\big]^{r-z} = \binom{r}{z}0^{r-z}$$

also gleich Null für jeden der hier in Betracht kommenden Werthe von z zwischen und $(r-1)$, diese beiden Gränzen noch miteingerechnet. Daher gelangt man z dem Schluß, daß die Summe jeder einzelnen Vertikalcolumne in (7) gleich Null ist mit Ausnahme der allerletzten, welche aus dem einzigen Gliede

$$(-1)^r u\frac{d.\mathfrak{A}_r u^{[r]}}{dx^r}$$

besteht. Demnach ergeben sich aus (7) indem wir successiv $r = 1, 2, 3, \ldots$ setzen, die Gleichungen

$$-\left[\mathfrak{A}_1 u' u' - \frac{d.\mathfrak{A}_1 u' u'}{dx}\right] = u\frac{d.\mathfrak{A}_1 u'}{dx}$$

$$+\left[\mathfrak{A}_2 u'' u'' - \binom{2}{1}\frac{d.\mathfrak{A}_2 u'' u'}{dx} + \binom{2}{2}\frac{d^2.\mathfrak{A}_2 u'' u'}{dx^2}\right] = u\frac{d^2.\mathfrak{A}_2 u''}{dx^2}$$

$$-\left[\mathfrak{A}_3 u''' u''' - \binom{3}{1}\frac{d.\mathfrak{A}_3 u''' u''}{dx} + \binom{3}{2}\frac{d^2.\mathfrak{A}_3 u''' u'}{dx^2} - \binom{3}{3}\frac{d^3.\mathfrak{A}_3 u''' u}{dx^3}\right] = u\frac{d^3.\mathfrak{A}_3 u'''}{dx^3}$$

. . . . . .

u. s. f.

und mit Zuziehung der bei (6) aufgestellten Formeln für $\frac{dS}{d\omega}, \frac{dS}{d\omega'}, \frac{dS}{d\omega''}$ ꝛc. erhalten wir

$$\frac{dS}{d\omega} - \frac{1}{dx}d\frac{dS}{d\omega'} + \frac{1}{dx^2}d^2.\frac{dS}{d\omega''} - \cdots + \frac{(-1)^n}{dx^n}d^n.\frac{dS}{d\omega^{[n]}}$$

$$= u\left[\mathfrak{A}_0 u + \frac{d.\mathfrak{A}_1 u'}{dx} + \frac{d^2.\mathfrak{A}_2 u''}{dx^2} + \cdots + \frac{d^n.\mathfrak{A}_n u^{[n]}}{dx^n}\right]$$

Der rechte Theil dieser Gleichung reducirt sich aber der Bedeutung von u zu Folge auf Null, also muß auch der linke Theil gleich Null sein.

II) Um nun jetzt den Werth von $\int \delta\mathfrak{W}_1 u dx$ zu bestimmen, käme es zunächst auf die Berechnung von $\int S dx$ an, da die übrigen Bestandtheile von $\int \delta\mathfrak{W}_1 u dx$ vermöge der in I) erklärten Transformation der Größen $\frac{u}{dx}d\left[\mathfrak{A}_1\frac{d.u\omega}{dx}\right]$, $\frac{u}{dx^2}d^2\left[\mathfrak{A}_2\frac{d^2.u\omega}{dx^2}\right]$ u. s. w. sich ganz einfach durch Weglaßung des Differentiationszeichens ergeben. Es würde dermalen in den Formeln des §. 32 an die Stelle von V der Ausdruck S treten, während $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ dieselbe Rolle spielen wie dort $y, p, q, \ldots$ und wir könnten demnach die Berechnung von $\int S dx$ nach den dort entwickelten Regeln durchführen. Da die zu integrirende Function S, wie die unmittelbare Anschauung des obigen Ausdrucks (5) erkennen läßt, überhaupt nur die ersten Potenzen von $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ und nur in linearer Weise enthält, so ist es gestattet, um das im angeführten Paragraphen unter IV) erklärte Verfahren anzuwenden, die daselbst durch $y_0, p_0, \ldots$ vorgestellten Größen (welche diesmal durch $\omega_0, \omega'_0, \omega''_0, \ldots$ zu bezeichnen sein würden) sämmtlich gleich Null anzunehmen.

Obwohl aber das weitere Vorgehen auf diesem Wege keiner Schwierigkeit unterworfen ist, so dürfte es dennoch, um das gesuchte Integral

gerade in der Form

$$(2) \qquad \int \delta \mathfrak{W}_1 u dx = \mathfrak{B}_0 \omega' + \frac{d.\mathfrak{B}_1 \omega'}{dx} + \frac{d^2.\mathfrak{B}_2 \omega'}{dx^2} + \cdots$$

zu erhalten, viel räthlicher sein von dem ursprünglichen Ausdrucke selbst, nämlich $\delta \mathfrak{W}_1.u =$

$$u.\mathfrak{A}_0 u\omega + u\frac{d}{dx}\left[\mathfrak{A}_1 \frac{d.u\omega}{dx}\right] + u\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathfrak{A}_2 \frac{d^2.u\omega}{dx^2}\right] + u\frac{d^3}{dx^3}\left[\mathfrak{A}_3 \frac{d^3.u\omega}{dx^3}\right],$$

auszugehen. Indem wir uns zur Abkürzung der Formeln auf die hier hingeschriebenen Bestandtheile von $\delta \mathfrak{W}_1 u$ beschränken, was für die Anwendungen weithin ausreichen wird, gedenken wir jeden dieser Bestandtheile, mit Ausnahme des ersten $\mathfrak{A}_0 uu\omega$, einzeln dem gegenwärtigen Zwecke gemäß zu transformiren.

Erstens also wird, wenn man für $\frac{d.u\omega}{dx}$ seinen Werth $u'\omega + u\omega'$ einsetzt und dann die übrig bleibende Differentiation ausführt,

$$u\frac{d}{dx}\left[\mathfrak{A}_1 \frac{d.u\omega}{dx}\right] = \begin{matrix} u\frac{d.\mathfrak{A}_1 u'}{dx}\omega + u.\mathfrak{A}_1 u'\omega' \\ + u\frac{d.\mathfrak{A}_1 u}{dx}\omega' + u.\mathfrak{A}_1 u\omega'' \end{matrix} = \begin{matrix} [1,1] + [1,2] \\ [2,1] + [2,2] \end{matrix}$$

Hierin ist die Summe

$$[2,1] + [1,2] = \left[u\frac{d.\mathfrak{A}_1 u}{dx} + u'.\mathfrak{A}_1 u\right]\omega' = \frac{d.\mathfrak{A}_1 uu}{dx}\omega'$$

daher $\begin{matrix} +[1,2] \\ [2,1]+[2,2] \end{matrix} = \frac{d.\mathfrak{A}_1 uu}{dx}\omega' + \mathfrak{A}_1 uu.\omega'' = \frac{d.}{dx}[\mathfrak{A}_1 uu\omega']$

und $$(8) \qquad u\frac{d}{dx}\left[\mathfrak{A}_1 \frac{d.u\omega}{dx}\right] = u\frac{d.\mathfrak{A}_1 u'}{dx}\omega + \frac{d}{dx}[\mathfrak{A}_1 uu\omega']$$

III) Als unmittelbare Entwickelung des dritten Gliedes von $\delta \mathfrak{W}_1 u$ nämlich $u\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathfrak{A}_2 \frac{d^2.u\omega}{dx^2}\right]$ hat man

$$\begin{matrix} u\frac{d^2.\mathfrak{A}_2 u''}{dx^2}\omega + 2u\frac{d.\mathfrak{A}_2 u''}{dx}\omega' + u\mathfrak{A}_2 u''\omega'' \\ [1,1] \qquad [1,2] \qquad [1,3] \\ + 2u\frac{d^2.\mathfrak{A}_2 u'}{dx^2}\omega' + 4u\frac{d.\mathfrak{A}_2 u'}{dx}\omega'' + 2u\mathfrak{A}_2 u'\omega''' \\ [2,1] \qquad [2,2] \qquad [2,3] \\ + u\frac{d^2.\mathfrak{A}_2 u}{dx^2}\omega'' + 2u\frac{d.\mathfrak{A}_2 u}{dx}\omega''' + u\mathfrak{A}_2 u\omega'''' \\ [3,1] \qquad [3,2] \qquad [3,3] \end{matrix}$$

Nun ist

$$[3,2]+[2,3]=2\Big[u\frac{d.\mathfrak{A}_2u}{dx}+u'.\mathfrak{A}_2u\Big]\omega'''=2\frac{d.\mathfrak{A}_2uu}{dx}\omega'''$$

$$[3,1]+[1,3]=\Big[u\frac{d^2.\mathfrak{A}_2u}{dx^2}+u''.\mathfrak{A}_2u\Big]\omega''=\frac{d^2.\mathfrak{A}_2uu}{dx^2}\omega''-2\frac{d.\mathfrak{A}_2u}{dx}u'\omega''$$

daher

$$\left.\begin{matrix}[3,1]+[1,3]\\+[3,2]+[2,3]+[3,3]\end{matrix}\right\}=\frac{d^2.\mathfrak{A}_2uu\omega''}{dx^2}-2\frac{d.\mathfrak{A}_2u}{dx}u'\omega''$$

Hierin ist das letzte Glied gleichwerthig mit

$$-2\frac{d.\mathfrak{A}_2uu'}{dx}\omega''+2\mathfrak{A}_2uu''\omega''=-2u\frac{d.\mathfrak{A}_2u'}{dx}\omega''+2\mathfrak{A}_2(uu''-u'u')\omega''$$

und die Summe hiervon und dem ebenfalls mit ω'' multiplicirten Bestandtheile $[2,2]$ ist

$$2\Big[u\frac{d.\mathfrak{A}_2u'}{dx}+\mathfrak{A}_2(uu''-u'u')\Big]\omega''$$

Endlich ist nun

$$[2,1]+[1,2]=2\Big[\frac{d.}{dx}\Big(u\frac{d.\mathfrak{A}_2u'}{dx}\Big)-u'\frac{d.\mathfrak{A}_2u'}{dx}+u\frac{d.\mathfrak{A}_2u''}{dx}\Big]\omega'$$

$$=2\frac{d}{dx}\Big[u\frac{d.\mathfrak{A}_2u'}{dx}+\mathfrak{A}_2(uu''-u'u')\Big]\omega'$$

Demnach ergiebt sich im Ganzen

$$\text{(9)}\quad \left.\begin{matrix}[1,1]\\+[2,1]+[1,2]\\+[3,1]+[1,3]+[2,2]\\+[3,2]+[2,3]+[3,3]\end{matrix}\right\}=\begin{matrix}u\frac{d^2.\mathfrak{A}_2u''}{dx^2}\omega\\+2\frac{d.}{dx}\Big[\Big(u\frac{d.\mathfrak{A}_2u'}{dx}+\mathfrak{A}_2(uu''-u'u')\Big)\omega'\Big]\\+\frac{d^2}{dx^2}\Big[\mathfrak{A}_2uu\omega''\Big]\end{matrix}$$

als die verlangte Transformation von $u\frac{d^2}{dx^2}\Big[\mathfrak{A}_2\frac{d^2.u\omega}{dx^2}\Big]$.

IV) Ebenso findet man für $u\frac{d^3}{dx^3}\Big[\mathfrak{A}_3\frac{d^3.u\omega}{dx^3}\Big]$ den Werth

$$\text{(10)}\quad \begin{matrix}u\frac{d^3.\mathfrak{A}_3u'''}{dx^3}\omega\\+3\frac{d}{dx}\Big[\Big(u\frac{d^2.\mathfrak{A}_3u''}{dx^3}+u\frac{d.\mathfrak{A}_3u'''}{dx}-u'\frac{d.\mathfrak{A}_3u''}{dx}-\mathfrak{A}_3(u'u'''-u''u'')\Big)\omega'\Big]\\+3\frac{d^2}{dx^2}\Big[\Big(u\frac{d.\mathfrak{A}_3u'}{dx}+2\mathfrak{A}_3(uu''-u'u')\Big)\omega''\Big]\\+\frac{d^3}{dx^3}\Big[\mathfrak{A}_3uu\omega'''\Big]\end{matrix}$$

Und indem man diese Ausdrücke (8) (9) (10) in den ursprünglichen Werth von $\delta\mathfrak{W}_1.u$ nämlich in

$$\delta\mathfrak{W}_1.u = u.\mathfrak{A}_0 u\omega + u\frac{d}{dx}\left[\mathfrak{A}_1\frac{d.u\omega}{dx}\right] + u\frac{d^2}{dx^2}\left[\mathfrak{A}_2\frac{d^2.u\omega}{dx^2}\right] + \cdot$$

einführt und zugleich beachtet, daß das Aggregat

$$u\left(\mathfrak{A}_0 u\omega + \frac{d.\mathfrak{A}_1 u'}{dx}\omega + \frac{d^2.\mathfrak{A}_2 u''}{dx^2}\omega + \frac{d^3.\mathfrak{A}_3 u'''}{dx^3}\omega\right)$$

vermöge der Bedeutung von u sich auf Null reducirt, so sieht man nicht allein, daß die übrigen Glieder einen vollständigen Differenzialquotienten bilden, was mit dem in I) bewiesenen übereinstimmt, sondern auch, daß der auf diese Weise gewonnene Ausdruck für das Integral $\int\delta\mathfrak{W}_1 u dx$ wirklich die Form

$$\mathfrak{B}_0\omega' + \frac{d.\mathfrak{B}_1\omega''}{dx} + \frac{d^2.\mathfrak{B}_2\omega'''}{dx^2}$$

besitzt. — Für den Fall, daß in $\delta\mathfrak{W}$ nur $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ vorkommen, daß also schon $\mathfrak{A}_3$ gleich Null ist, wie sich dies in unsern zukünftigen Anwendungen ereignen wird, haben wir

$$\text{(11)} \qquad \begin{aligned}\mathfrak{B}_0 &= \mathfrak{A}_1 uu + 2\left(u\frac{d.\mathfrak{A}_2 u'}{dx} + \mathfrak{A}_2(uu'' - u'u')\right)\\ \mathfrak{B}_1 &= \mathfrak{A}_2 uu\end{aligned}$$

während $\mathfrak{B}_2$ schon verschwindet.

§. 37.

Dritter Lehrsatz: Wenn durch Integration der sogenannten Hauptgleichung (des §. 25) nämlich

$$\text{(1)} \qquad \mathfrak{W} = \frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}d\frac{dV}{dp} + \frac{1}{dx^2}d^2\frac{dV}{dq} - \cdots = 0$$

die Form der gesuchten Function $y = f(x, C_1, C_2, \ldots)$ bestimmt worden ist, durch welche $U = \int V dx$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden soll und worin sich, je nach der Ordnung der Differenzialgleichung (1) eine größere oder geringere Anzahl anfangs unbestimmter und erst durch anderweite Bedingungen zu bestimmender Integrationsconstanten C_1, C_2, ... vorfinden werden; so wird der Differenzialgleichung

$$\delta\mathfrak{W} = 0$$

welche unserm ersten Lehrsatze zu Folge sich auf die Form

$$\text{(2)} \qquad \mathfrak{A}_0\delta y + \frac{1}{dx}d\left(\mathfrak{A}_1\frac{d\delta y}{dx}\right) + \frac{1}{dx^2}d^2\left(\mathfrak{A}_2\frac{d^2\delta y}{dx^2}\right) + \cdots$$

bringen läßt, jeder in Bezug auf eine der Integrationsconstanten $C_1, C_2, \ldots$ genommene partielle Differenzialquotient

$$\frac{dy}{dC_1} = u_1, \qquad \frac{dy}{dC_2} = u_2, \qquad \ldots$$

an die Stelle von δy gesetzt, Genüge leisten, so daß $\delta y = u_1$, $\delta y = u_2$, ꝛc. sämmtlich partikuläre Integrale der Gleichung $\delta \mathfrak{W} = 0$ sind.

I) Aus (1) wird man auf die unmittelbarste Weise $\delta \mathfrak{W}$ dadurch erhalten, daß man $y + \delta y$, $p + \delta p$, $q + \delta q, \ldots$ an die Stelle von $y, p, q, \ldots$ setzt, von dem dadurch entstandenen Ausdruck den ursprünglichen subtrahirt und dann durch das Differenzial des Variationsarguments dividirt, also

$$\delta \mathfrak{W} = \frac{d\mathfrak{W}}{dy}\delta y + \frac{d\mathfrak{W}}{dp}\delta p + \frac{d\mathfrak{W}}{dq}\delta q + \cdots$$

Wenn man nun aber das allgemeine Integral der Gleichung $\mathfrak{W} = 0$ nämlich die Function $y = f(x, C_1, C_2, \ldots)$ nach einer der in ihr enthaltenen Integrationsconstanten z. B. nach C_1 differentiirt und dann $\delta y = u_1 = \frac{dy}{dC_1}$ annimmt, also

$$\delta p = \frac{d\delta y}{dx} = \frac{d^2y}{dC_1 dx} = \frac{dp}{dC_1}$$

$$\delta q = \frac{d^2\delta y}{dx^2} = \frac{d^3y}{dC_1 dx^2} = \frac{dq}{dC_1}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

setzt: so wird $\delta \mathfrak{W}$ den Werth erhalten

$$(3) \qquad \frac{d\mathfrak{W}}{dy}\frac{dy}{dC_1} + \frac{d\mathfrak{W}}{dp}\frac{dp}{dC_1} + \frac{d\mathfrak{W}}{dq}\frac{dq}{dC_1} + \cdots$$

Dieses ist offenbar einerlei mit $\frac{d\mathfrak{W}}{dC_1}$ d. h. demjenigen Ausdruck, den man erhält, wenn man in $\mathfrak{W}$ vermöge der Gleichung $y = f(x, C_1, C_2, \ldots)$ die Variablen $y, p, q, \ldots$ sämmtlich als Functionen von C_1 ansieht und in Beziehung auf dieses Argument C_1 den totalen Differenzialquotienten von $\mathfrak{W}$ bildet. Da nun aber die Gleichung $\mathfrak{W} = 0$ nach der Voraussetzung für jeden beliebigen Werth der in $f(x, C_1, C_2, \ldots)$ enthaltenen Constanten C_1 Geltung hat, so muß $\frac{d\mathfrak{W}}{dC_1} = 0$ sein. Folglich muß sich der bei (3) aufgestellte Werth von $\delta \mathfrak{W}$ identisch auf Null reduciren, d. h.

die aus dem gefundenen $y = f(x, C_1, C_2, \ldots)$ für $\frac{dy}{dC_1}$ zu derivirende Function von x muß ein Integral der Differenzialgleichung $\delta W = 0$ sein. Derselbe Schluß läßt sich aber offenbar in Betreff der andern Functionen $u_2 = \frac{dy}{dC_2}$, $u_3 = \frac{dy}{dC_3}$ u. s. f. anstellen. Folglich sind auch $\delta y = u_2$, $\delta y = u_3, \ldots$ lauter partikuläre Integrale der Differenzialgleichung (2); was zu beweisen war.

II) Fallen diese partikulären Integrale sämmtlich von einander verschieden aus und ist ihre Anzahl gleich der Ordnung der Differenzialgleichung (2), so wird, da diese Gleichung in Beziehung auf δy, $\frac{d\delta y}{dx}$, $\frac{d^2\delta y}{dx^2}, \ldots$ **linear** ist, ihr allgemeines Integral nach einem bekannten Satze der Integralrechnung durch

$$\text{(4)} \qquad \delta y = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \mu_3 u_3 + \cdots$$

angegeben, wobei μ_1, μ_2, $\mu_3, \ldots$ willkührliche Constanten sein sollen. Daß im Allgemeinen die Anzahl der u_1, $u_2, \ldots$ mit der Ordnungszahl der Gl. $\delta W = 0$ übereinstimme, ist aus der in §. 35 mit (1) numerirten Formel für δW und mit Rücksicht auf das in §. 30 über die Ordnung der Hauptgleichung $W = 0$ Gesagte leicht einzusehen. Aber auch ohne die vollständige Summe (4) zu bilden kann man schon jede unvollständige Combination wie

$$\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2$$

oder

$$\mu_2 u_2 + \mu_3 u_3$$

u. dgl.

als ein Integral der Gl. (2) benutzen. Die beliebig annehmbaren Constanten μ_1, μ_2, $\mu_3, \ldots$ in (4) vertreten die durch Integration der Gl. (2) nothwendig herbeigeführten Integrationsconstanten, während C_1, $C_2, \ldots$ welche **in Beziehung auf die Integration der Gleichung (1) nämlich $W = 0$ willkührlich** waren, bei der Integration der Gleichung (2) nämlich $\delta W = 0$ wie **gegebene Constanten** anzusehen sind, da man die in (2) vorkommenden Größen A_0, $A_1, \ldots$ dadurch zu bestimmten und gegebenen Functionen von x zu machen hat, daß man in die allgemeinen aus den Differenzialquotienten von V gebildeten und bei der Begründung des ersten Lehrsatzes entwickelten Ausdrücke für A_0, $A_1, \ldots$ an die Stelle von y, p, ꝛc. die Werthe $f(x, C_1, C_2, \ldots)$, $\frac{df(x, C_1, C_2, \ldots)}{dx}$ ꝛc. substituirt.

§. 38.

Mit Hülfe der in den vorangehenden drei §§. entwickelten Lehrsätze läßt sich nun das Hinderniß, welches bei der Entscheidung der Frage ob man durch Behandlung der Hauptgleichung einen Maximalwerth des Integrals $U = \int V dx$ oder ein Minimum oder keines von beiden gefunden habe, die bedeutendste Schwierigkeit bildet, und welches darin besteht, daß in den für ∇U_0 oder $\delta^2 U$ gebildeten Ausdrücken (§. 28) sich noch ungerade Potenzen von willkührlichen Functionen unter dem Integralzeichen vorfinden, ziemlich leicht bewältigen. Das zu diesem Zwecke dienſame Verfahren werden wir für die drei Fälle, daß der gegebene Ausdruck V entweder nur x und y enthält, oder zweitens, daß darin der Differenzialquotient erſter Ordnung p, oder endlich, daß darin auch der Differenzialquotient zweiter Ordnung q vorkommt, im Einzelnen jetzt angeben; dabei gehen wir geradezu von der Betrachtung des zweiten Variationsquotienten $\delta^2 U = \delta^2 \int_\alpha^\xi V dx = \int_\alpha^\xi \delta^2 V dx$ ſelbſt aus.

I) Im erſten Falle, wenn nämlich $V = F(x, y)$ iſt, hat man die Hauptgleichung $\partial_y V = 0$, woraus $y = f(x)$, ohne Integration folgt; und Gränzgleichungen giebt es keine. Aus

$$\delta U = \int_\alpha^\xi \delta V dx = \int_\alpha^\xi \partial_y V \delta y dx$$

folgt nun ferner

$$(1) \qquad \delta^2 U = \int_\alpha^\xi \partial^2_{yy} V \delta y^2 dx + \int_\alpha^\xi \partial_y V \delta^2 y dx$$

Hierin wird jedoch der zweite Beſtandtheil wegen $\partial_y V = 0$ verſchwinden, und in dem übrig bleibenden Ausdruck erhält der unter dem Integralzeichen befindliche Factor δy^2 einen poſitiven Werth für jede beliebige Beſchaffenheit von δy, die wir jedoch ſelbſtverſtändlich als eine reelle und innerhalb des Integrationsintervalls continuirliche Function von x denken. Deshalb iſt $\delta^2 U$ eine $\left|\begin{matrix}\text{poſitive}\\ \text{negative}\end{matrix}\right|$ Größe und $U = \int_\alpha^\xi V dx$ ein $\left|\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right|$ wenn während des Integrationsintervalls $x = \alpha$ bis $x = \xi$ die Function $\partial^2_{yy} V$ fortwährend einen $\left|\begin{matrix}\text{poſitiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}\right|$ Werth beſitzt, und nicht etwa unendlich wird.

Träfe es ſich, daß $\partial^2_{yy} V$ von $x = \alpha$ nur bis zu einem zweiten Werthe $x = \xi_1$, der zwar $> \alpha$ aber $< \xi$ wäre, einerlei Vorzeichen be-

$x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ vorstellt, durch die gesuchte Function $y = f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden, jedoch so, daß diese Function (oder Curve) $y = f(x)$ nicht unter allen überhaupt möglichen Functionen (Curven), sondern nur unter denjenigen ausgewählt werden soll, für welche, wenn wir unter W eine von V verschiedene, jedoch gleichfalls gegebene Function von $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ ꝛc. verstehen, das Integral $\int_\alpha^\xi W dx$ einen und denselben Werth besitzt.

Hierher sind insbesondere die sogenannten isoperimetrischen Probleme zu rechnen; bei diesen kommt es darauf an, daß unter allen unzähligen Curven, deren Bogen zwischen zwei gegebenen Gränzpunkten A, B oder zwischen zwei um das Intervall $\xi - \alpha$ von einander abstehenden Gränzordinaten HJ, KL (Fig. 2 oder 7) einerlei Länge hat, diejenige ausgesucht werde, welche dem Integrale $U = \int_\alpha^\xi V dx$, z. B. dem Flächeninhalt $\int_\alpha^\xi y dx$ den möglich größten oder kleinsten Werth verschafft.

I) Alle Aufgaben dieser Art scheinen nun bei dem ersten Anblick eine eigenthümliche Schwierigkeit mit sich zu bringen. Da nämlich blos solche Functionen

$$y = f(x)$$

$$y + \nabla y = f(x) + \delta y.\tau + \delta^2 y.\frac{\tau^2}{1.2} + \cdots$$

hier in Betracht kommen, für welche das Integral $\int_\alpha^\xi W dx$ einerlei Werth erhält, so folgt zunächst, daß wenn man die gesuchte Function $f(x)$ bereits gefunden hätte, und alsdann statt y den um die Variation ∇y geänderten Werth $f(x) + \delta y.\tau + \cdots$ in den gegebenen Ausdruck W substituiren wollte, der neue Werth des Integrals $\int_\alpha^\xi W dx$ von dem vorigen nicht etwa um eine gleichzeitig mit τ unendlich abnehmende Differenz abweichen, sondern demselben vollkommen gleich sein müße. Hierdurch sind wir aber gezwungen, wenn wir unsern Augenmerk auf die Variationen des andern Integrals $U = \int_\alpha^\xi V dx$ richten, den Functionen δy, $\delta^2 y$ u. s. f.

den Charakter völliger Willkührlichkeit zu entziehen; es bleibt vielmehr die Wahl für verschiedene Formen dieser Variationsquotienten an die Beschränkung geknüpft, daß in

$$(1) \qquad \nu\int_a^\xi W dx = \tau.\int_a^\xi \delta' W dx + \frac{\tau^2}{1.2}\int_a^\xi \delta'^2 W dx + \cdots$$

sämmtliche Glieder verschwinden müßen. Und zwar würde die zuvörderst hieraus fließende Bedingung

$$(2) \qquad \int_a^\xi \delta' W dx = 0$$

d. h.
$$\int_a^\xi \left(\frac{dW}{dy}\delta' y + \frac{dW}{dp}\frac{d\delta' y}{dx} + \frac{dW}{dq}\frac{d^2\delta' y}{dx^2} + \cdots\right) dx = 0$$

gegenwärtig, wenn man sich $y = f(x)$ schon gefunden denkt, als eine Bedingungsgleichung für $\delta' y$ anzusehen sein, während in $\int \delta'^2 W dx = 0$ bereits $\delta'^2 y$ auftritt. Aber weit entfernt, daß man in dieser Gleichung (2) das unter dem Integralzeichen in Parenthese gesetzte Aggregat gleich Null setzen dürfte, es wird sogar wegen der innerhalb bestimmter Gränzen $x = \alpha$ bis $x = \xi$ auszuführenden Integration der linke Theil dieser Gleichung blos als eine Function von α und ξ zu denken sein, die zwar von $\delta' y$ abhängt, worin aber $\delta' y$ als Variable gar nicht mehr vorkommt; und es würde sich, wie es auch der Natur der Aufgabe angemeßen ist, durch unzählige, unter einander verschiedene, obschon nicht ganz beliebig annehmbare Formen für $\delta' y$ bewirken laßen, daß der Werth dieses bestimmten Integrals verschwindet.

Wenn sich also einerseits aus der Bedingungsgleichung (2) solche Formen für $\delta' y = \Omega(x)$, welche allein zuläßig sind, nicht ermitteln laßen, und wenn andererseits wegen des gesuchten Maximums oder Minimums von U die Bedingungsgleichung

$$(3) \qquad \int_a^\xi \delta' V dx = 0$$

zwar auch noch durch das gesuchte $y = f(x)$ befriedigt werden muß, aber bei der weiteren Behandlung dieser Gl. (3) der Variationsquotient $\delta' y$ nicht mehr wie früherhin eine ganz willkührliche, sondern gerade nur irgend eine der so eben gedachten Functionen von x vorstellen soll; so leuchtet ein, daß die in den §§. 24 und 25 entwickelte Hauptgleichung nicht mehr unserer gegenwärtigen Untersuchung entspricht, und zugleich mag es schwierig scheinen, bei der Behandlung der Gleichung (3) die hier

besprochene, durch die Gl. (2) festgesetzte Bedingung in den Calkul aufzunehmen.

Dieser Verlegenheit kann man aber sehr bequem durch Anwendung eines schon von Euler angegebenen Kunstgriffs entgehen.

II) Betrachtet man nämlich die Summe

$$\int V dx + \int W dx = \int (V + W) dx$$

als eine Function von x, die sich ändert je nachdem man für das in V und W enthaltene y bald diese, bald jene Form annehmen wollte, so kann man sich die Frage vorlegen, wie diejenige Function $y = f(x)$ beschaffen sein werde, durch welche das zwischen den Gränzen $x = \alpha$ und $x = \xi$ genommene Integral $\int_\alpha^\xi (V + W) dx$ zu einem absoluten Maximum oder Minimum gemacht wird. Hat man nach Anleitung des §. 25 eine solche Function ermittelt, so wird, weil dieses Integral dann wieder in die zwei Bestandtheile

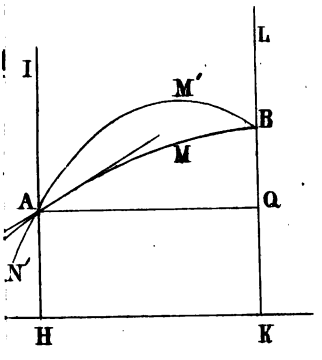
$$\int_\alpha^\xi V dx + \int_\alpha^\xi W dx$$

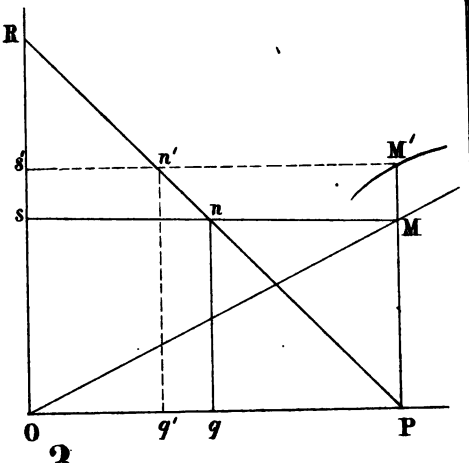
zerfällt, der gefundenen Function zugleich die Eigenschaft zugesprochen werden müßen, daß sie, wenn sie nur mit denjenigen Functionen verglichen wird, welche dem zweiten Summanden $\int_\alpha^\xi W dx$ einen und denselben Werth verleihen, für den ersten Summanden $\int_\alpha^\xi V dx$ den möglich größten beziehungsweise kleinsten Werth liefert. Und dies war gerade die Forderung.

Bedenkt man indessen, daß die gegebenen Functionen V und W bei geometrischen, mechanischen, physikalischen u. dgl. Untersuchungen häufig von verschiedenen Dimensionen sein, und daß dann aus ihrer unmittelbaren Addition oder Subtraction für alle weiteren Rechnungen heterogene Ausdrücke entspringen würden, so erscheint es wohlgethan, die eine gegebene Function, etwa W, vor der Vereinigung mit V erst mit einem vor der Hand noch unbestimmten, jedoch als constant gedachten Factor zu multipliciren. Denn insofern wir durch λ eine unbestimmte Constante vorstellen, ist die Bedingung (2) immer noch identisch mit

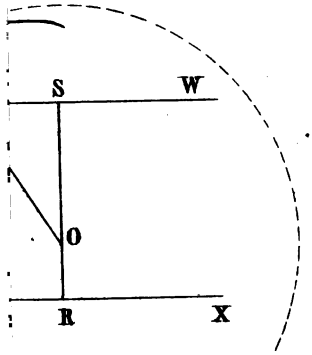
$$\delta \int_\alpha^\xi (\lambda W) dx = \lambda \int_\alpha^\xi \delta W dx = 0$$

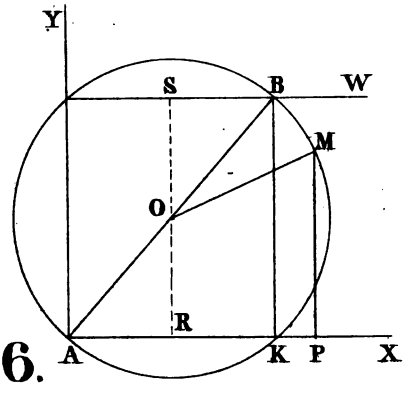
und sobald man eine Curve $y = f(x)$ gefunden hat, welche den Ausdruck


I
L
M′
B
M
A
Q
N
H
K

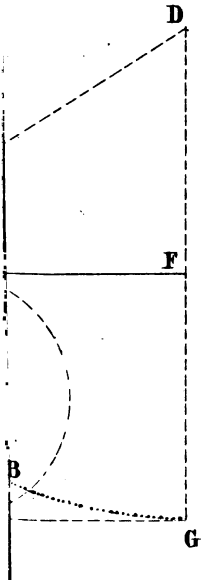

R
s′
n′
M′
s
n
M
O
q′
q
P

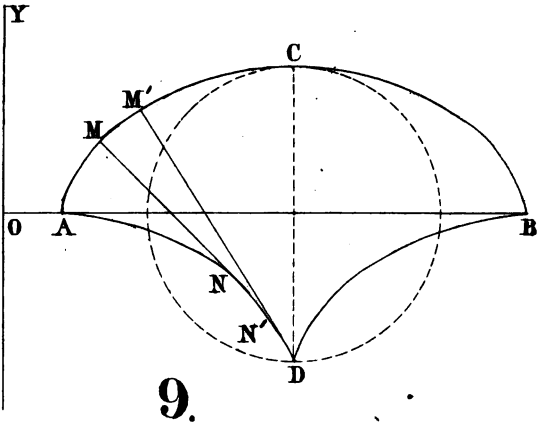
3.


S
W
O
R
X


Y
S
B
W
M
O
R
A
K
P
X

6.


D
F
B
G


Y
C
M′
M
O
A
B
N
N′
D

9.

$\bar{U} = \int_a^\xi (V + \lambda W) dx$ unter allen überhaupt denkbaren Nachbarcurven zu einem $\left|\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right|$ macht, so wird dadurch offenbar zugleich diejenige Curve entdeckt sein, die unter allen denjenigen, für welche das Integral $\int_a^\xi W dx$ einerlei Werth besitzt, der Function $U = \int_a^\xi V dx$ den $\left|\begin{matrix}\text{größten}\\ \text{kleinsten}\end{matrix}\right|$ Werth ertheilt.

Man wird daher der gegenwärtigen Untersuchung die Bedingungsgleichung

$$(4) \qquad \int_a^\xi \delta (V + \lambda W) dx = 0$$

zu Grunde legen; und da es zunächst auf das absolute Maximum oder Minimum dieser Summe $V + \lambda W$ ankommt, da man also jetzt wieder δy als eine ganz willkührliche Function betrachten kann, welche nur etwa den schon früher in §. 24 II) besprochenen Bedingungen unterworfen ist; so gelten wieder die in §. 25 gemachten Schlüße, und man sieht, daß die gesuchte Function aus folgender Gleichung

$$(5) \quad \partial_y (V + \lambda W) - \frac{d}{dx} \partial_p (V + \lambda W) + \frac{d^2}{dx^2} \partial_q (V + \lambda W) - \cdots = 0$$

hervorgehen werde, zu welcher noch die Gränzgleichungen

$$\left(\partial_p (V + \lambda W) - \frac{d}{dx} \partial_q (V + \lambda W) + \cdots\right)_\xi [\delta y]_\xi = 0$$

$$\left(\partial_p (V + \lambda W) - \frac{d}{dx} \partial_q (V + \lambda W) + \cdots\right)_a [\delta y]_a = 0$$

$$\left(\partial_q (V + \lambda W) - \cdots\right)_\xi \left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_\xi = 0$$

u. s. w.

hinzutreten.

III) Bevor wir jedoch zur Anwendung dieser Regeln auf einzelne Aufgaben übergehen, erscheint es nothwendig noch eine Bemerkung über den Factor λ vorauszuschicken.

Wenn diese am Anfang der eben angestellten Betrachtung unbestimmt gelassene Constante zuletzt aus dem Calkul wieder herausfiele, so würde die Frage, ob man derselben einen bestimmten Werth beizulegen habe, nicht aufgeworfen werden können. Allein durch die Behandlung der Hauptgleichung (5) wird λ in die gesuchte Function $y = f(x)$ gerade

so wie die andern in V und W enthaltenen Constanten verwebt, und man muß also schließlich über den dieser Constanten beizulegenden Werth eine Entscheidung treffen. Nun sieht man auf der Stelle, daß wenn durch Integration der bewußten Hauptgleichung die gesuchte Function $y = f(x)$ gefunden worden ist, und sobald den in diese Function eintretenden willkührlichen Integrationsconstanten gemäß den näheren Bedingungen der Aufgabe und mit Rücksicht auf die Gränzgleichungen bestimmte Werthe beigelegt worden sind (s. §. 30 II und III), das Differential $W dx$ eine völlig bestimmte Function von x sein wird. Und wenn also der Betrag des zwischen den bestimmten Gränzen $x = \alpha$ bis $x = \xi$ zu nehmenden Integrals $\int_{\alpha}^{\xi} W dx$ einen gegebenen Werth $= \mathfrak{A}$ besitzen soll, so läßt sich, — weil der Bedingung

$$\int_{\alpha}^{\xi} W dx = \mathfrak{A} \qquad (6)$$

bei unserer bisher (in II) erläuterten Anweisung noch gar nicht Rechnung getragen, vielmehr nur die Bedingung in den Calkul aufgenommen worden ist, daß das gedachte Integral irgend einen unveränderlichen Werth bei allen variirenden Functionen behalten solle, — die Forderung (6) nachträglich nur dadurch erfüllen, daß man noch über eine in $y = f(x)$ enthaltene, demgemäß in $\int W dx$ eintretende und durch die übrigen Bedingungen der Aufgabe noch nicht bestimmte Constante zu verfügen hat. Die Constanten $\mathfrak{A}$ und λ stehen, wie hieraus ersichtlich ist, in der innigsten Wechselbeziehung; nur wenn $\mathfrak{A}$ nicht gegeben ist, bleibt λ unbestimmt, im entgegengesetzten Fall aber wird λ einen bestimmten Werth erhalten, den man als Function von $\mathfrak{A}$ aus (6) entwickeln müßte.

Aus diesem Grunde darf also der Factor λ nicht blos als ein Hülfsmittel angesehen werden, die gegebenen Functionen V und W homogen und dadurch zur Addition geschickt zu machen, sondern er wird selbst im Falle der Homogeneität von V und W, wobei er eine absolute (positive oder negative) Zahl ist, nothwendig sein. Und die Frage, was unter λ gedacht werden solle, ist kurz dahin zu beantworten: eine positive oder negative Constante, welche erstens mit dem Quotienten $\frac{V}{W}$ homogen und zweitens so groß ist, daß wenn $y = f(x)$ aus (5) berechnet und in $\int W dx$ eingesetzt wird, das bestimmte Integral $\int_{\alpha}^{\xi} W dx$ den verlangten Werth erhält.

§. 40.

Als erstes Beispiel diene uns die folgende, schon am Eingange des vorigen Paragraphen angedeutete Aufgabe, welche unter den isoperimetrischen Problemen sich am unmittelbarsten darbietet:

Unter allen unzähligen, durch zwei feste Punkte A und B zu ziehenden Curven, deren Bogen zwischen A und B einerlei Länge besitzt, diejenige aufzufinden, für welche der Inhalt der von dem Bogen AB, dem gegenüberliegenden Stück HK der Abscissenaxe und den beiden Gränzordinaten HA, BK umschloßenen Figur am größten oder am kleinsten ausfällt.

Auflösung. I) Man hat hier, wenn wie gewöhnlich $x = \alpha$ und $x = \xi$ die Abscissen der Punkt A und B vorstellen,

$$U = \int_\alpha^\xi V dx = \int_\alpha^\xi y dx$$

$$\int_\alpha^\xi W dx = \int_\alpha^\xi dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = \int_\alpha^\xi dx . \sqrt{1 + p^2}$$

daher ist

$$\dot{U} = \int_\alpha^\xi (V + \lambda W) dx = \int_\alpha^\xi (y + \lambda \sqrt{1 + p^2}) dx$$

zu einem Maximum resp. Minimum zu machen. Dies führt auf die Bedingungsgleichung

$$(1) \qquad 1 - \frac{1}{dx} d \frac{\lambda p}{\sqrt{1 + p^2}} = 0$$

und hieraus folgt durch Integration sofort

$$(2) \qquad x - C_1 = \frac{\lambda p}{\sqrt{1 + p^2}}$$

Sucht man aus dieser Gleichung $p = \frac{dy}{dx}$, so ergiebt sich

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = \pm \frac{x - C_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2}}$$

also $$(4) \qquad y - C_2 = \mp \sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2}$$

Die gesuchte Curve ist demnach ein Kreisbogen; die beiden Integrationsconstanten C_1, C_2 sind die Coordinaten seines Mittelpunkts, der Halbmeßer wird durch $\varrho = \sqrt{\lambda^2}$ angegeben. Hierdurch wird jedoch keineswegs entschieden, ob man λ als eine positive oder negative Größe anzusehen habe, da man im letztern Falle nur $\varrho = -\lambda$ zu setzen hätte. Es bliebe hiernach unserer Willkühr überlaßen, ob wir in der Gleichung (1)

λ als positiv oder negativ annehmen wollen, und da aus (2) zu ersehen ist, daß p und $(x - C_1)$ $\left|\begin{matrix}\text{einerlei}\\ \text{entgegengesetztes}\end{matrix}\right|$ Vorzeichen besitzen, je nachdem λ $\left|\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right|$ ist, so folgt, daß auch in Betreff des bei (3) gefundenen Ausdrucks für p nicht entschieden werden kann, ob man das obere oder untere Vorzeichen anzuwenden habe. Je nachdem man aber in (3) das Vorzeichen ($\pm$) nimmt, entsprechend einem $\left|\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}\right|$ Werthe von λ, erhält man in (4) das entgegengesetzte Vorzeichen ($\mp$) d. h. einen gegen die Abscissenaxe seine $\left|\begin{matrix}\text{Convexität}\\ \text{Concavität}\end{matrix}\right|$ zukehrenden Kreisbogen. Es würde sich daher zunächst fragen, welcher von diesen zwei verschiedenen, durch die festen Punkte **A** und **B** zu legenden Kreisbogen das gewünschte Maximum (oder Minimum) von $\mathbf{U} = \int_\alpha^\xi y\,dx$ liefere.

II) Setzen wir zu diesem Zwecke in $\int_\alpha^\xi (\mathbf{V} + \lambda \mathbf{W})dx$ die Binome $y + \nabla y$, $p + \nabla p$ an die Stelle von y, p, so erhalten wir den geänderten Werth

$$\int_\alpha^\xi [y + \nabla y + \lambda(1 + p^2 + 2p\nabla p + \nabla p^2)^{\frac{1}{2}}]dx$$

welcher mit Hülfe der schon in §. 29 benutzten Entwickelung der Wurzelgröße $\sqrt{(1 + p^2 + 2p\nabla p + \nabla p^2)}$ in

$$(5)\qquad \int_\alpha^\xi (y + \lambda\sqrt{1+p^2})dx + \int_\alpha^\xi \left(\nabla y + \frac{\lambda p}{\sqrt{1+p^2}}\nabla p\right)dx + \int_\alpha^\xi \tfrac{1}{2}\frac{\lambda \nabla p^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}dx + \cdots$$

übergeht. Augenscheinlich wird wegen unserer Bedingungsgleichung (1) und wegen der Forderung, daß $[\nabla y]_\xi$ und $[\nabla y]_\alpha$ beide gleich Null sein sollen, das zweite Glied dieses Trinoms verschwinden (§. 28 III). Das dritte Glied aber richtet sein Vorzeichen, da die Wurzelgröße $\sqrt{1+p^2}$ schon von Anfang an im Integrale $\int_\alpha^\xi \mathbf{W}dx$ als positiv vorausgesetzt worden

ist, nach dem Vorzeichen von λ. Daher wird U ein $\left|\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right|$ je nachdem λ $\left|\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right|$ ist, d. h. unserer oben gemachten Bemerkung zu Folge, je nachdem man in der Gleichung (4) von dem doppelten Vorzeichen ($\mp$) das $\left|\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}\right|$ anwendet, oder geometrisch ausgedrückt, je nachdem man durch die Punkte A, B einen nach der Abscissenaxe $\left|\begin{matrix}\text{convex}\\ \text{concav}\end{matrix}\right|$ liegenden Kreisbogen legt.

Die Fläche $\int_a^\xi y dx = \text{HABK}$ besteht jedenfalls aus dem Paralleltrapez HABK und dem Segment, welches über der Sehne AB von dem Bogen der gesuchten Curve eingeschloßen wird, dies Segment wird nur, im Falle eines Minimums, von dem Paralleltrapez subtrahirt werden müßen, während im Falle eines Maximums es als additiver Bestandtheil hinzutritt. In so fern also das Trapez einen mit der Gestalt der Curve nicht variirenden Flächeninhalt besitzt, müßen wir den Grund für das Minimum sowohl, als für das Maximum, welches wir durch die vorhergehende Rechnung gefunden haben, in dem einfachen Satze erkennen:
wenn über einer gegebenen Geraden AB als Sehne eine Curve von gegebener Länge so hergespannt werden soll, daß der Inhalt des entstehenden Segments möglichst groß werde, so muß die Curve ein Kreisbogen sein; —
ein Satz, der sich übrigens auch durch elementar-geometrische Betrachtungen erweisen läßt.*)

III) Die Integrationsconstanten C_1, C_2 welche in die Gleichung (4) eingetreten sind und durch welche der Mittelpunkt des Kreisbogens bestimmt werden soll, erhalten natürlich verschiedene Werthe, je nachdem man durch die gegebenen Punkte A, B einen nach unten convexen oder concaven Kreisbogen von der bestimmten Länge beschreiben will, d. h. je nachdem $y < C_2$ oder $y > C_2$ gedacht wird. Im einen wie im andern Fall laßen sich aber, da der gesuchte Mittelpunkt in einem durch den

*) Man sehe hierüber z. B. die schönen Entwickelungen von Steiner in den Abhandlungen d. Berl. Akad. a. d. J. 1836 (Mathem. Classe) oder in Crelle's Journal für d. Math. T. XVIII p. 281 oder auch in Liouville's Journ. de Math. T. VI p. 119.

Halbirungspunkt von AB auf diese Sehne errichteten Perpendikel gelegen sein muß, die Werthe von C_1, C_2 leicht ermitteln, sobald der Halbmeßer $\varrho = \sqrt{\lambda^2}$ bestimmt worden ist. Wäre nun die Länge, die dem Kreisbogen AB zukommen soll, gegeben $= \mathfrak{A}$, und käme es darauf an, den zugehörigen Halbmeßer ϱ zu bestimmen, so könnte man etwa folgendes Verfahren einschlagen.

Es würde alsdann der absolute Werth des Bogens AB durch $\frac{\mathfrak{A}}{\varrho}$ angegeben, und der Hälfte dieses Bogens entspricht als Sinus offenbar $\frac{\frac{1}{2}\overline{AB}}{\varrho} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2}}{\varrho}$, wobei wie gewöhnlich $y=\beta$, $y=\eta$ die Ordinaten der Punkte A, B sein sollen. Es besteht also zwischen $\mathfrak{A}$ und ϱ die Relation

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\frac{\mathfrak{A}}{\varrho} = \frac{\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2}}{2\varrho}$$

welche man aber auch in folgender Form

$$(6) \qquad \frac{\frac{\mathfrak{A}}{2\varrho}}{\operatorname{Sin}\frac{\mathfrak{A}}{2\varrho}} = \frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2}}$$

schreiben kann. Nun wird es leicht sein, mittelst der trigonometrischen Tafeln einen Winkel $\vartheta_1 = \left(\frac{\mathfrak{A}}{2\varrho}\right)$ zu ermitteln, der so beschaffen ist, daß der Quotient $\frac{\vartheta}{\operatorname{Sin}\vartheta}$ gleich der gegebenen Zahl $\frac{\mathfrak{A}}{\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2}}$ ausfällt, sobald nur die Bedingung erfüllt ist, daß $\mathfrak{A} > \sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2}$ nämlich $\mathfrak{A}$ größer als die Sehne AB ist, — eine Bedingung, welche in der That, wenn die Auflösung möglich sein soll, nothwendig erfüllt sein muß.. Der Winkel ϑ befindet sich jedenfalls innerhalb der Gränzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$, da für den ersten Gränzwerth der Quotient $\frac{\vartheta}{\operatorname{Sin}\vartheta} = 1$ und für den andern Gränzwerth unendlich ausfallen würde. Und sobald ϑ bestimmt worden, erhielte man dann $\varrho = \frac{\mathfrak{A}}{2\vartheta}$.

IV) Uebrigens glauben wir nicht mit Stillschweigen übergehen zu dürfen, daß die Natur der Aufgabe, wie sie hier vorgelegt ist, nicht blos

die eben gedachte untere Gränze für die Größe A, nämlich die Länge $\overline{AB}$, welche von A übertroffen werden muß, sondern auch eine obere Gränze an die Hand giebt, welche von A nicht übertroffen werden darf, wofern die Auflösung möglich sein soll. Denn stellen wir uns (Fig. 10) irgend einen Kreis vor, welcher von der Gränzordinate HA in den zwei Punkten A und J, und von der andern Gränzordinate KB in den zwei Punkten B und L geschnitten wird, so besteht für alle auf dem untern Bogen ASL gelegenen Punkte die Gleichung

$$y = C_2 - \sqrt{\varrho^2 - (x - C_1)^2}$$

und für den obern Bogen JRB die Gleichung

$$y = C_2 + \sqrt{\varrho^2 - (x - C_1)^2}$$

und das Integral $\int_a^\xi dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$ kann nach Belieben entweder als Ausdruck für die Länge des untern oder auch des obern dieser zwei Kreisbogen angesehen werden. Aber keineswegs giebt dasselbe Integral etwa die Länge desjenigen Kreisbogens AB, welcher anfangs außerhalb der zwischen den Gränzordinaten HA, KB befindlichen Fläche von A bis J fortlaufend aus der nach unten converen Lage in die nach unten concave Lage sich wendet und hierauf erst, die Gränzordinate AH zum zweiten Mal durchschneidend, von J $[x = \alpha]$ an sich bis B $[x = \xi]$ fortsetzt. Handelt es sich also um ein Maximum von $\int y dx$, und ist A der tiefer gelegene Gränzpunkt, so darf der gesuchte Mittelpunkt nicht oberhalb der durch A mit der Abscissenaxe parallel gezogenen Geraden AE fallen, damit der in Betracht kommende, nach unten seine Concavität wendende Kreisbogen zwischen A und B die Gränzordinate HA nicht noch in einem zweiten Punkte J durchschneidet. Sei F der Punkt, worin das auf die Sehne AB im Halbirungspunkte errichtete Perpendikel GF sich mit der gedachten, durch den tiefer gelegenen Gränzpunkt gezogenen Geraden durchschneidet, so ist mithin der von F aus als Mittelpunkt mit dem Radius FA = FB beschriebene Kreisbogen der größtmögliche von allen überhaupt in Betracht zu ziehenden. Der zu diesem Bogen gehörige Centriwinkel AFB ist aber, wenn wir

$$AB = \sqrt{(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2} = a$$

$$\text{W. ABK} = \text{Arc Sin}\,\frac{\xi - \alpha}{a} = \gamma$$

setzen, offenbar gleich 2γ; und da der Radius durch $\frac{1}{2}$AB. Cosec $\frac{1}{2}$AFB $= \frac{1}{2}a$ Cosec γ ausgedrückt wird, so ist die Länge des fraglichen Kreis-

bogens $\frac{1}{2}a\,\mathrm{Cosec}\,\gamma.2\gamma$, d. h.

$$(7) \qquad a\frac{\gamma}{\mathrm{Sin}\,\gamma}$$

Hierdurch wird also der größte Werth angegeben, welchen das Integral $\int_\alpha^\xi W dx = \int_\alpha^\xi dx\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}$ anzunehmen im Stande ist.

Im Fall eines Minimums von $\int_\alpha^\xi y dx$ würde dagegen der Mittelpunkt des Kreisbogens, der gleich A werden soll und der jetzt seine Convexität abwärts kehren müßte, nicht tiefer gesucht werden dürfen, als der von beiden Punkten A und B am höchsten gelegene; und die Gränze, welche von der gegebenen Länge A nicht überschritten werden darf, ist ebenfalls durch (7) vorgezeichnet.

Daß aber in der That, wenn die gegebene Größe A diesen Gränzwerth übertrifft, die hier vorgelegte Aufgabe keine mögliche Auflösung zuläßt, — daß nämlich unter diesen Umständen keine von A nach B continuirlich fortlaufende Curve angegeben werden kann, durch welche der zwischen den Gränzordinaten HA und KB befindliche Flächenraum ein Maximum oder Minimum würde, davon kann man sich unmittelbar durch geometrische Anschauung überzeugen. Denn die gesuchte Curve müßte jedenfalls zwischen den beiden Gränzordinaten HA und KB kreisförmig gekrümmt sein, weil man sonst über einer beliebigen Sehne, z. B. BR (Fig. 11) statt des nicht kreisförmigen Bogens BR einen kreisförmigen construiren könnte, dessen Länge die nämliche wäre, der aber (dem in II) ausgesprochenen Satze zu Folge) ein an Flächeninhalt größeres Segment liefern würde. — Gesetzt also der Kreisbogen ATJRB, welcher um die gegebene Länge = A zu erhalten, von A bis J außerhalb des von den Gränzordinaten eingeschloßenen Flächenraums verläuft, würde uns für diejenige Curve ausgegeben, wodurch die Fläche HJBK ein Maximum würde; so könnten wir uns doch sofort eine andere Curve A*ir*B denken, welche anfangs sich näher an die Sehne AJ anschmiegte, sobald sie aber mit der Gränzordinate HA zum Durchschnitt gekommen ist, mag man diesen Durchschnitt nach J oder in einen höher gelegenen Punkt *i* rücken, sich gänzlich über dem Kreisbogen JRB her wölbte, so jedoch, daß dieser Theil *ir*B den Kreisbogen JRB an Länge nur um gerade so viel überträfe, als vorher auf dem Wege von A bis *i* im Vergleich mit dem Kreisbogen ATJ erspart worden ist. Da nun der Flächenraum A*ir*B größer

ist als AJRB, so sieht man, daß der Kreisbogen ATJB die verlangte Eigenschaft nicht besitzen kann, ja daß sie überhaupt nur einer solchen Curve zugesprochen werden könnte, welche mit dem außerhalb des Raumes HJBK befindlichen Theile A*ti* sich der Sehne A*i* unter allen möglichen Curven am innigsten annäherte. Begreiflicher Weise existirt aber eine solche Curve gar nicht, man wird vielmehr mit Nothwendigkeit dahin gelangen, daß der Bogen A*ti* geradlinig sein müßte; und somit tritt an die Stelle einer continuirlichen Curve ein discontinuirliches lineäres Gebilde, bestehend aus einem Stücke der Gränzordinate, nämlich A*i*, und dem Bogen einer Curve *ir*B.

Freilich kann man sich in diesem Falle, welcher also eintritt, sobald die gegebene Länge $\mathfrak{A}$ größer ist als der bei (7) aufgefundene Gränzwerth, die weitere Frage vorlegen, wie groß man das eben gedachte Stück A*i* der Gränzordinate anzunehmen habe; die Auflösung dieser geänderten Aufgabe aber verdient selbstständig behandelt zu werden, was wir im folgenden Paragraphen thun wollen.

§. 41.

Aufgabe. Man soll den Punkt J in der Gränzordinate HA (Fig. 11) und den davon abhängigen Bogen JRB so bestimmen, daß der Flächeninhalt der Figur HJBK ein Maximum wird, während die Summe des Bogens JRB und des Ordinatenstücks AJ gleich einer gegebenen Größe $\mathfrak{A}$ sein soll; wobei vorausgesetzt wird

1) daß A der tiefer gelegene Gränzpunkt, nämlich $\beta < \eta$

und 2) daß die gegebene Länge $\mathfrak{A}$ größer als der im vor. §. bei (7) gefundene Gränzwerth sei.

I) Man hat hier, da gemäß der von uns gebrauchten Bezeichnung die Ordinate HJ durch y_a vorzustellen ist, (während $HA = \beta$ gegeben ist)

$$U = \int_a^\xi V dx = \int_a^\xi y dx$$

nebst der Bedingung

$$(1) \qquad y_a - \beta + \int_a^\xi \sqrt{(1+p^2)}\, dx = \mathfrak{A}$$

Es wird daher darauf ankommen die Summe

$$\int_a^\xi (y + \lambda\sqrt{1+p^2})\, dx + \lambda(y_a - \beta)$$

worin zugleich mit y auch p und y_a variiren sollen, zu einem Maximum

zu machen; d. h. aus der Bedingungsgleichung

$$(2) \qquad \int_{\alpha}^{\xi} (\delta y + \frac{\lambda p}{\sqrt{1+p^2}} \delta p) dx + \lambda \delta y_{\alpha} = 0$$

die Beschaffenheit von $y = f(x)$ zu ermitteln. Indem man nun das Integral auf die bekannte Weise transformirt, gelangt man (wie im vor. §.) zur Gleichung;

$$(3) \qquad y - C_2 = \sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2}$$

also zu einem Kreise mit dem Halbmeßer $\varrho = -\lambda$, weil wir, um einen nach unten concaven Bogen zu erhalten, der Constanten λ einen negativen Werth anzuweisen haben.

Als Gränzgleichung dagegen wird man jetzt finden (§. 39 III), mit Rücksicht darauf, daß $y_{\xi} = \eta$ gegeben also $\delta y_{\xi} = 0$ sein soll,

$$- [\partial_p (y + \lambda \sqrt{1+p^2})]_{\alpha} \delta y_{\alpha} + \lambda \delta y_{\alpha} = 0$$

d. h.

$$\lambda - \left[\frac{\lambda p}{\sqrt{1+p^2}}\right]_{\alpha} = 0$$

oder, weil hier für $\frac{\lambda p}{\sqrt{1+p^2}}$ der Werth $x - C_1$ gesetzt werden muß (vor. §. Gl. (2))

$$(4) \qquad \lambda - \alpha + C_1 = 0$$

Hierzu tritt nun die Forderung $y_{\xi} = \eta$ d. h.

$$(5) \qquad \eta = C_2 + \sqrt{\lambda^2 - (\xi - C_1)^2}$$

so wie die Bedingungsgleichung (1). Und durch diese drei Gleichungen würden die drei noch unbestimmten Constanten λ, C_1, C_2 offenbar bestimmt sein.

Da es uns jedoch hauptsächlich nur auf die Größe y_{α} ankommt, so setzen wir in

$$y_{\alpha} = C_2 + \sqrt{\lambda^2 - (\alpha - C_1)^2}$$

für C_1 den aus (4) zu entnehmenden Werth $\alpha - \lambda$. Hierdurch reducirt sich vorstehende Gleichung auf

$$y_{\alpha} = C_2$$

womit die vorgelegte Frage beantwortet ist. Man muß nämlich den Punkt J so aussuchen, daß wenn man von der gegebenen Größe A die Länge AJ abzieht und den Rest in einen Kreisbogen JMRB über der Sehne JB krümmt, der Mittelpunkt C (Fig. 12) sich in gleicher Höhe mit J befindet, daß also HJ zugleich Tangente jenes Kreisbogens ist.

II) Man wird sich ohne Rechnung leicht überzeugen, daß die Summe AJ + JMRB wirklich größer ausfällt als der vom Mittelpunkt F aus beschriebene Kreisbogen ArB (Fig. 12) wobei F die im vor. §. unter IV) besprochene Bedeutung hat. Daher ist die oben gemachte Voraussetzung

$$\mathfrak{A} > \overline{AB} \cdot \frac{\text{arc ABK}}{\sin \text{ABK}}$$

für diese Aufgabe wesentlich. Man wird aber durch eben dieselbe Betrachtung zur Einsicht gelangen, daß je größer bei ungeänderter Lage der Gränzpunkte A, B die Länge $\mathfrak{A}$ gegeben wird, desto weiter auch die Gerade JC in die Höhe zu schieben sei, — daß dabei der Kreisbogen JMRB sich immer mehr einem mit dem Radius $\frac{1}{2}(\xi - \alpha)$ beschriebenen Halbkreis nähert, und daß also wiederum eine Gränze, welche von $\mathfrak{A}$ nicht überschritten werden darf, durch

$$\text{BE} + \tfrac{1}{2}\pi(\xi - \alpha) = \eta - \beta + \tfrac{1}{2}\pi(\xi - \alpha)$$

angegeben wird. Wenn im Gegentheile $\mathfrak{A}$ diesen Werth noch übersteigen sollte, so würde die hier behandelte Aufgabe keine Auflösung mehr zulaßen. An ihre Stelle kann man aber die folgende setzen:

Man soll in der Gränzordinate HA einen Punkt J und in der Gränzordinate KB einen Punkt L bestimmen, so daß die Fläche HJLK ein Maximum wird, während die Summe

$$\overline{AJ} + \text{Bogen JL} + \overline{LB}$$

eine vorgeschriebene Länge $\mathfrak{A} > \eta - \beta + \frac{1}{2}\pi(\xi - \alpha)$ besitzen soll (Fig. 7).

Es tritt alsdann an die Stelle unseres obigen Ausdrucks (1) der folgende

$$\int_a^\xi (y + \lambda\sqrt{1+p^2})dx + \lambda(y_a - \beta) + \lambda(y_\xi - \eta)$$

worin $\eta = \text{KB}$ gegeben und $y_\xi = \text{KL}$ eine variirende Größe ist; und man gelangt auf dem oben betretenen Wege zu den zwei Gränzgleichungen

$$\lambda - \left[\frac{\lambda p}{\sqrt{1+p^2}}\right]_a = 0 \qquad \lambda + \left[\frac{\lambda p}{\sqrt{1+p^2}}\right]_\xi = 0$$

d. h.
$$\lambda - \alpha + C_1 = 0$$

(6)
$$\lambda + \xi - C_1 = 0$$

Hieraus folgt $-\lambda = \frac{1}{2}(\xi - \alpha)$ $\qquad C_1 = \frac{1}{2}(\xi + \alpha)$

d. h. der Mittelpunkt des Kreisbogens JL liegt in einem auf HK im Halbirungspunkte zu errichtenden Perpendikel und steht also von HJ und KL gleich weit ab.

Ferner muß, zu Folge der Kreisgleichung (3),

$$\varrho^2 = (y_\alpha - C_2)^2 + (\alpha - C_1)^2 = (y_\xi - C_2)^2 + (\xi - C_1)^2$$

sein, und da dieses wegen (6) mit

$$\varrho^2 = (y_\alpha - C_2)^2 + \varrho^2 \quad = (y_\xi - C_2)^2 + \varrho^2$$

d. h. mit

$$0 = (y_\alpha - C_2)^2 = (y_\xi - C_2)^2$$

gleichbedeutend ist, so ergiebt sich

$$y_\alpha = y_\xi = C_2$$

Um das gesuchte Maximum zu erhalten, muß man also die Stücke AJ, BL so annehmen, daß die Punkte J, L in gleicher Höhe mit dem Mittelpunkte des Kreisbogens JNL liegen, oder, anders ausgedrückt, so daß wenn man die Summe AJ + BL von der gegebenen Größe A subtrahirt, der Rest sich in einen Halbkreis JNL krümmen läßt.

§. 42.

Aufgabe. Unter allen Curven deren Bogen zwischen den Gränzpunkten A und B eine und dieselbe Länge besitzen, diejenige auszufinden, deren Schwerpunkt am tiefsten liegt d. h. deren mit OY parallele Schwerpunktsordinate ein Minimum ist.

1) Für diese Schwerpunktsordinate hat man bekanntlich, wenn man den Bogen mit s bezeichnet, die Formel $\frac{\int y ds}{s}$. Es soll daher

$$U = \frac{\int y\sqrt{1+p^2}dx}{\int \sqrt{1+p^2}dx}$$ ein Minimum und $\int W dx = \int \sqrt{1+p^2}\,dx = A$

werden. Aber eben weil der Bogen s, welcher den Divisor von U bildet, einen constanten Werth $= A$ behalten soll, reicht es hin $y = f(x)$ so zu bestimmen, daß der Zähler von U ein relatives Minimum werde, d. h. in so fern diese Minimumscurve nur unter denjenigen Curven gesucht wird, bei welchen $\int \sqrt{(1+p^2)}dx$ einen unveränderlichen Werth hat. Deshalb können wir uns an die Ausdrücke

$$V = y\sqrt{1+p^2} \qquad W = \sqrt{1+p^2}$$

$$\partial_y V = \sqrt{1+p^2} \quad \partial_p V = \frac{yp}{\sqrt{1+p^2}} \quad \partial_y W = 0 \quad \partial_p W = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$$

halten. Gerade so wird man in allen ähnlichen Aufgaben verfahren, bei denen das variirende Integral $\int V dx$ mit einem constanten $\int W dx = A$ durch Multiplikation oder Division verbunden ist.

Die Hauptgleichung ist also (§. 39)

$$(1) \qquad \sqrt{1+p^2} - \frac{1}{dx} d\left(\frac{yp}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{\lambda p}{\sqrt{1+p^2}}\right) = 0$$

d. h. $$\sqrt{1+p^2}\,dx = d.\frac{(y+\lambda)p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{p\,dy}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{y+\lambda}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\,dp$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $p\sqrt{1+p^2}$ und schreibt auf der linken Seite dy anstatt pdx, so hebt sich p^2dy beiderseits auf und man gelangt zu

$$\frac{dy}{y+\lambda} = \frac{pdp}{1+p^2}$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$(2) \qquad y+\lambda = C\sqrt{1+p^2}$$

wobei C die willkührliche Constante anzeigt. Es folgt daraus

$$(3) \qquad p = \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{C}\right)^2 - 1}$$

also $$dx = \pm\left[\left(\frac{y+\lambda}{C}\right)^2 - 1\right]^{-\frac{1}{2}} dy$$

und hieraus mittelst Integration

$$(4) \qquad x - B = \pm C \log\left[\frac{y+\lambda}{C} + \sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{C}\right)^2 - 1}\right]$$

Da $\frac{y+\lambda}{C} > 1$ zu Folge (2) ist, so besitzt der hier vorkommende Logarithmus einen positiven Werth, und von dem doppelten Vorzeichen ist $\left|\begin{matrix}\text{entweder } + \\ \text{oder } -\end{matrix}\right|$ zu nehmen, je nachdem $\frac{x-B}{C}$ $\left|\begin{matrix}\text{positiv} \\ \text{negativ}\end{matrix}\right|$ ist d. h. je nachdem $y+\lambda$ und $x-B$ gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben.

Man wird leicht diese Gleichung, indem man sie zunächst in der Form

$$\sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{C}\right)^2 - 1} = e^{\pm\frac{x-B}{C}} - \frac{y+\lambda}{C}$$

schreibt, in's Quadrat erhebt und durch $2e^{\pm\frac{x-B}{C}}$ dividirt, auch in die Gestalt $$(5) \qquad y+\lambda = \tfrac{1}{2}C\left(e^{\frac{x-B}{C}} + e^{-\frac{x-B}{C}}\right)$$

bringen, welche zu manchen Zwecken brauchbarer ist.

II) Es sei nun AME (Fig. 13) eine durch den Punkt A auf der-

jenigen Seite der Gränzordinate HA gezogene Kettenlinie, nach welcher die Abscissen x positiv wachsen, und E sei ihr Scheitel, GE ‖ OY die Hauptaxe; so besteht zwischen EQ und MQ bekanntlich die Gleichung

$$\mathrm{MQ} = \pm a\left[1 + \frac{\mathrm{EQ}}{a} + \sqrt{\left(1 + \frac{\mathrm{EQ}}{a}\right)^2 - 1}\right]$$

Darin bedeutet a eine Constante, welche wir, weil sie zugleich den Krümmungshalbmeßer am Scheitel E angiebt, den halben Parameter der Curve nennen könnten. Die Vergleichung mit (4) führt daher zu dem Schluß, daß die verlangte Minimumscurve eine Kettenlinie ist, deren Scheitel E in dem Abstand $\mathrm{OG} = B$ von der Ordinatenaxe und um eine solche Höhe $\mathrm{GE} = h$ über unserer Abscissenaxe OX erhaben liegt, daß

entweder die Relation (6.α) $$\frac{y+\lambda}{\mathrm{C}} = 1 + \frac{y-h}{a}$$

oder folgende (6.β) $$\frac{y+\lambda}{\mathrm{C}} = 1 + \frac{h-y}{a}$$

besteht, je nachdem wir uns eine gegen die Abscissenaxe convex liegende Kettenlinie AME oder den in Fig. 13 ebenfalls gezeichneten, nach unten concav liegenden Bogen AME also $h > y$ zu denken haben. Für den ersten dieser beiden Bogen würden wir die in (4) vorkommende Constante C mit dem halben Parameter der Kettenlinie identificiren, so daß

$$\frac{\lambda}{\mathrm{C}} = 1 - \frac{h}{\mathrm{C}} \qquad \text{folglich} \qquad h = \mathrm{C} - \lambda$$

ausfällt. Bei der anderen Lage dagegen würde man, damit die Gl. (6.β) für ein variables y Bestand habe, $a = -\mathrm{C}$ setzen, übrigens gerade wie vorher

$$\frac{\lambda}{\mathrm{C}} = 1 - \frac{h}{\mathrm{C}} \qquad \text{und} \qquad h = \mathrm{C} - \lambda$$

erhalten. Durch diese Bedingungen

$$(7) \qquad \begin{aligned} a &= \pm \mathrm{C} \qquad \text{je nachdem C positiv oder negativ ist} \\ \mathrm{OG} &= B \\ \mathrm{GE} &= \mathrm{C} - \lambda \end{aligned}$$

wird nun die durch (4) bezeichnete Kettenlinie vollkommen bestimmt, sobald außer dem noch unbestimmt gelaßenen Multiplikator λ den beiden Integrationsconstanten B und C nach Maßgabe der besonderen Bedingungen der Aufgabe bestimmte Werthe angewiesen worden sind.

III) Die eine dieser beiden Constanten wird sich sofort aus der Bedingung finden laßen, daß die Curve durch den Anfangspunkt A[$x = \alpha, y = \beta$]

gehen soll, den wir hier als gegeben ansehen. Man erhält nämlich

$$(8) \qquad B = \alpha \mp C l\left[\frac{\beta+\lambda}{C} + \sqrt{\left(\frac{\beta+\lambda}{C}\right)^2 - 1}\right]$$

Nehmen wir ferner an, der Punkt B in der Gränzordinate KB sei nicht gegeben; so folgt aus der Gränzgleichung

$$[\partial_p(V + \lambda W)]_\xi \delta y_\xi = 0$$

sogleich $$\left[(y+\lambda)\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right]_\xi = 0$$

Aus (2) und (3) ergiebt sich nun $\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \pm\frac{C}{y+\lambda}\sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{C}\right)^2 - 1}$

daher muß sein

$$[\sqrt{(y+\lambda)^2 - C^2}]_\xi = 0$$

d. h. $\eta + \lambda = \pm C$ oder weil nach der bereits oben gemachten Bemerkung $\frac{y+\lambda}{C}$ durchgehends positiv ist,

$$\frac{\eta+\lambda}{C} = 1$$

Hierdurch verwandelt sich aber die Gleichung (4) in $\xi - B = Cl1 = 0$ woraus $B = \xi$ folgt. Diese Bedingungen

$$(9) \qquad \begin{aligned} B &= \xi \\ C - \lambda &= \eta \end{aligned}$$

zeigen, wenn man sie mit (7) zusammenhält, daß man der Kette durch Herauf- oder Herabbewegen ihres Endpunkts B eine solche Gestalt zu geben suchen müße, daß dieser in der festen Gränzordinate KB liegende Endpunkt zugleich der Scheitel der Kettenlinie werde.

Und was nun noch den Werth von λ anbelangt, welcher aus der Bedingung $s = A$ bestimmt werden muß, so bemerke man, daß wegen (1) das allgemeine Integral $\int v(1+p^2)dx$ einerlei ist mit der Function

$$(y+\lambda)\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \pm C\sqrt{\left(\frac{y+\lambda}{C}\right)^2 - 1}$$

und da, wie wir eben gesehen haben, die hierin vorkommende Wurzelgröße für $x = \xi$, $y = \eta$ sich auf Null reducirt, so erhält man sofort

$$\int_a^\xi \sqrt{1+p^2}\,dx = \sqrt{(\beta+\lambda)^2 - C^2}$$

Die Forderung, daß diese Bogenlänge gleich A sein soll, führt zu $\beta + \lambda$

$= \pm\sqrt{(\mathfrak{A}^2 + C^2)}$, und da der schon mehrmals gemachten Erinnerung gemäß $\beta + \lambda$ gleiches Vorzeichen mit C besitzen muß, so können wir sagen, es sei

$$(10) \qquad \lambda = -\beta \pm \sqrt{\mathfrak{A}^2 + C^2} \quad \text{je nachdem C} \begin{vmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{vmatrix} \text{ ist.}$$

Durch diese drei Gleichungen (9) (10) und (8) wären nun die drei Constanten der Gl. (4) bestimmt, und wir können füglich über die Bedenklichkeit hinwegsehen, daß die Bestimmungsgleichung für C, welche aus (8) durch Substitution der für B und λ gefundenen Werthe entspringt, nämlich

$$(11) \qquad \begin{aligned} \xi &= \alpha + C l\left(\frac{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + C^2} + \mathfrak{A}}{C}\right) \quad \text{für ein positives C} \\ \xi &= \alpha - C l\left(\frac{\sqrt{\mathfrak{A}^2 + C^2} + \mathfrak{A}}{-C}\right) \quad \text{für ein negatives C} \end{aligned}$$

transscendent ist. Die letztere liefert übrigens ganz denselben Werth für $-C$, wie die erste für $+C$. Deshalb läßt sich nur der absolute Werth von C bestimmen, und wenn man durch Auflösung der ersteren Gleichung C als Function von ξ, α, $\mathfrak{A}$ berechnet hätte, so dürfte man nach Belieben diesen Ausdruck auch mit dem entgegengesetzten Vorzeichen nehmen. Zu eben diesem Ergebnis gelangt man auch, wenn man sich an die Gleichung (5) haltend den Werth von C aus

$$\pm\sqrt{\mathfrak{A}^2 + C^2} = \tfrac{1}{2}C\left(e^{-\frac{\xi-\alpha}{C}} + e^{\frac{\xi-\alpha}{C}}\right)$$

zu bestimmen sucht. Denn diese ist, weil zu Folge der bei (10) über das Vorzeichen der Wurzelgröße gemachten Bemerkung der Quotient $\pm\frac{\sqrt{(\mathfrak{A}^2 + C^2)}}{C}$ jedenfalls eine positive Größe sein muß, durchaus gleichbedeutend mit

$$\sqrt{\left(1 + \frac{\mathfrak{A}^2}{C^2}\right)} = \tfrac{1}{2}\left(e^{-\frac{\xi-\alpha}{C}} + e^{\frac{\xi-\alpha}{C}}\right)$$

und bleibt für gleichgroße aber entgegengesetzte Werthe von C offenbar ungeändert.

IV) Um jetzt schließlich die Frage zu entscheiden, ob die gefundene Gleichung (4) oder (5) zu einem Maximum oder Minimum von U verhelfe, d. h. ob bei der durch (4) in Verbindung mit (9) (10) (11) bestimmten Kettenlinie der Schwerpunkt möglichst tief oder möglichst hoch liegt im Vergleich mit anderen Curven von derselben Länge, wenden wir,

da die Betrachtung der in §. 28 durch $\int \Xi_2 dx$ vorgestellten Größe diesmal nicht bequem zum Ziele führen würde, das im §. 38 erläuterte Verfahren an. Wir haben an die Stelle des dort vorkommenden V gegenwärtig die Function

$$V + \lambda W = (y + \lambda)\sqrt{1 + p^2}$$

zu setzen, und es giebt uns also die Formel (5) des §. 38 nach Substitution der Werthe

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \text{ und } \frac{y+\lambda}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}$$

an die Stelle von $\partial^2_{yp} V$ und $\partial^2_{pp} V$ sofort

$$\delta^2 U = \left[\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{y+\lambda}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right)(u\omega)^2\right]_{\xi=\alpha} + \int_\alpha^\xi \frac{y+\lambda}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}(u\omega')^2 dx \tag{12}$$

Nun folgen aber aus unserer gegenwärtigen Gleichung (5) die Werthe

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x-B}{C}} - e^{-\frac{x-B}{C}}\right) = p$$

$$\frac{dy}{dB} = -\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{x-B}{C}} - e^{-\frac{x-B}{C}}\right) = -p$$

und ebenso findet man $\frac{dy}{dC} = \frac{y+\lambda}{C} - \frac{x-B}{C}p$

daher wird (bei der im angeführten §. erklärten Bedeutung von u)

$$u = \mu(y+\lambda) - (\mu x + \nu)p$$

worin μ und ν zwei willkührliche Constanten bedeuten.

Da in dem Integrationsintervalle $x = \alpha$ bis $x = \xi$ sowohl x und y als auch p nicht unendlich werden, so behält für jede endliche Größe von μ und ν auch u einen endlichen Werth. Hieraus folgt, wenn man zugleich noch vermöge (2) für $\frac{y+\lambda}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}$ die Constante C substituirt, daß das auf der rechten Seite der Gl. (12) stehende Integral, nämlich

$$C\int_\alpha^\xi \frac{(u\omega')^2}{1+p^2} dx$$

eine endliche und mit C hinsichtlich des Vorzeichens übereinstimmende Größe sein müße.

Da ferner p_α und $u_\alpha = \mu(\beta+\lambda) - (\mu\alpha+\nu)p_\alpha$ im Allgemeinen nicht verschwinden, während $\delta y_\alpha = u_\alpha\omega_\alpha$ verschwinden soll, so muß $\omega_\alpha = 0$ sein. Zugleich wird wegen der bei (9) für B und η gefundenen Werthe $p_\xi = 0$, $y_\xi = \eta = C - \lambda$, und deshalb ist die auf der rechten Seite der Gleichung (12) außerhalb des Integralzeichens befindliche Größe gleichbedeutend mit

$$Cu_\xi\left[\frac{du}{dx}\right]_\xi \omega_\xi^2$$

Nun folgt aber aus (2) oder (3) sogleich der Werth $\frac{dp}{dx} = \frac{y+\lambda}{C^2}$, daher wird

$$\frac{du}{dx} = -(\mu x+\nu)\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{C^2}(\mu x+\nu)(y+\lambda)$$

und $$\left[\frac{du}{dx}\right]_\xi = -(\mu\xi+\nu)\frac{\eta+\lambda}{C^2} = -\frac{1}{C}(\mu\xi+\nu)$$

Wegen $p_\xi = 0$ wird ferner $u_\xi = \mu(\eta+\lambda) = \mu C$, also im Ganzen

$$Cu_\xi\left[\frac{du}{dx}\right]_\xi = -C\mu(\mu\xi+\nu)$$

und $$\delta^2 U = C\left(-\mu(\mu\xi+\nu)\omega_\xi^2 + \int_a^\xi \frac{(u\omega')^2}{1+p^2}dx\right)$$

Indem wir jetzt den bisher noch unbestimmt gelaßenen Constanten μ, ν solche Werthe in Gedanken beilegen, daß $\mu(\mu\xi+\nu)$ eine negative Größe oder auch $=0$ wird, welches letztere durch die Relation $\nu = -\mu\xi$ erreicht würde, und wodurch wir die erforderliche Unbestimmtheit von $\delta y = u\omega$ wegen der darin vorkommenden willkührlichen Function ω_x nicht im Geringsten beschränken: so gelangen wir zur Ueberzeugung, daß $\delta^2 U$ eine mit C gleichzeitig positive oder negative Größe sei, daß also das Integral

$$\ddot{U} = \int (y\sqrt{1+p^2} + \lambda\sqrt{1+p^2})dx$$

ein absolutes und das Integral $U = \int y\sqrt{(1+p^2)}dx$ in dem verlangten Sinne ein relatives $\left|\begin{matrix}\text{Minimum}\\ \text{Maximum}\end{matrix}\right|$ sei, je nachdem man der Constanten C einen $\left|\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}\right|$ Werth beilegen will, d. h. je nachdem man

die Kettenlinie $\left|\begin{matrix}\text{convex}\\ \text{concav}\end{matrix}\right|$ gegen die Abscissenaxe liegend vom Anfangspunkt A bis zu ihrem Scheitel $\left|\begin{matrix}\text{herabsteigen}\\ \text{hinaufsteigen}\end{matrix}\right|$ laßen will (wie in II) gezeigt worden ist). — Diese Ergebnisse stimmen mit den mechanischen Gesetzen überein, daß eine zwischen den Gränzordinaten HA und KB aufgehängte, undehnbare und gleichförmige Schnur sich wirklich nach der Kettenlinie krümmt, und dann im Gleichgewicht beharrt, während ein von der Schwerkraft afficirtes bewegliches System überhaupt entweder im stabilen oder im labilen Gleichgewicht sich nur dann befinden kann, sobald sein Schwerpunkt die möglichst tiefe beziehungsweise die möglichst hohe Lage erhalten hat.

Anmerkung. Ließe man in der hier behandelten Aufgabe die Bedingung $s = \int \sqrt{(1+p^2)}dx = \text{Const.}$ weg, so würde freilich keine Curve $y = f(x)$ existiren, für welche die Schwerpunktscoordinate $\frac{\int yds}{s}$ ein (absolutes) Minimum wäre, weil bei beliebig zu verlängerndem Bogen s der Schwerpunkt beliebig tief herunter sinken kann. Legte man sich dagegen die Aufgabe vor, blos das Integral $\int yds$ zu einem Minimum zu machen, so findet man ebenfalls die Kettenlinie. Dadurch ist dann ein ebenfalls sehr interessantes Problem aufgelöst, nämlich die Bestimmung derjenigen Curve $y = f(x)$, welche während ihrer Umdrehung um die Axe der X die kleinste Rotationsfläche erzeugt, denn deren Inhalt wird bekanntlich durch $2\pi \int yds$ angegeben. Eine bestimmte Auflösung ist (für zwei feste Gränzpunkte A, B) hier deshalb möglich, weil zwar die Peripherie eines von einem Curvenelement MM' während der Drehung um die Rotationsaxe beschriebenen Flächenelements desto kleiner ausfällt, je tiefer der Punkt M mittelst der Verlängerung des Bogens AM herabgesenkt wird, weil aber andererseits eine Verlängerung von s nicht auf eine Verkleinerung, sondern im Gegentheil auf eine Vergrößerung des Inhalts der entstehenden Rotationsfläche hinwirkt.

§. 43.

Die in den vorhergehenden §§. behandelten Aufgaben waren isoperimetrische Probleme im engern Sinne, weil der Umfang (Perimeter) der Figur HABK oder wenigstens der Bogen zwischen den Gränzordinaten HJ, KL dasjenige Stück war, welches bei allen mit der gesuchten Curve

in Vergleichung zu ziehenden Curven gleiche Größe beſitzen ſollte. Man kann hagegen unter iſoperimetriſchen Problemen im weitern Sinne ſolche Aufgaben verſtehen, bei welchen das Integral $\int W dx$, deſſen Werth ($= A$) nicht variiren ſoll, nicht die Bogenlänge, ſondern eine Größe anderer Art bedeutet; oder auch ſolche Aufgaben, in welchen außer der Bedingung $\int W_1 dx = A$ die weitere Forderung enthalten iſt, daß noch ein zweites Integral $\int W_2 dx$ einen nicht variirenden Werth B behalten ſolle, wobei W_2 einen von W_1 verſchiedenen, jedoch ebenfalls $y, p, q, \ldots$ enthaltenden Ausdruck anzeigt. Aufgaben dieſer letztern Art wird man, indem man ſich genau von den in §. 39 gemachten Schlüßen leiten läßt, durch Behandlung der Gleichung

$$\delta \int (V + \lambda_1 W_1 + \lambda_2 W_2) dx = 0$$

aufzulöſen ſuchen, welche die Bedingungen feſtſtellt, unter welchen die Summe

$$\int V dx + \lambda_1 \int W_1 dx + \lambda_2 \int W_2 dx$$

ein Maximum oder Minimum werden könne.

Wir wenden uns aber jetzt zur Betrachtung ſolcher Aufgaben, in welchen die Auswahl der Function $y = f(x)$ wodurch $U = \int V dx$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht werden ſoll, auf eine von der bisher unterſuchten verſchiedene Weiſe beſchränkt wird, nämlich dadurch, daß die Gränzwerthe von $y, p, q, \ldots$ gewißen Bedingungen Genüge leiſten oder in gewißen Relationen zu einander ſtehen ſollen, daß alſo eine oder mehrere Gleichungen von der Form

$$(1) \qquad \Theta(\xi, \alpha, y_\xi, y_\alpha, p_\xi, p_\alpha, \ldots) = 0$$

gegeben ſind.

I) Man wird ohne Mühe erkennen, daß die allgemeine Form der geſuchten Function

$$y = f(x, C_1, C_2, \ldots)$$

bei Aufgaben dieſer Art ganz dieſelbe ſein müße als wenn die erwähnten Bedingungsgleichungen $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = 0$ u. ſ. w. gar nicht vorlägen, und daß dieſe nur auf die Beſtimmung der Integrationsconſtanten $C_1, C_2, \ldots C_{2m}$ Einfluß ausüben, — mit andern Worten, daß auch jetzt die Auflöſung zunächſt von der Integration der Hauptgleichung (6) des §. 25 oder wenn die Aufgabe eine iſoperimetriſche im weitern Sinne iſt, von der Hauptgleichung (5) des §. 39 abhängt. Denn was auch immer die durch ſolche Nebenbedingungen geforderten Werthe von $y_\xi, y_\alpha, p_\xi, p_\alpha, \ldots$ und die demgemäß einzurichtenden Werthe von $C_1, C_2, \ldots C_{2m}$ ſein mögen, man kann ſich doch einſtweilen denken,

es seien die richtigen zwei Gränzpunkte A und B, also die gesuchten Ordinaten y_α und y_ξ, und die richtige Lage der Tangenten daselbst, also p_α und p_ξ, und dgl. mehr unmittelbar gegeben worden, und es werde unter diesen Umständen die Curve des Maximums oder Minimums von U gesucht. Zur Kenntnis der so fingirten Curve würde man nun mittelst Integration der erwähnten Hauptgleichung gelangen; dieselbe muß aber zugleich die eigentlich geforderte Curve sein.

II) Wenn hiernach festgestellt ist, daß die Bedingungen $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = 0, \ldots$ nur den Einfluß ausüben, daß die in $y = f(x, C_1, C_2, \ldots)$ enthaltenen Integrationsconstanten C_1, $C_2, \ldots$ andere Werthe erhalten, als sie bei Abwesenheit jener Bedingungsgleichungen erhalten haben würden, so leuchtet zugleich ein, daß die Anzahl dieser letztern niemals größer sein dürfe, falls die Aufgabe möglich sein soll, als die Anzahl der Constanten $C_1, C_2, \ldots C_{2m}$ d. h. nicht größer als die Ordnungszahl der Hauptgleichung, welche wir auch gegenwärtig, wie in den §§. 35 fgg. geschehen ist, durch $\mathfrak{W} = 0$ andeuten wollen.

III) Die Methode, wie man die den Gleichungen $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = 0$ ꝛc. zusagenden Werthe von C_1, $C_2, \ldots$ ausmittelt, besteht nun darin, daß man, gerade wie in §. 18 II) und §. 19 III) geschehen ist*), aus jeder dieser Gleichungen eine Relation zwischen den Variationsquotienten $\delta^{\prime} y_\xi$, $\delta^{\prime} y_\alpha$, $\delta^{\prime} p_\xi, \ldots$ herleitet, nämlich

$$\frac{d\Theta_1}{dy_\xi}\delta^{\prime} y_\xi + \frac{d\Theta_1}{dy_\alpha}\delta^{\prime} y_\alpha + \frac{d\Theta_1}{dp_\xi}\delta^{\prime} p_\xi + \frac{d\Theta_1}{dp_\alpha}\delta^{\prime} p_\alpha + \cdots = 0$$

$$\frac{d\Theta_2}{dy_\xi}\delta^{\prime} y_\xi + \frac{d\Theta_2}{dy_\alpha}\delta^{\prime} y_\alpha + \frac{d\Theta_2}{dp_\xi}\delta^{\prime} p_\xi + \frac{d\Theta_2}{dp_\alpha}\delta^{\prime} p_\alpha + \cdots = 0 \qquad (2)$$

u. s. f.

und mittelst derselben aus dem Aggregate derjenigen Bestandtheile von $\delta^{\prime} U$, welche dem Integral $\int \mathfrak{W}\delta^{\prime} y dx$ vorangehen, eben so viele von den Variationsquotienten $\delta^{\prime} y_\xi$, $\delta^{\prime} y_\alpha, \ldots$ eliminirt, als die Anzahl der Bedingungsgleichungen (2) beträgt.

*) Wir haben zwar in §. 19 III) nur von solchen Beschränkungen geredet, daß etliche der Größen $\delta^{\prime} y_\xi$, $\delta^{\prime} y_\alpha$, $\delta^{\prime} p_\xi, \ldots$ gleich Null sein sollen; es bedurfte aber nach den in §. 18 gegebenen Erläuterungen wohl keiner weiteren Auseinandersetzung, daß man auch bei dem Vorhandensein von Bedingungsgleichungen von der gegenwärtig vorausgesetzten Beschaffenheit gerade so zu verfahren hätte wie wir es hier thun.

Um diese Elimination möglichst systematisch vorzunehmen, wird man auch hier auf die in §. 18 III) erklärte Weise sich unbestimmter Factoren bedienen. Sei n die Anzahl der Gleichungen (2), so daß von den $2m$ Variationsquotienten $\delta' y_\xi$, $\delta' y_\alpha$, $\delta' p_\xi, \ldots$ nur $2m - n$ willkührlich sind. Bei der gedachten Zuziehung der Factoren λ_1, $\lambda_2, \ldots$ λ_n erhält man dann, weil die Coefficienten aller Variationsquotienten gleich Null zu setzen sind, $2m$ Gleichungen (auf welche wir sogleich in IV) nochmals zurückkommen werden) also in Verbindung mit den Gleichungen (2) und den Gleichungen

$$y_\xi = f(\xi, C_1, C_2, \ldots) \qquad y_\alpha = f(\alpha, C_1, C_2, \ldots)$$
$$p_\xi = f'(\xi, C_1, C_2, \ldots) \qquad p_\alpha = f'(\alpha, C_1, C_2, \ldots)$$

u. s. f.

deren Anzahl $2m + 2$ ist, im Ganzen $4m + n + 2$ Gleichungen, aus welchen außer den Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ gerade noch die $2m$ Constanten $C_1, C_2, \ldots C_{2m}$ und die $2m + 2$ Größen $y_\xi, y_\alpha, p_\xi, \ldots$ zu bestimmen sind. (Man vgl. jedoch hiermit das in V) Folgende).

IV) Die Prüfung, ob die aus diesen Rechnungen hervorgehende Function $y = f(x)$ nun wirklich ein Maximum oder ein Minimum oder keines von beiden herbeiführe, wird man bei Aufgaben dieser Art auf folgendem Wege anstellen. Setzen wir der Kürze wegen wieder, wie in §. 38 II) und V)

$$\partial_r V - \frac{1}{dx} d\partial_q V + \frac{1}{dx^2} d^2 \partial_r V - \cdots = N$$
$$\partial_q V - \frac{1}{dx} d\,\partial_r V + \cdots = P$$
$$\partial_r V - \cdots = Q$$
$$\cdots$$

so folgt aus

$$\delta' \int V dx = N\delta' y + P\delta' p + Q\delta' q + \cdots + \int \mathfrak{W} \delta' y dx$$

und mit Berücksichtigung der Gleichung $\mathfrak{W} = 0$ die allgemeine Formel

$$\begin{aligned} \delta'^2 \int_\alpha^\xi V dx = {} & N_\xi \delta'^2 y_\xi + P_\xi \delta'^2 p_\xi + Q_\xi \delta'^2 q_\xi + \cdots \\ & - N_\alpha \delta'^2 y_\alpha - P_\alpha \delta'^2 p_\alpha - Q_\alpha \delta'^2 q_\alpha - \cdots \\ & + [\delta' N \delta' y]_{\xi \cdots \alpha} + [\delta' P \delta' p]_{\xi \cdots \alpha} + [\delta' Q \delta' q]_{\xi \cdots \alpha} + \cdots \\ & + \int_\alpha^\xi \delta' \mathfrak{W} \delta' y dx \end{aligned} \tag{3}$$

Das letzte Integral läßt sich nun nach den im angeführten §. 38 entwickelten Vorschriften so umformen, daß schließlich unter dem Integralzeichen eine willkührliche Function nur noch auf der zweiten Potenz vorkommt. Die bei dieser Umgestaltung zum Vorschein kommenden, vom Integralzeichen befreiten Glieder, welche in Beziehung auf $\delta^2 y_\xi$, $\delta^2 y_\alpha$, $\delta^2 p_\xi$, ... zur zweiten Dimension gehören, laßen sich mit den gleichartigen, aus $[\delta^2 N \delta^2 y]_\xi$, $[\delta^2 N \delta^2 y]_\alpha$, $[\delta^2 P \delta^2 p]_\xi$ ꝛc. entspringenden vereinigen. Aus den Bedingungsgleichungen $\nabla\Theta_1 = 0$, $\nabla\Theta_2 = 0$ ... folgt aber aus denselben Gründen, welche in §. 18 II) zu den einzelnen Gleichungen (2), (3), ... geführt haben, ein System von n Bedingungsgleichungen, die in Beziehung auf $\delta^2 y_\xi$, $\delta^2 y_\alpha$, $\delta^2 p_\xi$, ... von der zweiten Dimension sind, und deren jede unter der allgemeinen Form steht

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\Theta_1}{d.y_\xi}\delta^2 y_\xi + \frac{d\Theta_1}{d.y_\alpha}\delta^2 y_\alpha + \frac{d\Theta_1}{d.p_\xi}\delta^2 p_\xi + \cdots \\ &+ \frac{d^2\Theta_1}{dy_\xi^2}\delta^2 y_\xi^2 + 2\frac{d^2\Theta_1}{dy_\xi dy_\alpha}\delta^2 y_\xi \delta^2 y_\alpha + \cdots \quad \cdots \end{aligned}\right\} = 0$$

Wenn man diese Gleichung mit λ_1, und die übrigen, auf gleiche Weise aus Θ_2, Θ_3, .. entspringenden mit den entsprechenden Factoren λ_2, λ_3, ..., wobei λ_1, λ_2, ... λ_n die in III) bereits besprochenen bestimmten Größen sein sollen, multiplicirt und die Produkte zu dem in (3) entwickelten Ausdrucke für $\delta^2 \int V dx$ addirt, so werden die zweiten Variationsquotienten $\delta^2 y_\xi$, $\delta^2 y_\alpha$, $\delta^2 p_\xi$, ... sämmtlich herausfallen. Denn man erkennt auf der Stelle, daß

$$\begin{aligned} &N_\xi + \lambda_1\frac{d\Theta_1}{d.y_\xi} + \lambda_2\frac{d\Theta_2}{d.y_\xi} + \cdots = 0 \\ &-N_\alpha + \lambda_1\frac{d\Theta_1}{d.y_\alpha} + \lambda_2\frac{d\Theta_2}{d.y_\alpha} + \cdots = 0 \\ &P_\xi + \lambda_1\frac{d\Theta_1}{d.p_\xi} + \lambda_2\frac{d\Theta_2}{d.p_\xi} + \cdots = 0 \\ &-P_\alpha + \lambda_1\frac{d\Theta_1}{d.p_\alpha} + \lambda_2\frac{d\Theta_2}{d.p_\alpha} + \cdots = 0 \end{aligned} \qquad (4)$$

u. s. w.

gerade die vorhin in III) gedachten $2m$ Bedingungsgleichungen sind. — Nach Weglaßung dieser mit den zweiten Variationsquotienten behafteten Glieder wird man noch aus dem für $\delta^2 U$ erhaltenen Ausdrucke von den

darin vorkommenden Variationsquotienten erſter Ordnung $\delta' y_\xi$, $\delta' y_\alpha$, $\delta' p_\xi, \ldots$ mittelſt der Gleichungen (2) ſo viele eliminiren, daß nicht mehr als $2m - n$ übrig bleiben, weil nur ſo viele willkührlich annehmbar ſind. Und den ſo gewonnenen Werth von $\delta^2 U$ wird man endlich der Prüfung, ob er eine poſitive oder negative Größe ſei, unterziehen.

V) Wir haben in III) den allgemeinſten Fall vorausgeſetzt, nämlich daß die in $\delta^2 U$ enthaltenen $2m$ Größen $\delta' y_\xi$, $\delta' y_\alpha$, $\delta' p_\xi, \ldots$ ſämmtlich als unbeſtimmt aber von Null verſchieden zu denken wären. Wenn dagegen den Bedingungen der Aufgabe zu Folge etliche der Größen y_ξ, y_α, $p_\xi, \ldots$ nicht als variirend angeſehen werden ſollen, ſo tritt ſelbſtverſtändlich in dem Verfahren eine kleine Modification ein. Denn angenommen es ſolle y_ξ als nicht variirend behandelt werden, ſo iſt $\delta' y_\xi = 0$, und diejenige Bedingungsgleichung, deren rechter Theil die Null und deren linker Theil der nach III) zu bildende Coefficient von $\delta' y_\xi$ ſein würde, nämlich die erſte der Gleichungen (4) exiſtirt nicht. — Der dadurch entſtehende Ausfall von den am Schluße von III) gedachten Beſtimmungsgleichungen für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, C_1, C_2, \ldots C_{2m}, y_\xi, y_\alpha, p_\xi, \ldots$ wird aber bei Aufgaben dieſer Art wieder gedeckt, in ſo fern der Werth von y_ξ als eine unmittelbar gegebene Größe, $= \eta$, anzuſehen iſt. Vgl. §. 30 II).

§. 44.

Um dieſe Regeln an einem Beiſpiele zu erläutern, wählen wir die folgende, ſehr einfache, an §. 26 ſich anſchließende Aufgabe: Zwiſchen den beiden Geraden HJ, KL, welche in den Endpunkten der Abſciſſen $x = \alpha$, $x = \xi$ perpendikulär auf die Abſciſſenaxe errichtet worden ſind, die kürzeſte Linie AB zu finden, mit der beſchränkenden Forderung jedoch, daß das Produkt $y_\alpha . y_\xi = \text{HA.KB}$ einen vorgeſchriebenen Werth B beſitze.

I) Es iſt hier $V = \sqrt{1 + p^2}$ und man wird nach dem im vor. §. unter I) und II) Geſagten leicht zu der Gleichung

$$y = C_1 x + C_2$$

gelangen (§. 26 I).

Die weiteren, im vor. §. mit (4) numerirten Bedingungsgleichungen ſind jetzt, da $\Theta_1 = (y_\xi y_\alpha - B)$ und $N = \partial_p V = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}$ iſt,

$$(1) \qquad \frac{p_\xi}{\sqrt{(1+p_\xi^2)}} + \lambda y_\alpha = 0$$

$$(2) \qquad -\frac{p_\alpha}{\sqrt{(1+p_\alpha^2)}} + \lambda y_\xi = 0$$

aus welchen, in Verbindung mit

$$(3) \qquad \Theta = y_\alpha y_\xi - B = 0$$

$$(4) \quad y_\xi = C_1\xi + C_2 \qquad (5) \quad y_\alpha = C_1\alpha + C_2$$

$$(6) \quad p_\xi = C_1 \qquad (7) \quad p_\alpha = C_1$$

die sieben Größen λ, C_1, C_2, y_ξ, y_α, p_ξ, p_α zu bestimmen sind. (Bei der im vor. §. unter III) erklärten Bedeutung der Zahlen m und n ist hier $m=1$, $n=1$, also $4m+n+2=7$).

Wegen (6) und (7) sind die beiden Gleichungen (1) und (2) gleichbedeutend mit

$$(\triangleq) \qquad \begin{aligned} \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} + \lambda y_\alpha &= 0 \\ \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} - \lambda y_\xi &= 0 \end{aligned}$$

Die Elimination von λ führt zu

$$\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}(y_\xi + y_\alpha) = 0$$

also muß sein

entweder (8) $C_1 = 0$ oder (9) $y_\xi + y_\alpha = 0$

II) Mit $C_1 = 0$ gehört zusammen

$$y_\xi = y_\alpha = C_2$$

und da $y_\xi y_\alpha = B$ sein soll, so paßt diese Bestimmung von C_1 und C_2 nur für einen positiven Werth von B, d. h. wenn etwa $y_\xi y_\alpha = b^2$ gegeben ist. In diesem Falle hat man also

$$C_1 = 0 \qquad y_\xi = y_\alpha = C_2 = \sqrt{B} = \pm b$$

und zugleich wird wegen $(\triangleq)$ $\lambda = 0$.

III) Die Gleichung (9) dagegen ist nur zulässig im entgegengesetzten Falle, wenn nämlich y_α und y_ξ verschiedenes Vorzeichen haben, d. h. wenn B negativ ist. Sei $B = -b^2$, so folgt aus $y_\xi y_\alpha = -b^2$ und (9)

entweder $y_\xi = +b$ und $y_\alpha = -b$
oder $y_\xi = -b$ und $y_\alpha = +b$

Dazu gehört dann wegen (4) und (5)

$$C_1 = \frac{y_\xi - y_\alpha}{\xi - \alpha} = \pm\frac{2b}{\xi - \alpha}$$

$$C_2 = -\tfrac{1}{2}C_1(\xi + \alpha) = \mp\frac{\xi + \alpha}{\xi - \alpha}b$$

ferner

$$\lambda = \frac{2C_1}{(y_\xi - y_\alpha)\sqrt{1 + C_1^2}} = \frac{2}{(\xi - \alpha)\sqrt{1 + C_1^2}} = \frac{2}{\sqrt{4b^2 + (\xi - \alpha)^2}}$$

IV) Schreiten wir nun zu der im vor. §. unter IV) erklärten Prüfung. Die daselbst entwickelte allgemeine Formel (3) giebt uns

$$(10) \qquad \delta^2 \int V dx = \frac{1}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}\delta y \delta p + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}}\delta^2 y + \int \delta W \delta y dx$$

Um das letzte Integral auf die in §. 38 III) erklärte Art zu transformiren, bemerken wir, daß die dort angegebene Bestimmungsgleichung für u sich diesmal auf

$$d.\left(\frac{1}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{du}{dx}\right) = 0$$

reducirt und daß wir also, da es nur auf irgend ein partikuläres Integral dieser Gleichung ankommt, $u = \text{Const} = \mu$ annehmen können. Wir dürfen uns dabei vorbehalten, dieser willkührlichen Constanten irgend einen uns besonders tauglich erscheinenden Werth später anzuweisen, wobei blos, weil $\delta y = u\omega$ sein soll, der Nullwerth unzuläßig sein würde. — Durch diese Annahme $u = \mu$ wird auch, da p ebenfalls constant $(= C_1)$ ist, die am angeführten Orte (Seite 158) geforderte Bedingung erfüllt, daß $\mathfrak{d}^2_{pp} V.u^2$ während des Integrationsintervalles nicht unendlich werde. Demnach erhalten wir für $\int_\alpha^\xi \delta W \delta y dx$ den Werth

$$\frac{\mu^2}{(1 + C_1^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\left[\omega\omega'\right]_\alpha - \left[\omega\omega'\right]_\xi\right) + \frac{1}{(1 + C_1^2)^{\frac{3}{2}}}\int_\alpha^\xi (\mu\omega')^2 dx$$

oder

$$\int_\alpha^\xi \delta W \delta y dx = \frac{-1}{(1 + C_1^2)^{\frac{3}{2}}}\left(\left[\delta y \delta p\right]_\xi - \left[\delta y \delta p\right]_\alpha - \int_\alpha^\xi \delta p^2 dx\right)$$

weil nämlich $\mu\omega = \delta y$, $\mu\omega' = \delta p$ ist.

Wenn wir daher die in (10) angezeigte Integration innerhalb der vorgeschriebenen Gränzen nehmen, für das letzte Integral den eben entwickelten Ausdruck einführen und noch die aus

$$(11) \qquad \delta\Theta = y_\alpha \delta y_\xi + y_\xi \delta y_\alpha = 0$$

fließende Bedingungsgleichung

$$y_\alpha \delta^2 y_\xi + y_\xi \delta^2 y_\alpha + 2\delta y_\alpha \delta y_\xi = 0$$

nachdem sie wieder mit λ multiplicirt worden, hinzufügen; so erhalten wir

$$\delta^2 U = 2\lambda \delta y_\alpha \delta y_\xi + \left[\frac{C_1}{(1+C_1^2)^{\frac{1}{2}}} + \lambda y_\alpha\right]\delta^2 y_\xi - \left[\frac{C_1}{(1+C_1^2)^{\frac{1}{2}}} - \lambda y_\xi\right]\delta^2 y_\alpha + J$$

wobei wir der Kürze wegen durch J die Größe $\frac{1}{(1+C_1^2)^{\frac{1}{2}}}\int_\alpha^\xi \delta p^2 dx$ anzeigen. Beachten wir aber die Gleichungen (⊖) und benutzen noch die Gl. (11) zur Elimination von einer der beiden Größen δy_ξ, δy_α, so erhalten wir schließlich

$$\delta^2 U = -2\lambda \frac{y_\xi}{y_\alpha}(\delta y_\alpha)^2 + J$$

Dabei ist J jedenfalls eine positive Größe; ferner ist für die eine der beiden oben gefundenen Auflösungen $\frac{y_\xi}{y_\alpha} = \frac{b}{b} = 1$ und $\lambda = 0$, für die zweite Auflösung aber $\frac{y_\xi}{y_\alpha} = -1$ und λ positiv. In beiden Fällen also erhält $\delta^2 U$ für jede beliebige reelle Beschaffenheit von δy einen positiven Werth, woraus zu schließen, daß ein Minimum Statt finde.

Daß bei gegebener Abscisse $(\xi - \alpha)$ die Linie

$$AB = \sqrt{(\xi-\alpha)^2 + (y_\xi - y_\alpha)^2}$$

ein Minimum wird für $y_\xi = y_\alpha$, ist von selbst einleuchtend. Warum sie es aber auch für $y_\xi = -y_\alpha$ werde, insofern zugleich die Bedingung (3) erfüllt sein soll, kann man sich durch folgende Betrachtung noch klarer machen. Man nehme auf den Gränzordinaten HJ, KL in der Nähe von A resp. B die Punkte A′, B′ an, so daß man hat

$$A'B' = \sqrt{(\xi-\alpha)^2 + ((y_\xi + \nu y_\xi) - (y_\alpha + \nu y_\alpha))^2}$$

Es kommt dann nur auf den Nachweis an, daß

$$((y_\xi + \nabla y_\xi) - (y_\alpha + \nabla y_\alpha))^2 > (y_\xi - y_\alpha)^2$$

sein müße. Nun sind y_ξ und y_α nach der Voraussetzung gleiche aber entgegengesetzte Größen, und deshalb besitzen bei hinreichender Kleinheit von $AA' = \pm \nabla y_\alpha$ und $BB' = \pm \nabla y_\xi$ die Größen

$$(y_\xi + \nabla y_\xi) \qquad \text{und} \qquad -(y_\alpha + \nabla y_\alpha)$$

einerlei Vorzeichen. Dabei wird gefordert, daß das Produkt eben dieser zwei Größen denselben Werth ($= \delta^2$) besitzen solle, wie das Produkt $y_\xi \times - y_\alpha$. Die Summe zweier mit gleichem Vorzeichen versehener Factoren, deren Produkt eine gegebene Größe haben soll, ist aber bekanntlich dann am kleinsten, wenn beide Factoren einander gleich genommen werden. Folglich ist die Summe von $(y_\xi + \nabla y_\xi)$ und $-(y_\alpha + \nabla y_\alpha)$ größer als die Summe von y_ξ und $-y_\alpha$, w. z. b. w.

§. 45.

Die bereits am Anfange des dritten Capitels entwickelten Regeln für die Bestimmung eines Maximums oder Minimums des Integrals $U = \int_\alpha^\xi V dx$ laßen sich ohne bedeutende Modifikation auch in den Fällen anwenden, wenn der gegebene Ausdruck V nicht blos, wie wir bisher vorausgesetzt haben, eine gesuchte Function y nebst ihren Differentialquotienten enthält, sondern wenn in V zwei (oder mehrere) verschiedene Functionen von x, etwa $y = f(x)$, $z = f(x)$ nebst ihren Differentialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = q, \ldots \quad \frac{dz}{dx} = \mathfrak{p}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \mathfrak{q}, \ldots$$

vorkommen.

Die Bedingungsgleichung $\delta U = \int_\alpha^\xi \delta V dx = 0$ führt alsdann, sobald der Variationsquotient δV nach der Formel (5) des §. 7 berechnet, und dann nach Anleitung des in §. 23 unter II) befolgten Verfahrens durch partielles Integriren alle Differentialquotienten von Variationsquotienten, nämlich

$$\frac{d\delta y}{dx}, \quad \frac{d^2\delta y}{dx^2}, \ldots \quad \frac{d\delta z}{dx}, \quad \frac{d^2\delta z}{dx^2}, \ldots$$

unter dem Integralzeichen weggeschafft worden sind, auf die Gleichung

$$\left[\left(\frac{dV}{dp}-\frac{1}{dx}d\frac{dV}{dq}+\cdots\right)\delta y\right]_{\xi\ldots a}+\left[\left(\frac{dV}{dp}-\frac{1}{dx}d\frac{dV}{dq}+\cdots\right)\delta z\right]_{\xi\ldots a}$$
$$+\left[\left(\frac{dV}{dq}-\cdots\right)\frac{d\delta y}{dx}\right]_{\xi\ldots a}+\left[\left(\frac{dV}{dq}-\cdots\right)\frac{d\delta z}{dx}\right]_{\xi\ldots a}$$
$$+\quad\cdots\quad\cdots$$
$$\cdots\quad\cdots$$
$$+\int_a^\xi\left(\frac{dV}{dy}-\frac{1}{dx}d\frac{dV}{dp}+\frac{1}{dx^2}d^2\frac{dV}{dq}-\cdots\right)\delta y\,dx$$
$$+\int_a^\xi\left(\frac{dV}{dz}-\frac{1}{dx}d\frac{dV}{dp}+\frac{1}{dx^2}d^2\frac{dV}{dq}-\cdots\right)\delta z\,dx\Bigg\}=0 \qquad (1)$$

I) Wenn nun die Functionen $y=f(x)$, $z=f(x)$ unabhängig von einander sind, welcher Fall jedoch bei den Anwendungen des Variationscalculs seltener vorkommen dürfte, so würde zwischen den für y und z in Gedanken zu setzenden variirenden Functionen (im Sinne des §. 21 wo $y=\Phi(x,t)$, $z=\Psi(x,t_1)$ gedacht wurde), also auch zwischen den Variationsquotienten δy und δz gar keine Beziehung Statt finden. Aus dieser Unabhängigkeit hat man zu folgern, daß die in der vorigen Gleichung zuletzt aufgestellten Integralien wegen der unter dem Integralzeichen befindlichen willkührlichen Functionen δy, δz sich einzeln auf Null reduciren müßen (§. 24 I), wodurch man sofort zu den Bedingungsgleichungen

$$\partial_y V-\frac{1}{dx}d\partial_p V+\frac{1}{dx^2}d^2\partial_q V-\cdots=0$$
$$\partial_z V-\frac{1}{dx}d\partial_p V+\frac{1}{dx^2}d^2\partial_q V-\cdots=0 \qquad (2)$$

gelangt. Es kommt dann darauf an, hieraus nach algebraischen Regeln oder, insofern die Gleichungen (2) auch noch die Differentialquotienten der gesuchten Functionen enthalten, nach einer für die Behandlung eines solchen Systems von Differentialgleichungen geeigneten Methode y und z zu bestimmen.

Zu (2) treten alsdann noch, wenn man zur Abkürzung

$$\partial_p V-\frac{d\partial_q V}{dx}+\cdots=N \qquad \partial_p V-\frac{d\partial_q V}{dx}+\cdots=\mathfrak{N}$$
$$\partial_q V-\cdots=P \qquad \partial_q V-\cdots=\mathfrak{P}$$

u. s. w.

setzt, die einzelnen Gränzgleichungen

$$N_\xi \delta y_\xi = 0 \qquad N_\alpha \delta y_\alpha = 0 \qquad \mathfrak{N}_\xi \delta \mathfrak{y}_\xi = 0 \qquad \mathfrak{N}_\alpha \delta \mathfrak{y}_\alpha = 0$$
$$P_\xi \delta p_\xi = 0 \qquad P_\alpha \delta p_\alpha = 0 \qquad \mathfrak{P}_\xi \delta \mathfrak{p}_\xi = 0 \qquad \mathfrak{P}_\alpha \delta \mathfrak{p}_\alpha = 0$$

u. s. f.

von deren Nothwendigkeit man sich sofort überzeugt, wenn man auf §. 19 II) zurückblickt, und deren Gebrauch derselbe ist, den wir in §. 25 und §. 30 II) für die einfacheren Fälle erklärt haben.

II) Uebrigens ist hier auch der Ort für eine Schlußfolgerung, welche bei der Integration solcher Ausdrücke, worin mehrere Variablen $x, y, z, ..$ nebst ihren Differentialien $dx, dy, dz, \ldots d^2y, d^2z, \ldots d^3y, d^3z, \ldots$ vorkommen, dieselbe Wichtigkeit hat, wie die in §. 31 II) gemachte Bemerkung in Betreff der Ausdrücke $F(x, y, dx, dy, d^2y, ..)$ und wodurch diese letztere zu einem allgemeineren Lehrsatze erweitert wird. Wenn nämlich $V dx$ ein solcher Ausdruck wäre, daß die vorstehenden Gleichungen (2), deren Anzahl überhaupt der Anzahl der in V enthaltenen Functionen $y, z, \ldots$ gleich ist, sich identisch erfüllten, so würden die in der allgemeinen Formel für $\delta \int V dx$ unter den Integralzeichen stehenden Ausdrücke verschwinden, also

$$\delta \int V dx = N\delta y + P\delta p + Q\delta q + \ldots$$
$$+ \mathfrak{N}\delta z + \mathfrak{P}\delta \mathfrak{p} + \mathfrak{Q}\delta \mathfrak{q} + \ldots$$
$$+ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

sein, was nur dadurch möglich ist, daß $\int V dx$ selbst sich in einen von jedem Integralzeichen befreiten Ausdruck

$$\Phi(x, y, z, \ldots p, \mathfrak{p}, \ldots q, \mathfrak{q}, ..)$$

umformen ließ. Es sprechen daher diese Gleichungen (2) die Bedingungen aus, unter welchen die hier gedachten Ausdrücke $V dx$ unmittelbar und ohne daß man für $y, z, ..$ bestimmte Functionen von x einsetzen müßte, integrabel sind. Dieselben zerfallen freilich bei der Anwendung auf specielle Fälle, wegen der zwischen $x, y, z, ..$ vorausgesetzten Unabhängigkeit, in eine mehr oder weniger beträchtliche Anzahl von Einzelgleichungen.

Nehmen wir z. B. $V = A + Bp + C\mathfrak{p}$ an, wobei A, B, C gegebene Functionen von x, y, z sein sollen, und fragen nach den Bedingungen, unter welchen das Trinom

$$V dx = A dx + B dy + C dz$$

ein vollständiges Differential ist. — Die Gleichungen (2) ziehen sich für diese Beschaffenheit von V in die einfache Gestalt

$$(\partial_y A - \partial_x B) + (\partial_y C - \partial_z B)\mathfrak{p} = 0$$
$$(\partial_z A - \partial_x C) + (\partial_z B - \partial_y C)p = 0$$

zusammen. Weil nun aber die Erfüllung dieser Gleichungen in dem Sinne gefordert wird, daß man für p und $\mathfrak{p}$ beliebige Functionen von x setzen dürfe, so müßen die in Parentheſe gesetzten Binome einzeln Null sein. Daher müßen A, B, C den drei Bedingungen

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx} \qquad \frac{dA}{dz} = \frac{dC}{dx} \qquad \frac{dB}{dz} = \frac{dC}{dy}$$

Genüge leisten, welches die bekannten, in der Integralrechnung durch andere Betrachtungen entwickelten Bedingungsgleichungen sind.

III) Anders als in I) verhält sich aber die Sache, wenn zwischen den in V enthaltenen Variablen $y, z, \ldots$ Bedingungsgleichungen vorhanden sind. Denn dadurch werden auch die Variationen $\delta y, \delta z, \ldots$ mehr oder weniger von einander abhängig. Betrachten wir zunächst nur den einfachsten Fall, daß in V zwei Functionen y und z nebst ihren Differentialquotienten vorkommen, und daß zwischen x, y, z eine Bedingungsgleichung

$$\Theta(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

gegeben ist; so folgt hieraus (Vgl. §. 22 II)

$$\delta z = -\frac{\partial_y \Theta}{\partial_z \Theta}\delta y \tag{4}$$

Wenn man also nicht etwa vorzieht, mittelst (3) zuvörderst die eine der beiden Functionen y, z durch die andere auszudrücken, etwa z durch y, und diesen Ausdruck nebst den daraus fließenden Werthen für $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots$ in V an die Stelle von $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$ zu substituiren, so daß z aus V gänzlich herausfällt; so braucht man nur den durch (4) dargebotenen Werth für δz in das letzte Integral auf der linken Seite der Gleichung (1) einzusetzen. Weil alsdann der unter dem Integralzeichen stehende Coefficient der willkührlichen Function δy gleich Null sein muß, so besteht die Hauptgleichung

$$\left(\partial_y V - \frac{d\partial_{\mathfrak{p}} V}{dx} + \frac{d^2\partial_{\mathfrak{q}} V}{dx^2} - \cdots\right)\partial_z\Theta$$
$$-\left(\partial_z V - \frac{d\partial_{\mathfrak{p}} V}{dx} + \frac{d^2\partial_{\mathfrak{q}} V}{dx^2} - \cdots\right)\partial_y\Theta = 0 \tag{5}$$

Manchmal wird es gelingen, diese Gleichung, welche im Allgemeinen $x, y, z, p, \mathfrak{p}, q, \mathfrak{q}, \ldots$ enthalten kann, unmittelbar zu integriren; in andern Fällen wird man besondere Kunstgriffe zu Hülfe rufen müßen, da man bei dem Versuche, mittelst (3) eine der beiden unbekannten Functionen

nebſt ihren Differentialquotienten aus (5) zu eliminiren, faſt immer auf eine viel zu verwickelte Differentialgleichung ſtoßen wird. Jedenfalls ſind aber durch dieſe Gleichung (5) in Verbindung mit (3) beide Functionen y, z beſtimmt, wenn es auch nicht gelingen ſollte, ſie in endlicher Form darzuſtellen.

IV) Zur Erläuterung dieſes Verfahrens werden wir im folgenden Paragraphen eine Aufgabe von einer gewißen Allgemeinheit behandeln. Zuvor bemerken wir jedoch noch in Betreff der Gränzgleichungen, daß man gegenwärtig auch in denjenigen Beſtandtheilen der Gl. (1), welche vor den Integralien vorausgehen, an die Stelle von δz den eben gebrauchten Ausdruck (4) zu ſetzen haben wird. Um ferner die zwiſchen δp, $\delta \mathfrak{p}$, δq, $\delta \mathfrak{q}$, ... beſtehenden Relationen zu finden, muß man wie in §. 22 III) die Gleichung

$$\delta\Theta = \partial_y\Theta\,\delta y + \partial_z\Theta\,\delta z = 0$$

einmal oder mehrere Male differentiiren. Dadurch erhält man

$$\frac{d\partial_y\Theta}{dx}\delta y + \frac{d\partial_z\Theta}{dx}\delta z + \partial_y\Theta\,\delta p + \partial_z\Theta\,\delta \mathfrak{p} = 0$$

worin $\frac{d\partial_y\Theta}{dx} = \partial^2_{xy}\Theta + \partial^2_{yy}\Theta.p + \partial^2_{yz}\Theta.\mathfrak{p}$ iſt und $\frac{d\partial_z\Theta}{dx}$ eine ganz ähnliche Geſtalt hat; ferner

$$\frac{d^2\partial_y\Theta}{dx^2}\delta y + \frac{d^2\partial_z\Theta}{dx^2}\delta z + 2\frac{d\partial_y\Theta}{dx}\delta p + 2\frac{d\partial_z\Theta}{dx}\delta \mathfrak{p} + \partial_y\Theta\,\delta q + \partial_z\Theta\,\delta \mathfrak{q} = 0$$

u. ſ. w.

Jede dieſer Gleichungen liefert dann, indem man das eine Mal $x = \xi$, das andere Mal $x = \alpha$ ſetzt, zwei Bedingungsgleichungen zwiſchen den Gränzwerthen der Variationsquotienten. Um von dieſen letztern, nämlich δy_ξ, δy_α, δz_ξ, δz_α, ... aus dem Aggregate, welches in dem linken Theile der Gl. (1) außerhalb des Integralzeichens ſteht, die erforderliche Anzahl zu eliminiren, kann man ſich übrigens wieder der Methode bedienen, daß man die gedachten Bedingungsgleichungen nach der Reihe mit unbeſtimmten Factoren $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, ... multiplicirt, die Produkte zu dem erwähnten Aggregate addirt, und deſſen einzelne Beſtandtheile ſchließlich gleich Null ſetzt. Auf dieſe Weiſe würde man, wenn in V keine höhere Differentialquotienten von y und z als die von der zweiten Ordnung vorkommen, unter Beibehaltung der oben in I) erklärten Bedeutung von $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}$, ... zum Syſteme folgender acht Gränzgleichungen gelangen:

$$\left[N+\mathfrak{L}_1\partial_y\Theta+\mathfrak{L}_3\frac{d\partial_y\Theta}{dx}\right]_\xi\delta y_\xi=0 \qquad \left[P+\mathfrak{L}_3\partial_y\Theta\right]_\xi\delta p_\xi=0$$

$$\left[\mathfrak{N}+\mathfrak{L}_1\partial_z\Theta+\mathfrak{L}_3\frac{d\partial_z\Theta}{dx}\right]_\xi\delta z_\xi=0 \qquad \left[\mathfrak{P}+\mathfrak{L}_3\partial_z\Theta\right]_\xi\delta \mathfrak{p}_\xi=0$$

(6)
$$\left[N+\mathfrak{L}_2\partial_y\Theta+\mathfrak{L}_4\frac{d\partial_y\Theta}{dx}\right]_\alpha\delta y_\alpha=0 \qquad \left[P+\mathfrak{L}_4\partial_y\Theta\right]_\alpha\delta p_\alpha=0$$

$$\left[\mathfrak{N}+\mathfrak{L}_2\partial_z\Theta+\mathfrak{L}_4\frac{d\partial_z\Theta}{dx}\right]_\alpha\delta z_\alpha=0 \qquad \left[\mathfrak{P}+\mathfrak{L}_4\partial_z\Theta\right]_\alpha\delta \mathfrak{p}_\alpha=0$$

Durch Elimination der Constanten $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_4$ vermindert sich deren Anzahl auf vier. Da aber unter den hier vorausgesetzten Umständen aus (5) eine Differentialgleichung vierter Ordnung hervorgehen würde, sei es in Beziehung auf y oder in Beziehung auf z, während die Gl. $\Theta=0$ unmittelbar zur Bestimmung von z (oder von y) verhelfen würde, sobald y (resp. z) gefunden worden: so werden in der That gerade vier Integrationsconstanten in den Formeln für y und z enthalten sein.

§. 46.

Aufgabe. Man soll auf einer gegebenen krummen Fläche zwischen zwei Punkten $A(x_1, y_1, z_1)$ und $B(x_2, y_2, z_2)$ die kürzeste Verbindungslinie bestimmen.

I) Stellen wir die Gleichungen dieser gesuchten Curve einstweilen durch $y=f(x)$, $z=\mathfrak{f}(x)$ vor, so wird das Bogendifferential durch

$$ds=\sqrt{(1+f'(x)^2+\mathfrak{f}'(x)^2)}dx=\sqrt{(1+p^2+\mathfrak{p}^2)}dx$$

angegeben, und es ist, wenn wir wieder $x_1=\alpha$, $x_2=\xi$ setzen,

$$U=\int_\alpha^\xi\sqrt{(1+p^2+\mathfrak{p}^2)}dx$$

die Function, welche ein Minimum werden soll. Hieraus folgt

$$\delta U=\int_\alpha^\xi\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\delta p+\frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\delta\mathfrak{p}\right)dx$$

daher nimmt, wenn durch $\Theta(x, y, z)=0$ die Gleichung der gegebenen Fläche vorgestellt wird, die allgemeine Gleichung (5) des vor. §. die Gestalt an

$$-\frac{1}{dx}d\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\right)\cdot\frac{d\Theta}{dz}+\frac{1}{dx}d\left(\frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}\right)\cdot\frac{d\Theta}{dy}=0$$

d. h.

$$(1) \qquad \partial_y\Theta\, d\frac{dz}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} - \partial_z\Theta\, d\frac{dy}{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}} = 0$$

Diese Differentialgleichung der zweiten Ordnung wird, je nach der Beschaffenheit von $\partial_y\Theta$ und $\partial_z\Theta$ mehr oder weniger complicirt ausfallen; auch würde im Allgemeinen die Integration erst begonnen werden können, sobald mittelst der Gleichung $\Theta = 0$ eine der drei Variablen nebst ihrem Differential eliminirt worden. Bevor wir jedoch in speciellere Betrachtungen über diesen Gegenstand eingehen, ist eine wichtige Bemerkung vorauszuschicken, welche sich auf den Zusammenhang zwischen der in Untersuchung stehenden kürzesten Linie und der sogenannten geodätischen Linie bezieht.

Man versteht unter der auf einer gegebenen Fläche überhaupt, insbesondere aber auf einem Rotationsellipsoid (dem sogenannten elliptischen Sphäroid) zwischen zwei Punkten zu ziehenden geodätischen Linie diejenige Curve, bei welcher die an einem beliebigen Punkte construirte Krümmungsebene allemal die der gegebenen Fläche entsprechende Normale desselben Punkts in sich enthält. Dieser Charakter der geodätischen Linie läßt sich übrigens auch dadurch bezeichnen, daß man sagt diese Curve besitze die Eigenschaft, daß wenn man an einem beliebigen Punkte durch die Tangente der Curve und durch die Normale der Fläche eine Ebene legt, diese zugleich durch das folgende Curvenelement hindurchgehe; — oder auch sie besitze die Eigenschaft, daß wenn man die einem beliebigen Punkte zugehörige Tangente senkrecht auf die dem nächstfolgenden Punkte angehörige tangirende Ebene projicirt, durch diese Projection zugleich die nächstfolgende Tangente der Curve gebildet werde. Daß jede dieser drei Definitionen mit den beiden anderen völlig übereinstimmt, bedarf keiner weiteren Erläuterung; merkwürdig ist aber, daß wenn man dieselbe in der Zeichensprache der Analysis ausdrückt, alsbald die Differentialgleichung (1) zum Vorschein kommt.

Die Gleichung der Krümmungsebene einer Curve an einem beliebigen Punkt x, y, z hat die Form

$$(2) \qquad A(x'-x) + B(y'-y) + C(z'-z) = 0$$

worin

$$A = dzd^2y - dyd^2z \qquad B = dxd^2z - dzd^2x \qquad C = dyd^2x - dxd^2y$$

ist. Die Gleichungen der Normale dagegen pflegt man durch

$$(3) \qquad \begin{aligned} x'-x &= -P(z'-z) \\ y'-y &= -Q(z'-z) \end{aligned}$$

vorzustellen, worin P und Q die aus der Gleichung der krummen Fläche zu berechnenden partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ sind. Da in unserm gegenwärtigen Falle aus der Gleichung der gegebenen Fläche durch Differentiation

$$\partial_x\Theta\,dx + \partial_y\Theta\,dy + \partial_z\Theta\,dz = 0 \tag{4}$$

entspringt, so haben wir zu setzen

$$P = -\frac{\partial_x\Theta}{\partial_z\Theta} \qquad Q = -\frac{\partial_y\Theta}{\partial_z\Theta}$$

Soll nun die Gerade (3) in der Ebene (2) gelegen sein, wie es unsere erste Definition der geodätischen Linie fordert, so muß nach bekannten Principien der analytischen Geometrie die Bedingung

$$-AP - BQ + C = 0$$

erfüllt sein. Also besteht für die gesuchte Curve die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\partial_x\Theta.(dx\,d^2y - dy\,d^2x) + \partial_y\Theta.(dx\,d^2z - dz\,d^2x)\\ + \partial_z\Theta.(dy\,d^2x - dx\,d^2y) = 0\end{aligned} \tag{5}$$

Aus der Formel $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ergiebt sich aber durch Differentiation

$$ds\,d^2s = dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z \tag{6}$$

und da man die Gleichung (1) auch in der einfacheren Gestalt

$$\partial_y\Theta\,d\frac{dx}{ds} - \partial_x\Theta\,d\frac{dy}{ds} = 0 \tag{7}$$

d. h. $\partial_y\Theta.(ds\,d^2x - dx\,d^2s) - \partial_x\Theta.(ds\,d^2y - dy\,d^2s) = 0$

schreiben kann, so kommt es nur darauf an, aus (5) die Differentialien dx und d^2x mit Hülfe von ds und d^2s zu eliminiren. Multiplicirt man nun Gl. (5) mit dx und berücksichtigt (4), so erhält man

$$\left.\begin{aligned}\partial_y\Theta.(dx^2d^2z - dz\,dx\,d^2x - dy\,dz\,d^2y + dy^2d^2z)\\ - \partial_z\Theta.(dx^2d^2y - dy\,dx\,d^2x - dy\,dz\,d^2z + dz^2d^2y)\end{aligned}\right\} = 0$$

und diese Gleichung verwandelt sich, sobald man für $dx\,d^2x$ den aus (6) fließenden Werth einführt, in

$$\partial_y\Theta.(ds^2d^2z - dz\,ds\,d^2s) - \partial_z\Theta.(ds^2d^2y - dy\,ds\,d^2s) = 0$$

was mit (7) identisch ist.

Es stellt also der Bogen einer geodätischen Linie zwischen zwei Punkten A, B zugleich die kürzeste Verbindungslinie dar, die sich auf der gegebenen Fläche von A nach B ziehen läßt.

Wenn wir übrigens, anstatt die Gleichung (5) mit dx zu multipliciren und unter Zuziehung von (4) den Differentialquotienten $\partial_x\Theta$

fortzuschaffen, entweder mit dy multiplicirt und $\partial_y\Theta$ eliminirt, oder mit ds multiplicirt und $\partial_x\Theta$ eliminirt hätten, so würden wir auf ganz ähnliche Weise zu den Gleichungen

$$\partial_x\Theta.(ds d^2x - dx d^2s) - \partial_x\Theta.(ds d^2z - dz d^2s) = 0$$
$$\partial_x\Theta.(ds d^2y - dy d^2s) - \partial_y\Theta.(ds d^2x - dx d^2s) = 0$$

gelangt sein. Daher giebt man als Differentialgleichungen der geodätischen Linie auf der krummen Fläche $\Theta(x, y, z) = 0$ gewöhnlich die Zusammenstellung

$$\partial_x\Theta\, d\frac{dy}{ds} - \partial_y\Theta\, d\frac{dx}{ds} = 0$$
$$\partial_x\Theta\, d\frac{dx}{ds} - \partial_x\Theta\, d\frac{dz}{ds} = 0 \qquad (8)$$
$$\partial_y\Theta\, d\frac{dz}{ds} - \partial_x\Theta\, d\frac{dy}{ds} = 0$$

Aus zweien derselben ergiebt sich freilich die dritte unmittelbar; und schon aus einer von ihnen laßen sich mit Benutzung von (4) und (6) die beiden andern leicht herleiten. — In so fern man für weitere Rechnungen den Bogen s als Independente anzunehmen sich entschließt, kann man dieselben in der einfacheren Gestalt

$$\partial_x\Theta\, d^2y - \partial_y\Theta\, d^2x = 0$$
$$\partial_x\Theta\, d^2x - \partial_x\Theta\, d^2z = 0$$
$$\partial_y\Theta\, d^2z - \partial_x\Theta\, d^2y = 0$$

schreiben.

II) Was nun die Integration einer der gefundenen Gleichungen (8) anbelangt, so vermag man, wenn die gegebene Fläche irgend eine Rotationsfläche (ein Revolutions-Sphäroid) ist, die erste Integration mit leichter Mühe zu bewerkstelligen. Denn eine solche Fläche hat, in so fern man dem üblichen Gebrauche gemäß die Rotationsaxe als Axe der z annimmt, eine Gleichung von der Form

$$x^2 + y^2 - F(z) = 0$$

Diese liefert die Werthe $\partial_x\Theta = 2x$, $\partial_y\Theta = 2y$, nach deren Einführung die erste der Gleichungen (8) die einfache Gestalt

$$x d\frac{dy}{ds} - y d\frac{dx}{ds} = 0$$

annimmt. Dieses ist aber, wie man leicht sieht, gleichbedeutend mit

$$d.\left(\frac{x dy - y dx}{ds}\right) = 0$$

was ſich unmittelbar integriren läßt. Man hat alſo

$$(9) \qquad xdy - ydx = Cds$$

wobei C eine willkührliche Conſtante bedeutet.

Die weitere Behandlung dieſer Gleichung hängt ſehr von der Beſchaffenheit der vorher mit F(s) bezeichneten Function ab. Bei einer Kugel vom Halbmeßer a iſt $F(s) = a^2 - s^2$. Da man aber bei der Kugel jeden beliebigen Durchmeßer als Rotationsaxe anſehen, folglich auch die vorige Rechnung mit Vertauſchung der Buchſtaben x, y, s wiederholen kann, ſo beſtehen natürlich die drei Gleichungen

$$xdy - ydx = Cds$$
$$sdx - xds = C'ds$$
$$yds - sdy = C''ds$$

aus welchen man, indem man ſie nach der Reihe mit s, y, x multiplicirt und darauf addirt

$$C''x + C'y + Cs = 0$$

d. h. die Gleichung einer durch das Centrum der Kugel gehenden Ebene erhält. Die kürzeſte Verbindungslinie, welche man auf einer Kugelfläche zwiſchen zwei Punkten A, B ziehen kann, iſt alſo ein Bogen des durch dieſe Punkte zu conſtruirenden größten Kreiſes. Wenn die Coordinaten beider Punkte gegeben ſind, ſo erhalten die Verhältniſſe $\frac{C''}{C}$ und $\frac{C'}{C}$ beſtimmte Werthe.

Aber auch bei anderen Rotationsflächen gelingt es, das gefundene erſte Integral (9) ſo umzugeſtalten, daß für die übrig bleibende Integration die Variablen abgeſondert ſind. Schreiben wir wegen größerer Kürze Z anſtatt F(s) und Z′ für $\frac{dZ}{ds}$, ſo haben wir

$$y = \sqrt{Z - x^2} \qquad dy = \frac{\frac{1}{2}Z'ds - xdx}{\sqrt{Z - x^2}}$$

alſo

$$xdy - ydx = \frac{\frac{1}{2}Z'xds - Zdx}{\sqrt{Z - x^2}}$$

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)} = \sqrt{\frac{(Z + \frac{1}{4}Z'^2 - x^2)ds^2 - Z'xdxds + Zdx^2}{Z - x^2}}$$

Subſtituirt man dieſe Werthe in (9), erhebt beide Theile der Gleichung in's Quadrat und ordnet, ſo wird man erhalten

$$dx^2 - \frac{Z'x}{Z}dxds = \frac{C^2(Z + \frac{1}{4}Z'^2 - x^2) - \frac{1}{4}Z'^2x^2}{Z(Z - C^2)}ds^2$$

und hieraus fließt für dx der Werth

$$dx = \frac{Z'x\,ds}{2Z} \pm \frac{C}{Z}\sqrt{\frac{(Z-x^2)(Z+\frac{1}{4}Z'^2)}{Z-C^2}}\,ds$$

Setzt man nun $x = t\sqrt{Z}$

worin t eine neue Variable bedeutet, so wird

$$dx = \frac{tZ'}{2\sqrt{Z}}\,ds + \sqrt{Z}\,dt = \frac{Z'x\,ds}{2Z} + \sqrt{Z}\,dt$$

und die vorstehende Differentialgleichung zwischen x und s verwandelt sich in

$$\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pm\frac{C}{Z}\sqrt{\frac{Z+\frac{1}{4}Z'^2}{Z-C^2}}\,ds$$

worin die Variablen abgesondert sind. Statt des doppelten Vorzeichens auf der rechten Seite vom Gleichheitszeichen könnte man auch, so lange die in (9) zuerst aufgetretene Constante C noch willkührlich geblieben ist, nach Belieben entweder (+) oder (−) vorschreiben. Nach ausgeführter Quadratur hat man wieder $\frac{x}{\sqrt{Z}}$ an die Stelle von t zu restituiren; daher ist das verlangte Integral

$$\text{(10)} \qquad \text{Arc Sin}\frac{x}{\sqrt{Z}} = C' + C\int\frac{(Z+\frac{1}{4}Z'^2)^{\frac{1}{2}}}{(Z-C^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{ds}{Z}$$

worin C′ die zweite Integrationsconstante anzeigt.

III) Suchen wir nun hiervon eine Anwendung zunächst in Beziehung auf das elliptische Sphäroid zu machen, welches durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleinere Axe $2b$ erzeugt wird, so haben wir

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - s^2)$$

Es ist daher im Vorhergehenden der Ausdruck $\frac{a^2}{b^2}(b^2 - s^2)$ an die Stelle von Z zu setzen; und wenn man noch zur Abkürzung $\varepsilon_1{}^2$ an die Stelle von $\frac{a^2-b^2}{b^2}$ und A anstatt $\frac{Cb}{a}$ schreibt, findet man ohne Mühe

$$\text{Arc Sin}\frac{x}{\sqrt{Z}} = C' + \frac{Ab}{a}\int\frac{\sqrt{b^2+\varepsilon_1{}^2s^2}}{\sqrt{b^2-A^2-s^2}}\cdot\frac{ds}{b^2-s^2}$$

Die übrig bleibende Quadratur ist, wie man sieht, von elliptischen Transscendenten abhängig.

Zu etwas bequemeren und für die Aufgaben der höheren Geodäsie

brauchbareren Formeln kann man durch Einführung anderer Variablen gelangen. Indem wir nämlich von dem ersten Meridian an, welcher in der Ebene XZ angenommen werden möge, die sogenannte (geographische) Länge φ als einen in der Ebene XY (Aequatorialebene) am Centrum O liegenden Polarwinkel einführen, ist für einen beliebigen Punkt M unserer Curve

$$x = r \operatorname{Cos} \varphi \qquad y = r \operatorname{Sin} \varphi$$

wobei r die Projection des Radius-Vector OM auf die Aequatorialebene, oder was dasselbe ist, den Radius des durch M gehenden Parallelkreises bedeutet.

Dadurch wird $xdy - ydx = r^2 d\varphi$ also vermöge (9)

$$r^2 d\varphi = C ds$$

Ferner wird $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2$

daher kann man, indem man aus vorstehenden zwei Gleichungen das eine Mal ds, das andere Mal $d\varphi$ fortschafft, das System der zwei Gleichungen

$$(11) \qquad r^2(r^2 - C^2) d\varphi^2 = C^2(dr^2 + dz^2)$$

$$(12) \qquad (r^2 - C^2) ds^2 = r^2(dr^2 + dz^2)$$

ableiten.

Man denke sich nun über der Axe $2b$ als Durchmeßer eine Kugelfläche beschrieben, welche also ganz im Innern des Sphäroids liegt, und sehe denjenigen Punkt m, worin der in der Ebene des Parallelkreises nach M gezogene Radius r die Kugeloberfläche trifft, als den dem Punkte M entsprechenden Punkt der Kugel an. Oder auch, man denke sich um das gemeinschaftliche Centrum O eine Kugelfläche mit dem Durchmeßer $2a$ beschrieben und betrachte denjenigen Punkt μ, worin die zu M gehörige Coordinate z diese äußere Kugelfläche trifft, als den entsprechenden von M. Die beiden Radien Om und $O\mu$ fallen dann zu Folge einer bekannten Eigenschaft der Ellipse zusammen, und ihren Neigungswinkel gegen die Ebene des Aequators nennt man die reducirte Breite des Punkts M, während man unter der wahren oder astronomischen Breite denjenigen Winkel versteht, unter welchem die im Punkte M auf das Sphäroid errichtete Normale gegen die Ebene des Aequators geneigt ist. — Wenn MN (Fig. 14) diese Normale, und DME den Quadranten des durch M laufenden Meridians vorstellt, also W. DNM $= \lambda$ die wahre Breite ist; so findet man mittelst der bekannten Formel für die Subnormale PN sogleich $\operatorname{tang} \lambda = \frac{a^2 z}{b^2 r}$. Setzen wir dagegen die reducirte

Breite $DOm = L$, so haben wir wegen $Om = b$ und $O\mu = a$ die Werthe

$$(13) \qquad \left.\begin{matrix} MP \\ s \end{matrix}\right\} = b \operatorname{Sin} L \qquad \left.\begin{matrix} OP \\ r \end{matrix}\right\} = a \operatorname{Cos} L \qquad \operatorname{tang} L = \frac{as}{br}$$

Da man hiernach die Variablen r und s als einfache Functionen des W. L hat, so wird man sich mit größerm Vortheil dieser Gleichungen (13) bedienen, als wenn man aus $s = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - r^2}$ das Differential ds durch dr ausdrücken und in (11) substituiren wollte.

Man hat jetzt

$$ds = b \operatorname{Cos} L dL \qquad dr = -a \operatorname{Sin} L dL$$

dadurch transformiren sich die beiden Differentialgleichungen (11) und (12) in

$$a^2 \operatorname{Cos} L^2 (a^2 \operatorname{Cos} L^2 - C^2) d\varphi^2 = C^2 (a^2 \operatorname{Sin} L^2 + b^2 \operatorname{Cos} L^2) dL^2$$
$$(a^2 \operatorname{Cos} L^2 - C^2) ds^2 = a^2 (a^2 \operatorname{Sin} L^2 + b^2 \operatorname{Cos} L^2) \operatorname{Cos} L^2 dL^2$$

also wird man, wenn man noch $b^2 = (1 - \varepsilon^2) a^2$ nämlich $\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ setzt, schließlich erhalten

$$(14) \qquad \varphi = C' \pm C \int \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Cos} L^2}}{\sqrt{a^2 \operatorname{Cos} L^2 - C^2}} \frac{dL}{\operatorname{Cos} L}$$

$$(15) \qquad s = C'' \pm a^2 \int \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \operatorname{Cos} L^2}}{\sqrt{a^2 \operatorname{Cos} L^2 - C^2}} \operatorname{Cos} L dL$$

Das Vorzeichen wird sich darnach richten, ob L wächst oder abnimmt, während φ beziehungsw. s zunimmt; die eintretenden Constanten C', C'' aber erhalten bestimmte Werthe, sobald für den Punkt A die Länge φ und die reducirte Breite L gegeben sind, während der Bogen s daselbst verschwindet.

Ueber das vortheilhafteste Verfahren zur Berechnung der beiden vorstehenden Integralien in Details einzugehen, würde hier zu weitläuftig werden*). Nur in Betreff der Constanten C, welche durch die erste Integration eingeführt worden und deren Größe wesentlich von der Richtung abhängt, nach welcher man aus dem Anfangspunkt A auf der Oberfläche des Sphäroids fortschreiten soll, glauben wir noch die Bemerkung anfügen

*) Man kann hierüber, namentlich auch wegen der Einrichtungen, die man dem Calkul zu praktischen Zwecken bei den Operationen der höheren Geodäsie zu geben hat, wobei ε eine sehr kleine Größe ist, nachsehen Grunert's Sphäroidische Trigonometrie (1838) §§. 34 fgg. oder desselben Elemente der ebenen, sphärischen und sphäroidischen Trigonometrie (1837) §§. 156 fgg.

zu müßen, daß eben jene erſte Integralgleichung (9), wenn man ſie in der Geſtalt $r^2\frac{d\varphi}{ds} = \mathrm{C}$ zu Rathe zieht, auf eine geometriſch anſchauliche Beſtimmung dieſer Conſtanten hinleitet. Es ſei nämlich (Fig. 15) **E** der (Nord-)Pol des Sphäroids, **MM'** ein Element der geodätiſchen Linie, **EM** und **EM'** ſeien die Meridiane von **M** und **M'**, endlich **M***h* der durch **M** laufende Parallelkreis, ſo iſt, wenn wir

$$\text{W. EMM'} = \alpha \qquad \text{W. } h\text{MM'} = \gamma$$

ſetzen, offenbar $\alpha = \frac{1}{2}\pi \pm \gamma$, alſo jedenfalls $\mathrm{Sin}\,\alpha = \mathrm{Cos}\,\gamma$. Nun folgt aber aus der Betrachtung des Elementardreiecks **MM'***h* ohne Weiteres $\frac{\mathrm{M}h}{\mathrm{MM'}} = \frac{r d\varphi}{ds} = \mathrm{Cos}\,\gamma$, daher beſteht die Gleichung

$$r^2\frac{d\varphi}{ds} = r\,\mathrm{Sin}\,\alpha$$

d. h. (16) $$\mathrm{C} = r\,\mathrm{Sin}\,\alpha$$

Zu Folge dieſer bemerkenswerthen Relation wird bei dem Fortſchreiten längs einer geodätiſchen Linie der Sinus des veränderlichen Winkels, unter welchem die Curve den Meridian durchſchneidet (des Azimuth-Winkels), in demſelben Verhältniſſe abnehmen oder wachſen, in welchem der Radius des Parallelkreiſes zu- oder abnimmt. — Wenn alſo für den Anfangspunkt **A** außer r auch der W. α gegeben iſt, ſo erhält **C** unmittelbar nach (16) eine beſtimmte Größe. Wenn dagegen die beiden Gränzpunkte **A** und **B** durch ihre Länge φ und reducirte Breite L gegeben ſind, ſo würde außer **C'** auch **C** aus (14) zu beſtimmen ſein.

Schließlich noch eine Erinnerung wegen des Vorzeichens ($\pm$) in (14) und (15). Bezeichnen wir die Werthe von α und L am Anfangspunkt **A** durch α_0, L_0, ſo können wir jedenfalls L_0 als einen poſitiven ſpitzen Winkel vorausſetzen; allein je nachdem α_0 ſpitz oder ſtumpf iſt, wird bei dem Wachſen von s die Breite L zu- oder abnehmen. Hieraus ziehen wir, unter der Vorausſetzung, daß die Differentialien ds und $d\varphi$ einerlei Vorzeichen beſitzen ſollen, ſo wie mit Rückſicht darauf, daß $\mathrm{C} = r_0\,\mathrm{Sin}\,\alpha_0$ und $\mathrm{Cos\,L}$ durchaus poſitive Größen ſind, ſogleich den Schluß, daß in (14) und (15) das obere oder das untere Vorzeichen anzuwenden ſei, je nachdem $\alpha_0 < 90^0$ oder $> 90^0$ iſt, damit im erſten Falle $\frac{ds}{d\mathrm{L}}$ und $\frac{d\varphi}{d\mathrm{L}}$ beide poſitiv, im andern Falle beide negativ ſeien.

IV) Als zweites Beiſpiel möge uns die geodätiſche Linie auf dem

gemeinen Cylinder dienen. Setzen wir den Radius des Grundkreises $= a$ und nehmen die geometrische Axe des Cylinders zur Axe der Z, so ist die Gleichung seiner Oberfläche $x^2 + y^2 = a^2$, also

$$Z = a^2 \qquad Z' = 0$$

Daher giebt uns die allgemeine Gleichung (10)

$$\text{Arc Sin}\frac{x}{a} = \text{Const.} \pm \int \frac{C\,dz}{a\sqrt{(a^2 - C^2)}} = A - Bz$$

wobei wir $-B$ für $\pm\frac{C}{a\sqrt{(a^2 - C^2)}}$ geschrieben haben und unter A die zweite willkührliche Constante verstehen.

Hieraus entsteht, indem man rechts und links die Sinusse nimmt,

$$\frac{x}{a} = \text{Sin}\,(A - Bz)$$

Legen wir die Ebene XY durch den gegebenen Anfangspunkt A und ziehen die Axe OX durch A; so muß $x = a$ für $z = 0$ sein, also

$$\text{Sin}\,A = 1$$

$$A = (4k + 1)\frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

wobei k eine noch unbestimmte ganze Zahl bedeutet. Dadurch wird

$$x = a\,\text{Cos}\,Bz$$

Ferner $$y = \pm a\,\text{Sin}\,Bz$$

weil $x^2 + y^2 = a^2$ sein soll. Diese Gleichungen gehören einer gemeinen Schraubenlinie (Helix) an.

Setzen wir $B = \pm\frac{2\pi}{H}$, wobei das obere oder untere Vorzeichen anzuwenden sein soll, je nachdem B einen positiven oder negativen Werth erhalten wird, während wir H als absolute Größe behandeln; so haben wir

$$(17.\alpha)\quad \frac{x}{a} = \text{Cos}\frac{2\pi z}{H},\ \frac{y}{a} = +\,\text{Sin}\frac{2\pi z}{H} \qquad \text{positive}$$

oder je nachdem y Werthe

$$(17.\beta)\quad \frac{x}{a} = \text{Cos}\frac{2\pi z}{H},\ \frac{y}{a} = -\,\text{Sin}\frac{2\pi z}{H} \qquad \text{negative}$$

erhält, wenn z von Null an in's Positive wächst. Dabei bedeutet H die Höhe eines ganzen Schraubengangs.

Die eben unterschiedenen zwei Fälle sind in der That beide möglich, denn man kann von A aus, um nach einem zweiten Punkte B zu ge-

langen, nach Belieben in einer sogenannten links gewundenen oder in einer rechts gewundenen Schraubenlinie fortschreiten.

Um H zu bestimmen, wenn der Gränzpunkt B durch seine Coordinaten $x_2 = \xi$, $y_2 = \eta$, $z_2 = \zeta$ gegeben ist, hätte man die Bedingungsgleichung

$$\frac{2\pi\zeta}{H} = 2k\pi \pm \text{Arc Cos}\frac{\xi}{a}$$

worin k eine beliebige, positive oder negative ganze Zahl bedeutet, während wir unter $\text{Arc Cos}\frac{\xi}{a}$ eine mit $\frac{\xi}{a}$ positive oder negative, jedoch dem absoluten Werthe nach die Gränze $\frac{1}{2}\pi$ nicht überschreitende Zahl verstehen. Demnach erscheinen unzählige Werthe von H zulässig; es ist nämlich durch die Forderung, daß die Schraubenlinie durch B laufen muß, die Höhe eines Schraubengangs noch nicht völlig bestimmt. Da jedoch der in Untersuchung kommende Bogen AB, für den man nach der allgemeinen Formel

$$s = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

mit Zuziehung von (17) leicht den Ausdruck

$$s = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^2}{H^2} + 1}\,.\,\zeta$$

findet, offenbar desto größer ausfällt, je kleiner für gegebenes ζ und a die fragliche Höhe angenommen wird; so hat man, damit s möglichst klein werde, unter den überhaupt zulässigen Werthen von H den möglich größten anzuwenden. Bezeichnen wir den veränderlichen Winkel, welchen die in der Ebene des Grundkreises liegende Projection OM′ des Radius Vector OM mit dem festliegenden Radius OA einschließt, durch ϑ, wobei dieser Polarwinkel von Null durch 2π, 4π, ꝛc. hindurch gezählt werden soll, so ist allgemein $\frac{2\pi s}{H} = \vartheta$. Für den Punkt B, dessen Projection B′ sein möge, würde dann nothwendig

$$\vartheta = \text{W. AOB}' + 2k\pi$$

sein, wobei k wieder eine noch zu ermittelnde, jedoch positive ganze Zahl bedeutet, während W. AOB′ zwischen 0^0 und 360^0 liegt; mithin

$$\frac{2\pi\zeta}{H} = \frac{\text{Kreisbogen AB}'}{a} + 2k\pi$$

Und jetzt sieht man, daß, damit H wirklich den möglich größten Werth erhalte, $k = 0$ zu nehmen sei. Es muß also sein

$$(18) \qquad \frac{\zeta}{H} = \frac{\text{Bogen } AB'}{2\pi a} < 1$$

Freilich hätte sich aus einer geometrischen Betrachtung dies Alles voraussagen laßen. In der That, wenn man den Cylindermantel längs der durch A gehenden Cylinderseite aufschneidet und auf einer Ebene ausbreitet, so entwickelt sich die Schraubenlinie, sowohl die von links nach rechts als die von rechts nach links aufsteigende, in eine Gerade, und es ist deshalb ihr Bogen AB in Vergleich mit anderen auf dem Cylindermantel zwischen A und B zu ziehenden und von der Schraubenlinie mehr oder weniger abweichenden Verbindungslinien ein Minimum. Wenn insbesondere die Proportion (18) Statt findet, d. h. wenn man von A auf der Außenfläche des Cylinders so zu sagen direct nach B fortschreitet, so kommt als Entwickelung des Cylindermantels blos das einzige Rechteck in Betracht, dessen Höhe $= H$ und dessen Basis $= 2\pi a$ ist; der Punkt B liegt im Innern dieses Rechtecks und AB ist die von B nach dem einen oder dem andern Endpunkt der Basis zu ziehende Gerade. Man kann aber allerdings auch in einer solchen Schraubenlinie von A nach B gelangen, die erst mit einer Windung oder mit mehreren Windungen zwischen beiden Punkten hindurchgeht, bevor sie in B ausläuft. In einem solchen Falle, wobei also $\frac{\zeta}{H} > 1$ angenommen würde, müßte man, damit bei der Complanation des Cylindermantels sich die Schraubenlinie in eine continuirliche Gerade entwickele, mehrere Windungen (Duplikaturen) des Cylindermantels hinter einander in der Ebene aufrollen. Und es ist dann, wenn man sich nur consequenter Weise auch am Cylinder selbst den Punkt B auf einer anderen Duplikatur der Mantelfläche liegend denkt als worauf A liegt, die fragliche Schraubenlinie AB immer noch der kürzeste Weg von A nach diesem Punkt B.

V) Weitere Gränzgleichungen giebt es bei dieser Aufgabe nicht, gerade so wenig wie bei anderen ähnlichen Aufgaben, so oft die beiden Gränzpunkte gegeben sind (Vgl. §. 30 II). Wenn dagegen vom Gränzpunkte B etwa blos die Höhe ζ gegeben wäre und seine beiden andern Coordinaten gefunden werden sollten, so würden allerdings zwei Gränzgleichungen zu erfüllen übrig bleiben, und deren Behandlung würde zu dem Ergebnis führen, daß die gesuchte kürzeste Linie AB ein Stück der durch A laufenden Cylinderseite sei, daß also die Schraubenlinie in diesem Falle mit einer Erzeugungslinie des Cylindermantels zusammenfalle. —

Wir werden suchen statt dieser specielleren Behauptung den allgemeinen Satz zu erweisen:

die kürzeste Linie, welche man auf einer Rotationsfläche von einem festen Punkte A nach dem Umfang eines beliebigen zweiten Parallelkreises ziehen kann, ist der Bogen des durch A laufenden Meridians.

Um mit größerer Bequemlichkeit die im vor. §. entwickelten Gränzgleichungen (6) anwenden zu können, wollen wir gegenwärtig y und z als Functionen von x suchen, und die Rotationsaxe zur Axe der X nehmen. Die Gleichung der Fläche hat dann die Form

$$\Theta(x, y, z) = y^2 + z^2 - \mathfrak{F}(x) = 0$$

und wenn wir die Abscissen x von dem Centrum des durch A laufenden Parallelkreises an rechnen, und die Ebene XY durch A gehen laßen, so besitzt A die Coordinaten $x_1 = \alpha = 0$, $y_1 = y_\alpha$, $z_1 = z_\alpha = 0$ und der Gränzpunkt B die Coordinaten $x_2 = \xi$, $y_2 = y_\xi$, $z_2 = z_\xi$, von welchen die beiden letztern bestimmt werden sollen.

In den angeführten Gränzgleichungen werden nun wegen $\mathbf{V} = \sqrt{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)}$ die Größen P, $\mathfrak{P}$ beide verschwinden; daraus folgt sogleich $\mathfrak{L}_3 = 0$, $\mathfrak{L}_4 = 0$. Da ferner δy_ξ, δz_ξ von Null verschieden, dagegen δy_α, δz_α beide gleich Null sein sollen, so reducirt sich das ganze System auf

$$\mathbf{N}_\xi + \mathfrak{L}_1 \partial_y \Theta_\xi = 0$$
$$\mathfrak{N}_\xi + \mathfrak{L}_1 \partial_z \Theta_\xi = 0$$

Eliminiren wir hieraus $\mathfrak{L}_1$, und führen die Ausdrücke

$$\mathbf{N} = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = \frac{dy}{ds}, \mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} = \frac{dz}{ds}, \partial_y \Theta = 2y, \partial_z \Theta = 2z$$

ein, so haben wir

$$\text{(19)} \qquad \left[\frac{1}{2y}\frac{dy}{ds}\right]_\xi - \left[\frac{1}{2z}\frac{dz}{ds}\right]_\xi = 0$$

Nun besteht aber bei der hier gemachten Voraussetzung, daß die Axe der X zugleich die Umdrehungsaxe sei, als erstes Integral die Gleichung

$$\text{(20)} \qquad z dy - y dz = C ds$$

wovon man sich entweder dadurch überzeugen wird, daß man x mit z in (9) vertauscht, oder auch direct dadurch, daß man in (1) für $\partial_y \Theta$, $\partial_z \Theta$ ihre Werthe einsetzt und integrirt. Daher muß auch sein

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{y}\frac{dy}{ds} - \frac{1}{z}\frac{dz}{ds}\right]_\xi = \frac{1}{2y_\xi z_\xi}\left[z\frac{dy}{ds} - y\frac{dz}{ds}\right]_\xi = \frac{C}{2y_\xi z_\xi}$$

und die gefundene Gränzgleichung (19) führt uns zu dem Schluße, daß unter den gegenwärtigen Umständen der Integrationskonstanten C der Nullwerth beizulegen sei. Dadurch zieht sich Gl. (20) in

$$z dy - y dz = 0$$

zusammen, was sich unmittelbar integriren läßt und

$$\frac{y}{z} = \text{Const.}$$

liefert. Diese endliche Gleichung aber sagt aus, daß die gesuchte Curve sich auf der Ebene XY, d. h. auf der Ebene eines Parallelkreises, als eine durch dessen Mittelpunkt laufende Gerade projicirt. Folglich ist sie eine Meridiancurve, w. z. b. w.

VI) Um einen Begriff von den mannigfaltigen Kunstgriffen zu geben, welche bereits ersonnen sind um die Integration der Hauptgleichung (1) in verschiedenen schwierigeren Fällen ausführbar zu machen, wollen wir schließlich noch einen Blick auf die Bestimmung der geodätischen Linie auf dem dreiaxigen Ellipsoid thun. Es ist den Bemühungen Jacobi's gelungen, auch für diese Fläche das Problem auf Quadraturen zurückzuführen, das angewendete Hülfsmittel besteht aber in der Einführung zweier variablen Winkel φ, ψ, durch welche die Coordinaten x, y, z vermittelst der folgenden Relationen

$$x = \sqrt{\frac{a}{c-a}} \cdot \operatorname{Sin}\varphi \sqrt{(b \operatorname{Cos}\psi^2 + c \operatorname{Sin}\psi^2 - a)}$$

$$y = \sqrt{b} \cdot \operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin}\psi \qquad (21)$$

$$z = \sqrt{\frac{c}{c-a}} \cdot \operatorname{Cos}\psi \sqrt{(c - a \operatorname{Cos}\varphi^2 - b \operatorname{Sin}\varphi^2)}$$

ausgedrückt werden, wenn die Gleichung der Fläche in der Form

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

angeschrieben, und $a < b < c$ vorausgesetzt wird. Ohne auf die geometrische Bedeutung dieser neuen Variablen einzugehen*), werden die folgenden Erörterungen zum Verständnis des Resultats hinreichen.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\partial_x \Theta = X \qquad \partial_y \Theta = Y \qquad \partial_z \Theta = Z$$

*) Man findet dieselbe von Jacobi angegeben in Crelle's Journ. f. d. Math. Bd. XIX (1839) p. 310 so wie in Liouville's Journ. d. Math. T. VI p. 269. Vgl. auch Joachimsthal Observationes de lineis brevissimis ect. in Crelle's Journ. Bd. XXVI p. 185.

so nehmen die im Vorhergehenden gewonnenen Gleichungen (8) der geodätischen Linie die Gestalt an

$$X(ds d^2y - dy d^2s) - Y(ds d^2x - dx d^2s) = 0$$
$$Y(ds d^2z - dz d^2s) - Z(ds d^2y - dy d^2s) = 0$$
$$Z(ds d^2x - dx d^2s) - X(ds d^2z - dz d^2s) = 0$$

oder, indem man nach den Differentialien dx, dy, dz ordnet,

$$Y d^2s \frac{dx}{ds} - X d^2s \frac{dy}{ds} = Y d^2x - X d^2y$$
$$Z d^2s \frac{dy}{ds} - Y d^2s \frac{dz}{ds} = Z d^2y - Y d^2z$$
$$X d^2s \frac{dz}{ds} - Z d^2s \frac{dx}{ds} = X d^2z - Z d^2x$$

Wenn man, um hieraus einen Werth für $\frac{dx}{ds}$ zu entwickeln, die erste dieser Gleichungen mit Y, die dritte mit $-Z$ multiplicirt und die Produkte addirt, so ergiebt sich

$$(YY + ZZ) d^2s \frac{dx}{ds} - X d^2s \cdot \frac{Y dy + Z dz}{ds} = \begin{matrix}(YY + ZZ) d^2x \\ - X(Y d^2y + Z d^2z)\end{matrix}$$

Darin ist aber (wegen (4)) $Y dy + Z dz = -X dx$, also, indem man noch auf der rechten Seite $XX d^2x - XX d^2x$ hinzufügt, und zuletzt durch $(XX + YY + ZZ)$ beiderseits dividirt, vorstehende Gleichung einerlei mit

$$\frac{d^2s}{ds} dx = d^2x - \frac{X(X d^2x + Y d^2y + Z d^2z)}{XX + YY + ZZ}$$

Ebenso wird man, nachdem man die erste der obigen Gleichungen mit $-X$, die zweite mit $+Z$ multiplicirt und beide addirt hat, zu

$$\frac{d^2s}{ds} dy = d^2y - \frac{Y(X d^2x + Y d^2y + Z d^2z)}{XX + YY + ZZ}$$

und endlich, nachdem man die zweite Gleichung mit $-Y$, die dritte mit $+X$ multiplicirt und beide addirt hat, zu

$$\frac{d^2s}{ds} dz = d^2z - \frac{Z(X d^2x + Y d^2y + Z d^2z)}{XX + YY + ZZ}$$

gelangen. Multiplicirt man nun diese drei letzten Gleichungen nach der Reihe mit dX, dY, dZ und bemerkt, daß aus der Differentiation der Gl. (4) die Relation

$$(X d^2x + Y d^2y + Z d^2z) = -(dX dx + dY dy + dZ dz)$$

hervorgeht; so erhält man sogleich

$$(22)\qquad \frac{d^2s}{ds} - \frac{X dX + Y dY + Z dZ}{XX + YY + ZZ} = \frac{dX d^2x + dY d^2y + dZ d^2z}{dX dx + dY dy + dZ dz}$$

Die linke Seite ist, wie man sieht, ein vollständiges Differential, nämlich

$$d \log \frac{ds}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \text{ oder auch } \tfrac{1}{2} d \log \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Bei den Flächen zweiter Ordnung ist aber auch der in (22) auf der rechten Seite stehende Bruch ein vollständiges Differential. Denn aus der allgemeinen Gleichung dieser Flächen

$$A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 + 2B_1 yz + 2B_2 xz + 2B_3 xy + 2C_1 x + 2C_2 y + 2C_3 z + D = 0$$

leitet man ab

$$dX = 2(A_1 dx + B_3 dy + B_2 dz)$$
$$dY = 2(B_3 dx + A_2 dy + B_1 dz)$$
$$dZ = 2(B_2 dx + B_1 dy + A_3 dz)$$

also

$$dX dx + dY dy + dZ dz = 2\{A_1 dx^2 + A_2 dy^2 + A_3 dz^2 + 2B_3 dx dy + 2B_2 dx dz + 2B_1 dy dz\}$$

Durch Differentiation hiervon entsteht aber

$$\begin{aligned} d(dX dx + dY dy + dZ dz) = {} & 4(A_1 dx + B_3 dy + B_2 dz) d^2x \\ & + 4(B_3 dx + A_2 dy + B_1 dz) d^2y \\ & + 4(B_2 dx + B_1 dy + A_3 dz) d^2z \\ = {} & 2\{dX d^2x + dY d^2y + dZ d^2z\} \end{aligned}$$

Daher ist der in Rede stehende Bruch so viel als

$$\frac{d\{dX dx + dY dy + dZ dz\}}{2\{dX dx + dY dy + dZ dz\}}$$

d. h. gleich $\frac{1}{2} d \log (dX dx + dY dy + dZ dz)$.

Aus diesen Transformationen folgt also

$$(23)\qquad \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{dX dx + dY dy + dZ dz}{\text{Const.}}$$

als allgemeines (erstes) Integral von (22). — Was nun insbesondere das dreiaxige Ellipsoid anbelangt, dessen Gleichung für den vorliegenden Zweck durch

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

vorgestellt worden ist, so nimmt, wenn wir die hieraus fließenden Werthe $X = \frac{2x}{a}$, $Y = \frac{2y}{b}$, $Z = \frac{2z}{c}$ in (23) einsetzen, diese Gleichung die ein-

fache Gestalt an

$$(24)\quad \frac{1}{C}(dx^2+dy^2+dz^2)=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\left(\frac{dx^2}{a}+\frac{dy^2}{b}+\frac{dz^2}{c}\right)$$

Machen wir jetzt hierin die erwähnte Substitution (21), so erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=&\ \frac{1}{a(c-a)}\operatorname{Sin}\varphi^2\left(b\operatorname{Cos}\psi^2+(c-a)-c\operatorname{Cos}\psi^2\right)\\&+\frac{1}{c(c-a)}\operatorname{Cos}\psi^2\left((c-a)\operatorname{Cos}\varphi^2+c\operatorname{Sin}\varphi^2-b\operatorname{Sin}\varphi^2\right)\\&+\frac{1}{b}\operatorname{Cos}\varphi^2\operatorname{Sin}\psi^2\end{aligned}$$

Der rechte Theil dieser Gleichung läßt sich aber in ein Produkt aus zwei Factoren umgestalten, von welchen der eine nur φ, der andere nur ψ einschließt. Denn die unmittelbare Entwickelung ist

$$\begin{aligned}&\frac{b}{a(c-a)}\operatorname{Sin}\varphi^2\operatorname{Cos}\psi^2+\frac{1}{a}\operatorname{Sin}\varphi^2\operatorname{Sin}\psi^2-\frac{1}{c-a}\operatorname{Sin}\varphi^2\operatorname{Cos}\psi^2\\&-\frac{b}{c(c-a)}\operatorname{Sin}\varphi^2\operatorname{Cos}\psi^2+\frac{1}{c}\operatorname{Cos}\varphi^2\operatorname{Cos}\psi^2+\frac{1}{c-a}\operatorname{Sin}\varphi^2\operatorname{Cos}\psi^2\\&+\frac{1}{b}\operatorname{Cos}\varphi^2\operatorname{Sin}\psi^2\end{aligned}$$

und man gelangt somit zu

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=&\left\{\begin{aligned}&\frac{b}{ac}\operatorname{Sin}\varphi^2\operatorname{Cos}\psi^2+\frac{1}{a}\operatorname{Sin}\varphi^2\operatorname{Sin}\psi^2\\&+\frac{1}{b}\operatorname{Cos}\varphi^2\operatorname{Sin}\psi^2+\frac{1}{c}\operatorname{Cos}\varphi^2\operatorname{Cos}\psi^2\end{aligned}\right\}\\(25)\qquad=&\frac{1}{abc}(a\operatorname{Cos}\varphi^2+b\operatorname{Sin}\varphi^2)(b\operatorname{Cos}\psi^2+c\operatorname{Sin}\psi^2)\end{aligned}$$

Ferner wird, wenn wir in (21) zur Abkürzung

$c-a\operatorname{Cos}\varphi^2-b\operatorname{Sin}\varphi^2=\Phi$ $\qquad$ $b\operatorname{Cos}\psi^2+c\operatorname{Sin}\psi^2-a=\Psi$

setzen,

$$\begin{aligned}dx=&\ \sqrt{\frac{a}{c-a}}\cdot\left[\sqrt{\Psi}\operatorname{Cos}\varphi\,d\varphi+\frac{(c-b)\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\psi\operatorname{Sin}\psi\,d\psi}{\sqrt{\Psi}}\right]\\dy=&\ \sqrt{b}\,.\left[-\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Sin}\psi\,d\varphi+\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Cos}\psi\,d\psi\right]\\dz=&-\sqrt{\frac{c}{c-a}}\cdot\left[\sqrt{\Phi}\operatorname{Sin}\psi\,d\psi+\frac{(b-a)\operatorname{Cos}\psi\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{Sin}\varphi\,d\varphi}{\sqrt{\Phi}}\right]\end{aligned}$$

also $dx^2 + dy^2 + dz^2 =$

$$\left.\begin{array}{l} a\,\Psi.\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 \\ +b(c-a)\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi^2 \\ +\dfrac{c(b-a)^2\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi^2}{\Phi} \end{array}\right\}\frac{d\varphi^2}{c-a}$$

$$\left.\begin{array}{l} +c\,\Phi.\,\mathrm{Sin}\,\psi^2 \\ +b(c-a)\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Cos}\,\psi^2 \\ +\dfrac{a(c-b)^2\,\mathrm{Cos}\,\psi^2\,\mathrm{Sin}\,\psi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}{\Psi} \end{array}\right\}\frac{d\psi^2}{c-a}$$

$$+2\left(\frac{a(c-b)}{c-a}-b+\frac{c(b-a)}{c-a}\right)\mathrm{Cos}\,\varphi\,\mathrm{Sin}\,\varphi\,\mathrm{Cos}\,\psi\,\mathrm{Sin}\,\psi\,d\varphi\,d\psi$$

Hierin ist der Coefficient von $d\varphi d\psi$ identisch Null.

Als Coefficienten von $d\varphi^2$ erhält man, wenn man für $\mathrm{Cos}\,\psi^2$ den Werth $1 - \mathrm{Sin}\,\psi^2$ einsetzt und nach $\mathrm{Sin}\,\psi^2$ ordnet,

$$\left(a(b-a)+\frac{c(b-a)^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}{\Phi}\right)\frac{\mathrm{Cos}\,\varphi^2}{c-a}$$

$$+\left(a(c-b)\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2+b(c-a)\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2-\frac{c(b-a)^2\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2}{\Phi}\right)\frac{\mathrm{Sin}\,\psi^2}{c-a}$$

Da man für den Nenner der in diesen Parentheſen vorkommenden Brüche nach Gutfinden auch das Binom

$(c-a) - (b-a)\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2$ oder auch $(c-b) + (b-a)\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2$

setzen kann, so erhält man bei dem Einrichten der in der ersten Parentheſe befindlichen Größen als Zähler

$$(b-a)[a(c-a) - a(b-a)\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2 + c(b-a)\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2]$$
$$= (b-a)(c-a)(a\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + b\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)$$

und bei dem Einrichten der in der zweiten Parentheſe befindlichen Größe den Zähler

$$\begin{aligned} &a(c-b)(c-a)\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 - a(c-b)(b-a)\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2 \\ &+b(c-b)(c-a)\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2 + b(c-a)(b-a)\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2 \\ &\qquad - c(b-a)(b-a)\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2 \\ &\qquad = (c-b)(c-a)(a\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + b\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2) \end{aligned}$$

daher ist der Coefficient von $d\varphi^2$ im Ganzen

$$[(b-a)\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + (c-b)\,\mathrm{Sin}\,\psi^2]\,\frac{(a\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + b\,\mathrm{Sin}\,\varphi^2)}{\Phi}$$

Ebenso findet man den Coefficienten von $d\psi^2$, indem man $1 - \mathrm{Cos}\,\varphi^2$ an die Stelle von $\mathrm{Sin}\,\varphi^2$ setzt und nach $\mathrm{Cos}\,\varphi^2$ zusammenfaßt,

$$[(b-a)\,\mathrm{Cos}\,\varphi^2 + (c-b)\,\mathrm{Sin}\,\psi^2]\,\frac{(b\,\mathrm{Cos}\,\psi^2 + c\,\mathrm{Sin}\,\psi^2)}{\Psi}$$

daher wird $dx^2 + dy^2 + dz^2 =$

$$[(b-a)\operatorname{Cos}\varphi^2 + (c-b)\operatorname{Sin}\psi^2]$$

$$(26) \qquad \times\left[\frac{a\operatorname{Cos}\varphi^2 + b\operatorname{Sin}\varphi^2}{\Phi}d\varphi^2 + \frac{b\operatorname{Cos}\psi^2 + c\operatorname{Sin}\psi^2}{\Psi}d\psi^2\right]$$

Endlich findet man, wenn man ganz auf dieselbe Weise die Summe $\frac{dx^2}{a} + \frac{dy^2}{b} + \frac{dz^2}{c}$ transformirt, daß auch in dem hierfür zu erhaltenden Ausdruck der Coefficient von $d\varphi\, d\psi$ gleich Null ist, daß aber die Zähler in den Coefficienten von $d\varphi^2$ und $d\psi^2$ einander gleich werden, nämlich gleich

$$(c-a)[(b-a)\operatorname{Cos}\varphi^2 + (c-b)\operatorname{Sin}\psi^2]$$

daher ist

$$\frac{dx^2}{a} + \frac{dy^2}{b} + \frac{dz^2}{c} = [(b-a)\operatorname{Cos}\varphi^2 + (c-b)\operatorname{Sin}\psi^2]\left(\frac{d\varphi^2}{\Phi} + \frac{d\psi^2}{\Psi}\right)$$

Vermittelst dieses Werths so wie der mit (26) und (25) bezeichneten verwandelt sich nun die Differentialgleichung (24) in

$$C\frac{a\operatorname{Cos}\varphi^2 + b\operatorname{Sin}\varphi^2}{\Phi}d\varphi^2 + C\frac{b\operatorname{Cos}\psi^2 + c\operatorname{Sin}\psi^2}{\Psi}d\psi^2$$

$$= (a\operatorname{Cos}\varphi^2 + b\operatorname{Sin}\varphi^2)(b\operatorname{Cos}\psi^2 + c\operatorname{Sin}\psi^2)\left(\frac{d\varphi^2}{\Phi} + \frac{d\psi^2}{\Psi}\right)$$

wobei wir C an die Stelle von $\frac{abc}{C}$ geschrieben haben. Offenbar laßen sich hier die beiden Variablen φ und ψ absondern. Man findet sogleich

$$\frac{\sqrt{(a\operatorname{Cos}\varphi^2 + b\operatorname{Sin}\varphi^2)}d\varphi}{\sqrt{\Phi}\sqrt{C - a\operatorname{Cos}\varphi^2 - b\operatorname{Sin}\varphi^2}} \mp \frac{\sqrt{(b\operatorname{Cos}\psi^2 + c\operatorname{Sin}\psi^2)}d\psi}{\sqrt{\Psi}\sqrt{b\operatorname{Cos}\psi^2 + c\operatorname{Sin}\psi^2 - C}} = 0$$

und hieraus folgt, wenn man noch $C = b - B$ setzt, und die Werthe von Φ und Ψ einführt, das vollständige Integral

$$A = \int \frac{\sqrt{(a\operatorname{Cos}\varphi^2 + b\operatorname{Sin}\varphi^2)}d\varphi}{\sqrt{(c - a\operatorname{Cos}\varphi^2 - b\operatorname{Sin}\varphi^2)}\sqrt{((b-a)\operatorname{Cos}\varphi^2 - B)}}$$

$$\mp \int \frac{\sqrt{(b\operatorname{Cos}\psi^2 + c\operatorname{Sin}\psi^2)}d\psi}{\sqrt{(b\operatorname{Cos}\psi^2 + c\operatorname{Sin}\psi^2 - a)}\sqrt{((c-b)\operatorname{Sin}\psi^2 + B)}}$$

worin A und B die beiden Integrationsconstanten sind. Durch diese transcendente Gleichung in Verbindung mit (21) würde also auf dem Ellipsoid, dessen Halbaxen $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ sind, die geodätische Linie zu bestimmen sein.

§. 47.

Schwieriger als der in den beiden letzten §§. betrachtete ist im All-

gemeinen der Fall, wenn nicht blos die dem Integrale $U = \int V dx$ zu Grunde liegende Function

$$V = F(x, y, p, q, .. z, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, ..)$$

die beiden Functionen y, z nebst ihren Differentialquotienten enthält, sondern wenn auch noch in der Bedingungsgleichung $\Theta = 0$ diese Differentialquotienten auftreten, so daß dieselbe die Form hat

$$\Theta(x, y, p, q, .. z, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, ..) = 0 \quad (1)$$

Dieses wird sich also beispielsweise dann ereignen, wenn eine Maximums- oder Minimums-Curve von doppelter Krümmung gesucht wird, von welcher der Krümmungshalbmeßer als Function von x, y, z gegeben wäre.

I) Zwar wird man öfters, wenn in dieser Bedingungsgleichung $\Theta = 0$ die eine der beiden dependenten Variablen, etwa z, fehlt, und nur ein einziger Differentialquotient derselben, etwa $\frac{dz}{dx} = \mathfrak{p}$ vorkommt, und wenn auch in V nur eben dieser oder nur höhere Differentialquotienten $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^3z}{dx^3}$, .. vorkommen, diese letzteren als Functionen von $x, y, p, q, \ldots$ darzustellen und aus V zu eliminiren im Stande sein. Und dann ist das weitere Verfahren allerdings einfach.

In andern Fällen ist die Gl. (1) vielleicht so beschaffen, daß man sie unmittelbar integriren kann, wie wir früher in einem analogen Falle (§. 22 I) durch Beispiele erläutert haben; und wenn als Integral eine endliche Gleichung zwischen x, y, z gefunden worden ist, so hat man das Problem auf den unter III) in §. 45 vorausgesetzten Fall zurückgeführt.

Wenn aber weder die eine noch die andere Erleichterung möglich scheint, so kann man mittelst des folgenden allgemeinen Verfahrens (analog §. 22 II) sich die zur Auflösung des Problems dienlichen Gleichungen verschaffen.

Man denke unter λ eine vorläufig noch unbestimmte, jedoch von der Beschaffenheit der variirenden Functionen y und z unabhängige Function von x, und addire das Integral

$$\int_\alpha^\xi \lambda \Theta(x, y, z, p, \mathfrak{p}, q, \mathfrak{q}, ..) dx$$

welches wegen der Bedingungsgleichung (1) den Werth Null hat, zu $\int_\alpha^\xi V dx$ hinzu, d. h. man setze

$$U = \int_a^\xi (V + \lambda\Theta)dx$$

Die durch Variation hieraus zu erhaltende Gleichung $\delta U = 0$ wird man aus Gl. (1) in §. 45 sofort erhalten, wenn man an die Stelle des daselbst vorkommenden V überall das Binom $V + \lambda\Theta$ setzt. Es erscheint darin die Summe der beiden Integralien

$$\int_a^\xi \left(\frac{d(V+\lambda\Theta)}{dy} - \frac{1}{dx}d\frac{d(V+\lambda\Theta)}{dp} + \cdots\right)\delta y dx$$

$$+ \int_a^\xi \left(\frac{d(V+\lambda\Theta)}{dz} - \frac{1}{dx}d\frac{d(V+\lambda\Theta)}{dq} + \cdots\right)\delta z dx$$

Die hier in Parenthese geschloßenen Coefficienten von δy und δz werden wenn man für das darin vorkommende y und z bereits die beiden gesuchten Functionen $f(x)$, $f(x)$ eingesetzt denkt, offenbar Ausdrücke sein, welche aus der Independenten x und der bis jetzt noch unbestimmt gelaßenen Function λ nebst deren Differentialquotienten $\frac{d\lambda}{dx}, \frac{d^2\lambda}{dx^2}, \ldots$ auf ganz bestimmte Weise gebildet sind. Es steht daher nichts im Wege, den einen oder den andern von jenen beiden Coefficienten gleich Null zu setzen; denn die dadurch gesetzte Bedingungsgleichung würde der eben gemachten Andeutung zu Folge als eine gewöhnliche Differentialgleichung für λ anzusehen sein. Setzen wir aber den Coefficienten von δz gleich Null, so fordert die Gleichung $\delta U = 0$ sofort, daß auch der Coefficient von δy sich auf Null reducire. Denn da durch die Bedingungsgleichung $\Theta = 0$ nur eine Relation zwischen δz und δy festgestellt war, so darf der eine dieser beiden Variationsquotienten, also jetzt δy, ganz willkührlich angenommen werden, und es tritt also auch hier wieder die in §. 24 angestellte Schlußfolgerung in Kraft.

Wir erhalten somit für die drei Functionen y, z, λ nebst ihren Differentialquotienten die drei Gleichungen

(1) $$\Theta(x, y, p, q, \ldots z, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots) = 0$$

(2) $$\partial_y(V+\lambda\Theta) - \frac{1}{dx}d\partial_p(V+\lambda\Theta) + \frac{1}{dx^2}d^2\partial_q(V+\lambda\Theta) - \cdots = 0$$

(3) $$\partial_z(V+\lambda\Theta) - \frac{1}{dx}d\partial_{\mathfrak{p}}(V+\lambda\Theta) + \frac{1}{dx^2}d^2\partial_{\mathfrak{q}}(V+\lambda\Theta) - \cdots = 0$$

und man befindet sich, sobald λ aus den beiden letzten eliminirt worden, im Besitze von zwei Differentialgleichungen für y und z, gerade wie in §. 45.

Die Elimination von λ würde ohne Schwierigkeit auf die bekannte Weise mittelst wiederholter Differentiationen zu bewerkstelligen sein. Wäre z. B. Gl. (2) in Beziehung auf λ von der ersten, Gl. (3) von der dritten Ordnung, so würde man, indem man Gl. (2) dreimal und Gl. (3) einmal differentiirte, im Ganzen sechs Gleichungen haben, worin $\lambda, \frac{d\lambda}{dx}, \frac{d^2\lambda}{dx^2}, \frac{d^3\lambda}{dx^3}, \frac{d^4\lambda}{dx^4}$ vorkommen, und aus welchen sich diese fünf Größen algebraisch eliminiren lassen. — Aber freilich gelangt man auf diesem Wege in der Regel zu einer allzusehr verwickelten Differentialgleichung zwischen y und z, weshalb es meistens beßer sein wird alle drei Gleichungen (1) (2) (3) zusammen zu behalten und auf die eine oder andere Art unter einander zu combiniren.

II) Hat man nun auf diese Weise sich die Kenntnis der Functionen $y = f(x)$, $z = f(x)$ verschafft, so kommt es noch auf die Befriedigung der Gränzgleichung an. Diese ist, wenn wir wieder zur Abkürzung

$$N = \vartheta_p(V + \lambda\Theta) - \frac{d\vartheta_q(V+\lambda\Theta)}{dx} + \cdots \qquad P = \vartheta_q(V+\lambda\Theta) - \cdots$$

$$\mathfrak{N} = \vartheta_p(V+\lambda\Theta) - \frac{d\vartheta_q(V+\lambda\Theta)}{dx} + \cdots \qquad \mathfrak{P} = \vartheta_q(V+\lambda\Theta) - \cdots$$

setzen, zuvörderst

$$(4)\quad \left.\begin{aligned} &N_\xi \delta y_\xi - N_a \delta y_a + P_\xi \left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_\xi - P_a \left[\frac{d\delta y}{dx}\right]_a + \cdots \\ &+ \mathfrak{N}_\xi \delta z_\xi - \mathfrak{N}_a \delta z_a + \mathfrak{P}_\xi \left[\frac{d\delta z}{dx}\right]_\xi - \mathfrak{P}_a \left[\frac{d\delta z}{dx}\right]_a + \cdots \end{aligned}\right\} = 0$$

es handelt sich aber um eine richtige Zerspaltung derselben in Einzelgleichungen.

Die Gleichung $\Theta = 0$ sei $\left\{\begin{array}{l} \text{in Beziehung auf } y \text{ von der } \mu\text{ten Ordnung} \\ \text{“ “ “ } z \text{ “ “ } \nu\text{ten “} \end{array}\right\}$

und der Ausdruck V “ $\left\{\begin{array}{l} \text{“ “ “ } y \text{ “ “ } m\text{ten “} \\ \text{“ “ “ } z \text{ “ “ } n\text{ten “} \end{array}\right\}$

Die beiden Exponenten μ, ν werden entweder einander gleich, oder einer von beiden wird kleiner als der andere sein. Für den letztern Fall denken wir $\nu < \mu$, also überhaupt $\mu \gtreqless \nu$. Wir dürfen dann weiter voraussetzen, daß der oberste Ordnungsexponent von z in V kleiner als ν, höchstens

$= \nu$ sei. Denn wenn $n > \nu$ wäre, so könnten wir mittelst der Bedingungsgleichungen

$$(5) \qquad \frac{d\Theta}{dx} = 0 \qquad \frac{d^2\Theta}{dx^2} = 0 \quad \ldots \quad \frac{d^{n-\nu}\Theta}{dx^{n-\nu}} = 0$$

alle die Differentialquotienten $s^{[\nu+1]}, s^{[\nu+2]}, \ldots s^{[n]}$ aus V fortschaffen. Es steht nichts im Wege, daß wir schon in den vorhergehenden Gleichungen (2) und (3) unter V nöthigen Falls den auf die hier angedeutete Weise umgestalteten Ausdruck denken. Nach dieser Vorbereitung enthält alsdann $(V + \lambda\Theta)$ die Differentialquotienten $p, q, \ldots s^{[\nu]}$, der höchste Differentialquotient von y dagegen ist entweder $y^{[\mu]}$, oder er ist derselbe wie im ursprünglichen V, nämlich $y^{[m]}$, oder endlich er ist der aus $\frac{d^{n-\nu}\Theta}{dx^{n-\nu}}$ entspringende $y^{[\mu+n-\nu]}$. Wir wollen diesen höchsten Ordnungsexponenten von y in $(V + \lambda\Theta)$ überhaupt durch k bezeichnen, so daß im Folgenden k die größte der drei Zahlen

$$(6) \qquad m, \qquad \mu, \qquad \mu + n - \nu$$

bedeuten soll.

Die erste Zeile des linken Theils der Gl. (4) geht augenscheinlich fort bis zu $\left[\frac{d^{l-1}\delta y}{dx^{l-1}}\right]_\xi - \left[\frac{d^{l-1}\delta y}{dx^{l-1}}\right]_\alpha$ und besteht also aus $2k$ Gliedern, die Anzahl der in der zweiten Zeile folgenden Glieder dagegen ist 2ν. Woran man nun einen augenblicklichen Anstoß nehmen könnte, das ist der Umstand, daß die 2ν Größen

$$(7) \qquad \delta s_\xi, \ \delta s_\alpha, \ \left[\frac{d\delta s}{dx}\right]_\xi, \ \left[\frac{d\delta s}{dx}\right]_\alpha, \ \ldots \ \left[\frac{d^{\nu-1}\delta s}{dx^{\nu-1}}\right]_\xi, \ \left[\frac{d^{\nu-1}\delta s}{dx^{\nu-1}}\right]_\alpha$$

gegenwärtig sich nicht sämmtlich (wie in §. 45 IV) durch $\delta y_\xi, \delta y_\alpha, \delta p_\xi, \ldots$ ausdrücken lassen, während sie doch auch nicht von diesen letztern ganz unabhängig gedacht werden dürfen. Man könnte nämlich sagen, daß wenn man für δy irgend eine Function $\Omega(x)$ beliebig angenommen hätte und sie selbst so wie ihre Derivationen $\Omega'(x), \Omega''(x), \ldots$ an die Stelle von $\delta y, \delta p, \delta q, \ldots$ in $\delta\Theta$ einsetzte, die Gleichung $\delta\Theta = 0$ sich sofort, indem man zugleich für y und s die gesuchten oder bereits aus (2) und (3) gefundenen Functionen $f(x)$, $f(x)$ einführte, in eine gewöhnliche Differentialgleichung für δs verwandele, daß man also durch deren Integration für δs, folglich auch für $\delta p, \delta q, \ldots$ **bestimmte Functionen** erhalten würde. (Vgl. §. 18 IV). Allein es ist zuvörderst

zu bedenken, daß in dem auf dieſe Weiſe zu gewinnenden $\delta' s$, als allgemeinem Integral der Gl. $\delta' \Theta = 0$, ſich ν willkührliche Conſtanten vorfinden würden, daß ſich alſo, indem man deren Werthe auf die eine oder andere Art wählt, gerade ν von den in (7) zuſammengeſtellten Größen ganz beliebigen Größen gleich ſetzen ließen. Hierauf würde freilich die andere Hälfte jener Größen (7) auf beſtimmte Weiſe von $\delta' y_\xi$, $\delta' y_\alpha$, $\delta' p_\xi, \ldots$ abhängig geworden ſein. Aber man bedenke weiter, daß bei der Entwickelung des linken Theils der Gleichungen (2) und (3) ſich der Differentialquotient $\frac{d^\mu \lambda}{dx^\mu}$ resp. $\frac{d^\nu \lambda}{dx^\nu}$ einſtellen wird, und daß es deshalb, wenn man ſich $y = f(x, C_1, C_2, ..)$, $s = f(x, C_1, C_2, ..)$ bereits gefunden oder als gegeben denkt und auch λ zu beſtimmen vornimmt, nochmals auf die Integration einer Differentialgleichung von der νten Ordnung ankommt. Unter dieſer Fiction würde alſo λ als eine Function von x gefunden, die außer den zur Conſtitution von $f(x)$ und $f(x)$ erforderlichen Conſtanten noch ν neue Conſtanten einſchlöße; und wenn auch in der Wirklichkeit, bei der Behandlung des Syſtems der Gleichungen (1) (2) (3) ſämmtliche hier erwähnte Integrationsconſtanten gleichzeitig in y und s erſcheinen mögen, ſo erwarten doch ν derſelben ihre Beſtimmung dadurch, daß für beſtimmte Werthe von x die Werthe von λ, $\frac{d\lambda}{dx}$, $\frac{d^2\lambda}{dx^2}, \ldots$ gegeben würden. Aus dieſem Grunde kann man in dem Aggregate (4), worin ſich augenſcheinlich die 2μ Größen

$$\lambda_\xi,\ \lambda_\alpha,\ \left[\frac{d\lambda}{dx}\right]_\xi, \ldots \left[\frac{d^{\nu-1}\lambda}{dx^{\nu-1}}\right]_\xi,\ \left[\frac{d^{\nu-1}\lambda}{dx^{\nu-1}}\right]_\alpha, \ldots \left[\frac{d^{\mu-1}\lambda}{dx^{\mu-1}}\right]_\alpha$$

vorfinden, ν derſelben beliebig annehmen, alſo auch ſo beſtimmen, daß die Coefficienten gerade derjenigen Glieder in (7), welche wir vorhin als von $\delta' y_\xi$, $\delta' y_\alpha$, $\delta' p_\xi, \ldots$ abhängig gedacht haben, einzeln gleich Null werden. Und da der oben gemachten Bemerkung zu Folge die andere Hälfte derſelben Größen gänzlich unbeſtimmt und von einander unabhängig bleibt, ſo müßen auch deren Coefficienten einzeln gleich Null geſetzt werden. Auf dieſe Weiſe ſind aus $\delta' U$ alle Variationsquotienten von s beſeitigt, in Beziehung auf die dann noch in (4) übrig bleibenden, mit $\delta' y_\xi$, $\delta' y_\alpha$, $\delta' p_\xi, \ldots$ multiplicirten Glieder iſt aber der in §. 24 bewieſene Lehrſatz anzuwenden. Daher beſteht das einfache Ergebnis dieſer Betrachtung darin daß man, in ſo fern nicht noch beſondere Bedingungsgleichungen

zwiſchen $\delta' y_\xi$, $\delta' y_\alpha$, $\delta' p_\xi$, ... $\delta' z_\xi$, $\delta' z_\alpha$, $\delta' \mathfrak{p}_\xi$, ... vorliegen, ſämmtliche Beſtandtheile des Aggregats (4) einzeln gleich Null zu ſetzen, alſo ein Syſtem von $2\mathfrak{k} + 2\nu$ einzelnen Gränzbeſtimmungsgleichungen zu bilden habe.

Es können jedoch allerdings für die Gränzwerthe y_ξ, y_α, z_ξ, z_α, p_ξ, ... unmittelbar eine oder mehrere Bedingungsgleichungen gegeben ſein, von der Art wie in §. 43. Wir wollen dieſelben durch

$$(\Theta) \qquad \Theta_1(\alpha, \xi, y_\alpha, y_\xi, z_\alpha, z_\xi, p_\alpha, \ldots) = 0 \qquad \Theta_2 = 0 \quad \ldots$$

bezeichnen, und ihre Anzahl $= l$ ſetzen. Halten wir uns dabei, um die Sache nicht zu verwickelt zu machen, an die Vorausſetzung, daß in dieſen Gleichungen keine höheren Differentialquotienten vorkommen als in (4), ſo haben wir die l Bedingungsgleichungen

$$\delta' \Theta_1 = 0 \qquad \delta' \Theta_2 = 0 \quad \ldots$$

bei der Discuſſion der Gränzengleichung zu Rathe zu ziehen, was im Allgemeinen am bequemſten auf die in §. 43 III) erklärte Art mittelſt unbeſtimmter Factoren $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, ... geſchehen wird.

Endlich könnte auch noch gefordert werden, wie in §. 43 V), daß einige Variationen an den Gränzpunkten Null ſein ſollten, etwa

$$(\dot{\Theta}) \qquad \delta' y_\alpha = 0 \qquad \delta' z_\xi = 0 \qquad \delta' p_\alpha = 0 \quad \ldots$$

(oder es könnten auch einige Relationen zwiſchen $\delta' y_\alpha$, $\delta' y_\xi$, $\delta' z_\alpha$, ... unmittelbar und nicht als Folge einer endlichen Gleichung $\Theta = 0$ vorgeſchrieben ſein) und wenn wir daher noch annehmen, es wären i Bedingungen von dieſer Gattung zu beobachten; ſo verringert ſich die Anzahl der einzelnen, aus (4) entſpringenden Gleichungen auf $2\mathfrak{k} + 2\nu - l - i$. Zu dieſen treten dann noch die Gleichungen (Θ), welche alſo mit den eben gedachten im Ganzen $2\mathfrak{k} + 2\nu - i$ Beſtimmungsgleichungen bilden (während die Gleichungen $\Theta_\alpha = 0$, $\Theta_\xi = 0$ natürlich durch die für y, z, λ gefundenen Functionen identiſch werden, alſo nicht als Beſtimmungsgleichungen Dienſte leiſten können). Da nun die in $\mathfrak{N}_\xi$, $\mathfrak{N}_\alpha$, $\mathfrak{N}_\xi$, $\mathfrak{N}_\alpha$, $\mathfrak{P}_\xi$, ... vorkommenden Gränzwerthe von y, p, q, ... z, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, ... λ, $\frac{d\lambda}{dx}$, $\frac{d^2\lambda}{dx^2}$, ... mittelſt der Gleichungen

$$y = f(x, C_1, C_2, \ldots), \quad z = f(x, C_1, C_2, \ldots), \quad \lambda = \psi(x, C_1, C_2, \ldots)$$

in α, ξ und den Integrationsconſtanten auszudrücken ſind, ſo kommt es, damit ſich für alle unbekannten C_1, C_2, .. y_ξ, y_α, p_ξ, ... z_ξ, z_α,

$p_\xi, \ldots \lambda_\xi, \lambda_\alpha, \left[\frac{d\lambda}{dx}\right]_\xi, \ldots$ bestimmte Werthe ausmitteln laßen, darauf an, ob die Anzahl der Integrationsconstanten gerade der eben gefundenen Zahl $2k + 2\nu - i$ gleich sei.

III) Die Anzahl der durch Integration der Gleichungen (1) (2) (3) eingeführten willkührlichen Constanten wird man in jedem speciellen Falle ohne Mühe angeben, im Allgemeinen aber kann man hierüber, ohne mancherlei bei den verschiedenen Größenverhältnissen von m, n, μ, ν mögliche Fälle zu unterscheiden, so viel aussagen, daß sie der Zahl $2k + 2\nu$ gleich oder wenigstens nicht größer ist. Um dieses zu übersehen, beachte man, daß in Beziehung auf λ die Gleichung (2) von derselben Ordnung ist, wie Θ in Beziehung auf y und die Gleichung (3) von derselben Ordnung wie Θ in Beziehung auf s; d. h. die Gleichungen (2) und (3) sind in Beziehung auf λ von der μten resp. νten Ordnung, wie schon oben bemerkt worden ist. — Andererseits läßt sich zwar im Allgemeinen weder der höchste in (3) vorkommende Differentialquotient von y, noch der höchste in (2) vorkommende Differentialquotient von s angeben. Denn wenn z. B.

$$V = y\mathfrak{p} - a^2 q \qquad \Theta = c^2 q\mathfrak{q} - 1$$

ist, so wird in $\partial_y V - \frac{1}{dx} d\partial_p V + \frac{1}{dx^2} d^2\partial_q V$ kein höherer Differentialquotient von s enthalten sein als $\mathfrak{p} = \frac{ds}{dx} = \frac{d^n s}{dx^n}$ und der in $\partial_y(\lambda\Theta) - \frac{1}{dx} d\partial_p(\lambda\Theta) + \frac{1}{dx^2} d^2\partial_q(\lambda\Theta)$ enthaltene höchste Differentialquotient von s ist $s^{[4]} = \frac{d^4 s}{dx^4} = \frac{d^{\mu+\nu} s}{dx^{\mu+\nu}}$, daher Gl. (2) in Beziehung auf s von der $(\mu + \nu)$ten Ordnung. Wäre dagegen

$$V = y^2 q - a\mathfrak{p} \qquad \Theta = cq^2 - \mathfrak{q}$$

so würde Gl. (2) von allen Differentialquotienten $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$ gänzlich frei sein.

Allein man sieht doch, daß in (2) höchstens $\frac{d^{l+\nu} s}{dx^{l+\nu}}$ und in (3) höchstens $\frac{d^{l+\nu} y}{dx^{l+\nu}}$ vorkommen kann. Es erscheint daher als höchster Differentialquotient

in (1)	$y^{[\mu]}$	. . . . . $z^{[\nu]}$	. .
in (2)	$y^{[2\nu]}$	unbestimmt welcher, jedoch höchstens $z^{[\lambda+\nu]}$	. . $\lambda^{[\mu]}$
in (3) unbestimmt welcher, jedoch höchstens $y^{[\lambda+\nu]}$		. . . . . $z^{[2\nu]}$	. . $\lambda^{[\nu]}$

Zählt man nun den Ordnungsexponenten von λ in einer der beiden letzten Gleichungen, ferner den höchsten Ordnungsexponenten von y aus einer der beiden anderen, und denjenigen von z aus der übrigen dritten Gleichung zusammen, so erhält man eine der folgenden Zahlen

$$2\lambda + 2\nu, \qquad \mu + \lambda + 2\nu, \qquad 2\mu + 2\nu$$

Durch die größte derselben wird angegeben, wie viel willkührliche Constanten bei der Integration des Systems jener drei Gleichungen höchstens eingeführt werden. Da jedoch die zweite Zahl $\mu + \lambda + 2\nu$ das arithmetische Mittel zwischen der ersten und dritten ist, so wird sie von einer dieser letztern übertroffen und kann deshalb unberücksichtigt gelaßen werden. Eben dasselbe gilt aber auch von der dritten Zahl, da der oben bei (6) festgesetzten Bedeutung von λ zu Folge nicht $2\mu > 2\lambda$ sein kann.

Es stimmt also wirklich auch bei den gegenwärtig besprochenen Problemen die Zahl der Integrationsconstanten im Allgemeinen mit der Anzahl der Gränzgleichungen überein, in keinem Falle kann sie diese letztere (für $i = 0$) übersteigen. Wenn dagegen unter besondern Umständen die Anzahl der Integrationsconstanten kleiner als $2\lambda + 2\nu$ ausfiele, dann würde allerdings die Aufgabe dadurch zu einer bestimmten zu machen sein, daß darin eine (oder einige) Bedingungen von der mit (Ⓔ) bezeichneten Gattung aufgenommen würden. Aehnlich verhielt es sich in dem Beispiele §. 30 IV) (S. 117) wo $\delta y_\alpha = 0$, $\delta y_\xi = 0$ sein mußte, ohne daß y_α, y_ξ gegeben waren.

Die hier wiederholt vorgekommene Zahl $2\lambda + 2\nu$ bedeutet übrigens, wie aus (6) zu ersehen ist, die größte der drei Zahlen

$$(8) \qquad 2m + 2\nu, \qquad 2n + 2\mu, \qquad 2\mu + 2\nu$$

§. 48.

Aufgabe. Man soll unter allen Curven von der Eigenschaft, daß die in den aufeinander folgenden Punkten zu construirenden Normalebenen fortwährend durch einen festen Punkt hindurchgehen, diejenige aus-

findig machen, deren Bogen zwischen zwei gegebenen parallelen Gränzebenen am kürzesten ist.

I) Die Gleichung für die dem Punkte x, y, z einer beliebigen Curve angehörige Normalebene ist bekanntlich

$$(x' - x)dx + (y' - y)dy + (z' - z)dz = 0$$

Bezeichnen wir daher die Coordinaten des festen Punktes, in welchem alle Normalebenen sich schneiden sollen, durch a, b, c, nehmen ferner die Ebene YZ parallel zu den beiden Gränzebenen und stellen die Gleichungen der gesuchten Curve durch $y = f(x)$, $z = f(x)$ vor, setzen also $dy = pdx$, $dz = \mathfrak{p}dx$, so haben wir $f(x)$ und $f(x)$ so zu bestimmen, daß die Bedingung

$$(1) \qquad (x - a) + (y - b)p + (z - c)\mathfrak{p} = 0$$

erfüllt werde, und daß zugleich

$$\mathrm{U} = \int_a^\xi \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}\, dx$$

ein Minimum sei. Dabei giebt $\xi - \alpha$ den Abstand der beiden Gränzebenen an. Die gesuchten Functionen sind also durch Behandlung der Gleichung $\delta \mathrm{U} =$

$$\delta \int_a^\xi \left(\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2} + \lambda[(x - a) + (y - b)p + (z - c)\mathfrak{p}]\right)dx = 0$$

zu finden, worin λ eine solche Function von x bedeutet, wie wir sie im vor. §. beschrieben haben. Durch Ausführung der daselbst angezeigten Operationen und indem wir

$$\mathrm{V} = \sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2} \qquad \Theta = (x - a) + (y - b)p + (z - c)\mathfrak{p}$$

setzen, erhalten wir

$$\delta \mathrm{U} = \mathrm{N}_\xi \delta y_\xi - \mathrm{N}_a \delta y_a + \mathfrak{N}_\xi \delta z_\xi - \mathfrak{N}_a \delta z_a + \int_a^\xi \left(\lambda p - \frac{1}{dx} d\left[\frac{p}{\mathrm{V}} + \lambda(y - b)\right]\right)\delta y dx + \int_a^\xi \left(\lambda \mathfrak{p} - \frac{1}{dx} d\left[\frac{\mathfrak{p}}{\mathrm{V}} + \lambda(z - c)\right]\right)\delta z dx$$

worin

$$\mathrm{N} = \partial_p(\mathrm{V} + \lambda\Theta) = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + \lambda(y - b) = \frac{p}{\mathrm{V}} + \lambda(y - b)$$

$$\mathfrak{N} = \partial_{\mathfrak{p}}(\mathrm{V} + \lambda\Theta) = \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{1 + p^2 + \mathfrak{p}^2}} + \lambda(z - c) = \frac{\mathfrak{p}}{\mathrm{V}} + \lambda(z - c)$$

ist. Demnach bestehen die zwei Gleichungen

$$\lambda p - \frac{1}{dx} d\left[\frac{p}{V} + \lambda(y-b)\right] = 0$$

$$\lambda \mathfrak{p} - \frac{1}{dx} d\left[\frac{\mathfrak{p}}{V} + \lambda(z-c)\right] = 0$$

d. h. (2) $$d\frac{p}{V} + (y-b)d\lambda = 0$$

(3) $$d\frac{\mathfrak{p}}{V} + (z-c)d\lambda = 0$$

woraus in Verbindung mit (1) die drei Functionen y, z, λ zu bestimmen sind.

II) Aus (2) und (3) läßt sich nun λ leicht eliminiren. Man erhält

(4) $$(z-c)d\frac{p}{V} - (y-b)d\frac{\mathfrak{p}}{V} = 0$$

Ein erstes Integral dieser Gleichung wird man ohne Weiteres entdecken, nämlich

$$(z-c)\frac{p}{V} - (y-b)\frac{\mathfrak{p}}{V} = \text{Const.}$$

oder, wenn wir für $V = \sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}$ den Werth $\frac{ds}{dx}$ einführen,

(5) $$(z-c)\frac{dy}{ds} - (y-b)\frac{dz}{ds} = C.$$

Wollte man jetzt schon bemerken, daß die Gleichung (1) unmittelbar integrabel ist, und zu

(6) $$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

nämlich zur Gleichung einer Kugelfläche mit dem noch unbestimmten Radius R führt, so würde freilich die Aufgabe auf die früher (in §. 46 II) behandelte hinauslaufen, auf einer Kugelfläche die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten zu ziehen. In der That hat die Gleichung (5) genau dieselbe Gestalt wie die Gl. (9) auf S. 205. — Sehen wir aber von diesem Zusammentreffen einstweilen noch ab, so werden wir suchen müßen, durch Verbindung von (5) oder (4) mit (1) eine neue, integrable Differentialgleichung abzuleiten.

Aus $\left[\frac{dx}{ds}\right]^2 + \left[\frac{dy}{ds}\right]^2 + \left[\frac{dz}{ds}\right]^2 = 1$ folgt nun

$$\frac{dx}{ds} d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds} d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds} d\frac{dz}{ds} = 0$$

und indem wir hieraus mittelst der Gleichung (1), welche sich auch in der Form

$$\frac{ds}{ds} = -\frac{x-a}{z-c}\frac{dx}{ds} - \frac{y-b}{z-c}\frac{dy}{ds}$$

schreiben läßt, den Differentialquotienten $\frac{ds}{ds}$ fortschaffen, erhalten wir

$$\frac{dx}{ds}\left(d\frac{dx}{ds} - \frac{x-a}{z-c}d\frac{ds}{ds}\right) + \frac{dy}{ds}\left(d\frac{dy}{ds} - \frac{y-b}{z-c}d\frac{ds}{ds}\right) = 0$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung ist aber vermöge (4) der zweite Summand gleich Null; daher muß auch sein

$$(z-c)d\frac{dx}{ds} - (x-a)d\frac{ds}{ds} = 0$$

und diese Gleichung, welche von derselben Form wie (4) ist, besitzt auch ein ganz ähnliches Integral, nämlich

$$(z-c)\frac{dx}{ds} - (x-a)\frac{ds}{ds} = \text{Const.}$$

Wird jetzt mit dieser Gleichung, um ds zu eliminiren, in (5) dividirt, so entsteht

$$(z-c)dy - (y-b)dz = A[(z-c)dx - (x-a)dz]$$

d. h. $$d\frac{y-b}{z-c} = Ad\frac{x-a}{z-c}$$

worin A eine willkührliche Constante bedeutet. Das Integral hiervon aber ist

$$\frac{y-b}{z-c} = A\frac{x-a}{z-c} + C$$

oder (7) $$(y-b) - C(z-c) = A(x-a)$$

Diese Gleichung zeigt, daß die gesuchte Curve in einer durch den festen Punkt $x=a$, $y=b$, $z=c$ gehenden Ebene liege; und da sie auch auf der durch Gl. (6) angezeigten Kugelfläche gelegen ist, so muß sie ein Kreis sein. Freilich war die Beschaffenheit der Gl. (6) als Integral der Differentialgleichung $\Theta = 0$ leicht vorauszusagen; denn die Forderung, daß alle Normalebenen durch einen und denselben Punkt a, b, c hindurchgehen sollen, ist identisch mit der Aussage, daß die Curve eine sphärische sei, nämlich auf einer um jenen festen Punkt a, b, c als Centrum zu beschreibenden Kugelfläche liege.

III) Wir machen nun darauf aufmerksam, daß in der vorliegenden Aufgabe, wenn sie nach der im vor. §. entwickelten allgemeinen Theorie beurtheilt wird,

$$\mu = 1 \qquad \nu = 1 \qquad m = 1 = \mu \qquad n = 1 = \nu \qquad k = 1$$

also $2k + 2\nu = 4$ ist, und daß gleichwohl bis jetzt nur drei Integra-

tionsconstanten R, A, C in die zwei zwischen x, y, z gefundenen endlichen Gleichungen (6) und (7) eingegangen sind. Allein um auch λ zu bestimmen, würde allerdings, mag man sich nun an (2) oder an (3) halten, noch eine vierte willkührliche Constante eingeführt werden, so daß, gemäß der Formel (8) im vor. §., die Zahl 4 herauskommt.

Wären nun die den Abscissen $x = \alpha$, $x = \xi$ entsprechenden Gränzpunkte A, B fix gegeben, so wäre $\delta y_\alpha = 0$, $\delta z_\alpha = 0$, $\delta y_\xi = 0$, $\delta z_\xi = 0$ und die Gränzgleichungen fielen weg. Allein man hätte dann, damit y_α, z_α, y_ξ, z_ξ die vorgeschriebenen Werthe erhalten, vier Bedingungen zu erfüllen. Und da in $y = f(x)$, $z = f(x)$ nur die drei unbestimmten Parameter R, A, C und nicht auch die eben gedachte in λ implicirte Constante vorkommen, so würden diese vier Bedingungen (im Allgemeinen) nicht zu befriedigen sein, in so fern der Punkt $O[x = a, y = b, z = c]$ als gegeben angesehen werden soll. In der That, von einem gegebenen Mittelpunkt O wird sich durch zwei gegebene Punkte A, B nur dann ein Kreis beschreiben laßen, wenn zufällig AO = BO ist. Wohl aber würde sich die Aufgabe lösen laßen, wenn man den fraglichen Mittelpunkt nicht völlig bestimmt denkt, sondern eine seiner drei Coordinaten noch unbestimmt läßt; oder auch, wenn zwar gefordert würde, daß alle mit der gesuchten Curve in Vergleichung zu ziehenden Nachbarcurven denselben Anfangspunkt A und denselben Endpunkt B besitzen sollen (so daß $\delta y_\alpha = 0$, $\delta z_\alpha = 0$, $\delta y_\xi = 0$, $\delta z_\xi = 0$ zu setzen ist) aber nicht für alle sechs Coordinaten dieser beiden Gränzpunkte bestimmte Werthe gegeben würden.*) Ohne jedoch hierbei zu verweilen, wollen wir die Aufgabe in dem Sinne faßen, daß die Punkte A und O gegeben, der Gränzpunkt B aber in der Ebene $x = \xi$ noch zu suchen sei.

Wir können, um diesen Fall mit größerer Bequemlichkeit zu erörtern, den Ursprung der Coordinaten in den Punkt O und die Ebene XZ durch den festen Gränzpunkt A legen, so daß y_α gleich Null, aber z_α gleich einer gegebenen Größe γ wird. Da die Axe der X durch O laufen und senkrecht auf den beiden gegebenen Gränzebenen stehen soll, so ist das Coordinatensystem hiermit bestimmt. Die Gleichungen des gesuchten Kreises sind, indem man in (6) und (7) $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ zu setzen hat,

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{8}$$

$$y - Cz = Ax \tag{9}$$

*) Vgl. Strauch Var. Calc. T. II p. 361.

Zunächst haben wir nun die zwei Bedingungen

(10) $\Theta_1 = y_\alpha = 0 \qquad \Theta_2 = z_\alpha - \gamma = 0$

und daraus folgt $\delta\Theta_1 = \delta y_\alpha = 0 \quad \delta\Theta_2 = \delta z_\alpha = 0$

so daß die in §. 47 II) durch l vorgestellte Zahl hier $= 2$ ist. Da außerdem keine Bedingungen für die vier Größen δy_α, δz_α, δy_ξ, δz_ξ vorhanden sind (wenn wir nämlich wieder davon absehen, daß sich die Gleichung $\Theta = 0$ unmittelbar integriren ließ und die Gleichung einer Fläche lieferte, worauf die Curve liegen muß) so zerfällt die Gränzgleichung in

(11) $\mathrm{N}_\xi = 0 \qquad$ und $\qquad \mathfrak{N}_\xi = 0$

Aus diesen vier Gleichungen (11) und (10) sind jetzt die drei Größen R, A, C und die in λ implicirte Integrationsconstante zu bestimmen, worauf die Werthe von y_ξ und z_ξ ebenfalls bekannt sein werden.

Mittelst der oben in I) entwickelten Formeln für N und $\mathfrak{N}$, worin jedoch jetzt $b = 0$, $c = 0$ ist, verwandeln sich die Gleichungen (11) in

$$\left[\frac{p}{\mathrm{V}} + \lambda y\right]_\xi = 0 \qquad \left[\frac{\mathfrak{p}}{\mathrm{V}} + \lambda z\right]_\xi = 0$$

Die eine derselben läßt sich durch die in λ enthaltene Constante befriedigen (§. 47 II). Substituirt man dann den so bestimmten Werth von λ_ξ in die andere, so hat man

(12) $z_\xi p_\xi - y_\xi \mathfrak{p}_\xi = 0$

Wollte man hingegen die Bemerkung machen, daß sich die Bedingungsgleichung $\Theta = 0$ unmittelbar integriren ließe und daß aus ihrem Integrale die Relation $\delta z_\xi = -\frac{y_\xi}{z_\xi}\delta y_\xi$ folgte, so würde man zwar statt (11) nur die einzige Gränzgleichung

$$(\mathrm{N}_\xi z_\xi - \mathfrak{N}_\xi y_\xi)\delta y_\xi = 0$$

erhalten, allein diese ist mit (12) identisch. —

Aus (8) und (9) folgt nun $yp + z\mathfrak{p} = -x$, $p - C\mathfrak{p} = A$ und hieraus fließen für die Differentialquotienten p, $\mathfrak{p}$ die Ausdrücke

$$p = -\frac{Cx - Az}{z + Cy} \qquad \mathfrak{p} = -\frac{x + Ay}{z + Cy}$$

mit deren Hülfe man die vorangehende Bedingungsgleichung (12) in

(13) $(y_\xi - Cz_\xi)\xi + A(y_\xi^2 + z_\xi^2) = 0$

umgestalten wird. Aus dieser Gleichung also und den beiden Gleichungen

(10) ſind, unter Zuziehung der auf die Punkte $x = \alpha$, $x = \xi$ bezogenen Gleichungen (8) und (9), alle Unbekannten zu beſtimmen.

Aus (8) und (10) ergiebt ſich (14) $\alpha^2 + \gamma^2 = R^2$

aus (9) und (10) aber (15) $-C\gamma = A\alpha$

Setzt man ferner den aus (9) fließenden Werth $y_\xi - Cz_\xi = A\xi$ in (13) und berückſichtigt (8), ſo hat man

$$AR^2 = 0 \qquad \text{d. h.} \qquad A = 0$$

Dieſes benutzend folgert man aus (15), daß auch $C = 0$ ſein müße. Die Gl. (9) reducirt ſich dadurch auf $y = 0$ und lehrt, daß der geſuchte Kreisbogen AB in der Ebene XZ liegen müße d. h. in derjenigen Ebene, welche durch A und O geht und auf den beiden gegebenen Gränzebenen ſenkrecht ſteht, ganz ſo wie man es im Voraus erwarten durfte, und wie es namentlich nach dem im §. 46 V) bewieſenen Lehrſatze ſein muß. Der Radius R endlich iſt durch (14) beſtimmt.

Einer Ausnahme ſind dieſe Schlüße nur in dem Falle unterworfen, wenn $\gamma = 0$ wäre; denn dann muß zwar noch $A = 0$ ſein, allein man kann aus (15) nicht mehr $C = 0$ folgern, man weiß alſo zwar wegen $A = 0$, daß die Ebene des Kreisbogens AB auf den beiden parallelen Gränzebenen ſenkrecht ſtehen muß, allein im Uebrigen bleibt ſie völlig unbeſtimmt. In der That, wenn $\gamma = 0$ iſt, ſo liegt der Punkt A in der Axe der X d. h. in dem von O auf die beiden Gränzebenen zu fällenden Perpendikel, iſt alſo der Pol zu demjenigen kleinen Kugelkreiſe, in welchem die Kugeloberfläche von der Gränzebene $x = \xi$ geſchnitten wird, und deshalb kann für die geſuchte Minimumscurve AB der Bogen irgend eines beliebigen, durch A gehenden größten Kreiſes genommen werden.

IV) Würde ſchließlich noch darüber, ob wirklich ein Minimum gefunden ſei, eine directe Prüfung durch den Calkul verlangt, ſo würden wir nach dem ſchon früher (§. 14 und §. 28) benutzten Verfahren aus

$$U = \int V dx = \int \sqrt{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)}\, dx$$

die endliche Variation

$$\delta U = \int \frac{p\delta p + \mathfrak{p}\delta \mathfrak{p}}{\sqrt{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)}}\, dx + \tfrac{1}{2}\int \frac{(1 + \mathfrak{p}^2)\delta p^2 - 2p\mathfrak{p}\delta p\delta \mathfrak{p} + (1 + p^2)\delta \mathfrak{p}^2}{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

ableiten, wobei wir zur Abkürzung die ſich von ſelbſt verſtehenden Integrationsgränzen nicht anzeigen. Da nun die Bedingungsgleichung $\Theta = 0$

im vorliegenden Falle gleichbedeutend mit

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

ist, so gehen wir, um die zwischen den Variationen Statt findenden Relationen zu entwickeln, von dieser Gleichung aus. Es fließt daraus

$$2y\nabla y + 2z\nabla z + \nabla y^2 + \nabla z^2 = 0$$

und indem man differentiirt

$$p\nabla y + \mathfrak{p}\nabla z + y\nabla p + z\nabla \mathfrak{p} + \nabla y\nabla p + \nabla z\nabla \mathfrak{p} = 0$$

Sobald wir nun in diesen zwei Gleichungen für ∇y, ∇z, ∇p, $\nabla \mathfrak{p}$ die bekannten Formeln $\delta y.\tau + \delta^2 y.\frac{1}{2}\tau^2 + \cdots$, u. s. w. einführen und gerade wie in §. 18 II) den Coefficienten von τ so wie von $\frac{1}{2}\tau^2$ einzeln gleich Null setzen, so ergiebt sich das System folgender Bedingungsgleichungen:

$$(16)\quad \begin{cases} y\delta y + z\delta z = 0 \\ y\delta^2 y + z\delta^2 z + \delta y^2 + \delta z^2 = 0 \\ p\delta y + \mathfrak{p}\delta z + y\delta p + z\delta \mathfrak{p} = 0 \\ p\delta^2 y + \mathfrak{p}\delta^2 z + y\delta^2 p + z\delta^2 \mathfrak{p} + 2\delta y\delta p + 2\delta z\delta \mathfrak{p} = 0 \end{cases}$$

Auf dieselbe Weise gestaltet man ∇U um in

$$\tau.\int \frac{p\delta p + \mathfrak{p}\delta \mathfrak{p}}{V} dx$$

$$+ \tfrac{1}{2}\tau^2.\int \left(\frac{p\delta^2 p + \mathfrak{p}\delta^2 \mathfrak{p}}{V} + \frac{\delta p^2 + \delta \mathfrak{p}^2 + (p\delta p - p\delta \mathfrak{p})^2}{V^3} \right) dx$$

Nun sind die für y und z gefundenen Functionen so beschaffen, daß das Integral

$$\int \frac{p\delta p + \mathfrak{p}\delta \mathfrak{p}}{V} dx = \delta \int V dx = \delta U$$

unter Beobachtung der zwischen δy und δz Statt findenden Abhängigkeit, gleich Null wird. Die gedachten Gleichungen selbst sind

$$y = 0 \qquad x^2 + z^2 = R^2$$

woraus folgt $\qquad p = 0 \qquad\qquad \mathfrak{p} = -\frac{x}{z}$

Indem wir daher von dem für ∇U entwickelten Ausdrucke blos den zweiten Bestandtheil beibehalten, jedoch den Factor $\frac{1}{2}\tau^2$ abwerfen, und die Werthe $p = 0$, $\mathfrak{p} = -\frac{x}{z}$, $V = \sqrt{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)} = \frac{R}{z}$ einführen — (wir behandeln hierbei, was die Natur der Aufgabe erlaubt, z als eine positive Größe) — so haben wir

$$\delta^2 U = \int \left(-\frac{x}{R}\delta^2 \mathfrak{p} + \frac{R^2\delta p^2 + z^2\delta \mathfrak{p}^2}{R^3 z^{-1}} \right) dx$$

Wegen $y = 0$ folgt aber aus der ersten der obigen Gleichungen (16)

$$\delta s = 0$$

deshalb liefert die zweite $s\delta^2 s + \delta y^2 = 0$

und die dritte $\delta p = 0$

endlich die vierte $-\frac{x}{s}\delta^2 s + s\delta^2 p + 2\delta y \delta p = 0$

Diese Relationen besitzen, wie man sieht, eine so einfache Beschaffenheit, daß man sie zur directen Elimination einiger der in $\delta^2 U$ enthaltenen Variationsquotienten benutzen wird.*) Durch Elimination von $\delta^2 s$ aus der zweiten und vierten der vorstehenden Gleichungen ergiebt sich

$$\delta^2 p = -\frac{x}{s^3}\delta y^2 - \frac{2}{s}\delta y \delta p$$

und diesen Ausdruck, so wie $\delta p = 0$ in $\delta^2 U$ einsetzend erhalten wir definitiv

$$\delta^2 U = \int_a^\xi \left(\frac{x^2}{Rs^3}\delta y^2 + \frac{2x}{Rs}\delta y \delta p + \frac{s}{R}\delta p^2\right) dx$$

$$= \frac{1}{R}\int_a^\xi \left(\frac{x}{s}\delta y + s\delta p\right)^2 \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

§. 49.

Als zweites Beispiel diene uns das berühmte, schon von Euler**) und Lagrange***) behandelte Problem der Brachistochrone im widerstehenden Mittel. Wenn auf einer in einer verticalen Ebene liegenden krummen Bahn ein schwerer Körper herabfällt, und wenn durch N der in der Richtung der Normale von der Curve geleistete Widerstand, durch g die Intensität der Schwere, durch $gf(v)$ der von dem widerstehenden Mittel nach der entgegengesetzten Richtung der jedesmaligen Tangente ausgeübte Druck bezeichnet wird, — wobei $f(v)$ eine gegebene

*) Die Relation $y\delta y + s\delta s = 0$ enthält hier freilich keine willkührliche Constante, wie es nach der im vor. §. in II) entwickelten Theorie sein sollte, dieses rührt aber daher, daß die Gl. (1) unmittelbar integrirt werden konnte. Wir müssen einräumen, daß aus diesem Grunde strenggenommen die Aufgabe zu den in §. 45 III) behandelten zu rechnen sei.

**) Meth. inv. etc. Cap. III No. 46 und Cap. V No. 66.

***) Leçons sur le Calc. des fonct. L. XXII p. 489.

Function der Geschwindigkeit v vorstellt, welche für jedes positive v einen positiven Werth erhält und mit v wächst, — und wenn man von der Reibung an der Bahn abstrahirt; so liefern die in jedem Augenblick auf den beweglichen Körper wirkenden Kräfte in der Richtung der Axe der X, welche wir auch hier wie in §. 27 vertikal abwärts ziehen wollen, die Componenten

$$-N\frac{dy}{ds}, \qquad g, \qquad -gf(v)\frac{dx}{ds}$$

weil durch $\frac{dy}{ds}$ und $\frac{dx}{ds}$ die Cosinus der Winkel angegeben werden, welche die Richtungen von N und $gf(v)$ mit der Axe der negativen X einschließen. Ebenso hat man nach der horizontalen Richtung der Axe der Y die Componenten

$$N\frac{dx}{ds}, \qquad 0, \qquad -gf(v)\frac{dy}{ds}$$

Daher bestehen, gemäß der bekannten Fundamentalregel der Dynamik, die beiden Gleichungen

$$d\frac{dx}{dt} = \left(g - gf(v)\frac{dx}{ds} - N\frac{dy}{ds}\right)dt$$

$$d\frac{dy}{dt} = \left(-gf(v)\frac{dy}{ds} + N\frac{dx}{ds}\right)dt$$

Wenn man die erste dieser Gleichungen mit $\frac{dx}{dt}$, die zweite mit $\frac{dy}{dt}$ multiplicirt, so fällt N bei der Addition beider heraus, und mit Rücksicht auf die Relationen $dx^2 + dy^2 = ds^2$, $\frac{ds}{dt} = v$ wird man finden

$$\tfrac{1}{2}d\left[\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\right] = \tfrac{1}{2}d(v^2) = g\,dx - gf(v)\,ds$$

d. h.

$$v\,dv = \left(g - gf(v)\frac{ds}{dx}\right)dx$$

Wäre nun die Gleichung der Curve bereits bekannt, so würde $\frac{ds}{dx}$ eine gegebene Function von x sein, und man besäße im Vorstehenden eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen v und x. Nimmt man dagegen $f(v) = 0$ d. h. keinen Widerstand an, so ergiebt sich durch Integration sofort $v^2 = 2g(x - c)$, wenn nämlich zu $x = c$ die Geschwindigkeit $v = 0$ gehören soll, und dieses ist die bekannte, früher in §. 27 I) von uns benutzte Formel.

Unſere Aufgabe, die Brachiſtochrone im widerſtehenden Mittel zu beſtimmen, beſteht jetzt darin, das Integral

$$U = \int \frac{ds}{v} = \int_a^\xi \frac{\sqrt{1+p^2}}{v}\,dx$$

zu einem Minimum zu machen, während zwiſchen y und v als Functionen von x die Bedingungsgleichung

$$\Theta = v\frac{dv}{dx} - g\left(1 - f(v)\sqrt{1+p^2}\right) = 0 \tag{1}$$

erfüllt ſein muß.

I) Indem wir nun dieſen Werth für Θ ſo wie den Ausdruck $\frac{\sqrt{1+p^2}}{v}$ für V in §. 47 I) einführen und ſelbſtverſtändlich v an die Stelle des dort gebrauchten s, alſo $\frac{dv}{dx}$ an die Stelle von p ſetzen, erhalten wir das Syſtem der zwei Gleichungen

$$\frac{1}{dx}d\left[\frac{p}{v\sqrt{1+p^2}} + \lambda g f(v)\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right] = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{v^2} - \lambda\frac{dv}{dx} - \lambda g f'(v)\sqrt{1+p^2} + \frac{1}{dx}d(\lambda v) = 0 \tag{3}$$

das Aggregat der von dem Integralzeichen befreiten Beſtandtheile von δU aber beſteht gemäß der Formel (4) des angeführten Paragraphen aus

$$\left.\begin{aligned}\delta U = {} & N_\xi \delta y_\xi - N_a \delta y_a + \mathfrak{N}_\xi \delta v_\xi - \mathfrak{N}_a \delta v_a \\ = {} & \left[\left(\frac{1}{v} + \lambda g f(v)\right)\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right]_\xi \delta y_\xi + [\lambda v]_\xi \delta v_\xi \\ & - \left[\left(\frac{1}{v} + \lambda g f(v)\right)\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right]_a \delta y_a - [\lambda v]_a \delta v_a\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Gl. (2) iſt in Beziehung auf y von der zweiten, in Beziehung auf v und λ von der erſten Ordnung, läßt ſich aber unmittelbar integriren und giebt

$$\left(\frac{1}{v} + \lambda g f(v)\right)\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = C_1 \tag{5}$$

die Gl. (3) dagegen zieht ſich zuſammen in

$$v\frac{d\lambda}{dx} + \left(\frac{1}{v^2} - \lambda g f'(v)\right)\sqrt{1+p^2} = 0 \tag{6}$$

und iſt in Beziehung auf y und λ von der erſten Ordnung, in Bezie-

hung auf v aber von der nullten, weil (V + 10) den Differential-quotienten $p = \frac{dv}{dx}$ nur in der ersten Dimension enthält. (Vgl. §. 30 IV). Unter Beibehaltung der in §. 47 II) gebrauchten Bezeichnung haben wir daher gegenwärtig

$$m = 1 - \mu, \qquad n = 0 < \nu, \qquad 2k + 2\nu = 4$$

Man könnte jetzt ohne alle Schwierigkeit den aus (5) zu entwickelnden Ausdruck für λ so wie den durch Differentiation abzuleitenden Ausdruck für $\frac{d\lambda}{dx}$ in (6) substituiren, und hätte dann eine nur v, $\frac{dv}{dx}$, p, q enthaltende Gleichung, welche in Verbindung mit (1) zur Bestimmung von v und y dienen müßte. Da jedoch die hier gedachte Differentialgleichung, wie man leicht finden wird, keineswegs die zu wünschende Einfachheit besitzt, so empfiehlt sich der Versuch, aus (1) (5) (6) zunächst v und $\frac{dv}{dx}$ zu eliminiren, um wo möglich eine integrable Gleichung für λ zu gewinnen. Durch Differentiation des aus (5) für λ hervorgehenden Ausdrucks ergiebt sich

$$d\lambda = -\left(\frac{C_1 dp}{p^2\sqrt{1+p^2}} - \frac{dv}{v^2}\right)\frac{1}{gf(v)} - \left(\frac{C_1\sqrt{1+p^2}}{p} - \frac{1}{v}\right)\frac{f'(v)dv}{gf(v)^2}$$

oder

$$gf(v)\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{C_1 q}{p^2\sqrt{1+p^2}} - \left[\left(\frac{C_1\sqrt{1+p^2}}{p} - \frac{1}{v}\right)\frac{f'(v)}{f(v)} - \frac{1}{v^2}\right]\frac{dv}{dx}$$

Indem wir nun, um hieraus zunächst $\frac{f'(v)}{f(v)}$ fortzuschaffen, die aus (5) und (6) für $\lambda gf(v)$ und $\lambda gf'(v)$ zu erhaltenden Werthe in einander dividiren, finden wir

$$\left(\frac{C_1\sqrt{1+p^2}}{p} - \frac{1}{v}\right)\frac{f'(v)}{f(v)} = \frac{v}{\sqrt{1+p^2}}\frac{d\lambda}{dx} + \frac{1}{v^2}$$

und dadurch verwandelt sich die vorangehende Gleichung in

$$gf(v)\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{C_1 q}{p^2\sqrt{1+p^2}} - \frac{v}{\sqrt{1+p^2}}\frac{d\lambda}{dx}\frac{dv}{dx}$$

oder

$$\left(gf(v)\sqrt{1+p^2}\,dx + v\,dv\right)\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{C_1 dp}{p^2}$$

Durch Zuziehung von (1) reducirt sich dieses aber auf

$$g\,d\lambda = -C_1\frac{dp}{p^2}$$

was nunmehr eine unmittelbar integrable Gleichung ist. Es folgt daraus

$$g\lambda = C_2 + \frac{C_1}{p} \tag{7}$$

wobei C_2 eine neue willkührliche Constante bedeutet.

Wenn wir jetzt diesen Werth für λ in (5) und (6) einführen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\frac{C_1\sqrt{1+p^2}}{p} - \left(C_2 + \frac{C_1}{p}\right)f(v) - \frac{1}{v} = 0 \\ &\frac{C_1 q}{gp^2\sqrt{1+p^2}} + \left(C_2 + \frac{C_1}{p}\right)\frac{f'(v)}{v} + \frac{1}{v^3} = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

und mittelst der Elimination von v würde hieraus die verlangte Differentialgleichung zwischen y und x herzustellen sein. Dieselbe ist offenbar von der zweiten Ordnung, läßt sich, weil darin nur p, dp, dx vorkommen, sofort integriren, und giebt x als Function von p. Alsdann würde man durch eine zweite Quadratur $y = \int p dx$ ebenfalls als Function von p finden.

II) Zur Ausführung der eben gedachten Elimination von v ist erforderlich, daß die Function $f(v)$ in bestimmter Form gegeben sei. Allein auch diese Schwierigkeit können wir umgehen, wenn wir uns zum Ziele vorsetzen, die Variablen x und y beide durch v, anstatt durch p, auszudrücken. Stellen wir in dieser Absicht die erste der Gleichungen (8), nachdem wir sie mit $pdx = dy$ multiplicirt und wegen $\sqrt{(1+p^2)}dx = ds$ auf die Gestalt

$$\left(C_2 f(v) + \frac{1}{v}\right)dy - C_1 ds + C_1 f(v)dx = 0 \tag{9}$$

gebracht haben, zusammen mit der Bedingungsgleichung (1) nämlich

$$v dv + g f(v) ds - g dx = 0 \tag{10}$$

Weil nun in diesen beiden Gleichungen außer v und dv nur die Differentialien dx, dy, ds und nicht diese Variablen selbst vorkommen, während überdies ds mit dx und dy vermittelst der Relation $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ zusammenhängt, so leuchtet ein, daß man sowohl dx als dy durch v und dv auszudrücken im Stande sei.

Aus (9) folgt $\frac{1}{C_1^2}\left(C_2 f(v) + \frac{1}{v}\right)^2 dy^2 = \left(f(v)dx - ds\right)^2$

aus (10) aber $\frac{v^2}{g^2}dv^2 = \left(f(v)ds - dx\right)^2$

also durch Subtraction

$$\frac{v^2}{g^2}dv^2 - \frac{1}{C_1^2}\left(C_2 f(v) + \frac{1}{v}\right)^2 dy^2 = f(v)^2 dy^2 - dy^2$$

d. h.
$$dy = \frac{C_1}{g}\frac{vdv}{\sqrt{\left[\left(C_2 f(v) + \frac{1}{v}\right)^2 - C_1^2(1 - f(v)^2)\right]}}$$

wobei es nicht nöthig war, das Vorzeichen $\pm$ vorzusetzen, weil C_1 eine vorläufig noch **unbestimmte** Constante ist. Ferner, indem man aus (9) und (10) ds eliminirt, erhält man

$$dx = \frac{C_2 f(v) + \frac{1}{v}}{C_1(1 - f(v)^2)} f(v)dy + \frac{vdv}{g(1 - f(v)^2)}$$

daher

$$(11) \quad y = \frac{C_1}{g}\int \frac{vdv}{\sqrt{\left[\left(C_2 f(v) + \frac{1}{v}\right)^2 - C_1^2(1 - f(v)^2)\right]}}$$

$$(12) \quad x = \frac{1}{g}\int \left(\frac{\left(C_2 f(v) + \frac{1}{v}\right) f(v)}{\sqrt{\left[\left(C_2 f(v) + \frac{1}{v}\right)^2 - C_1^2(1 - f(v)^2)\right]}} + 1\right)\frac{vdv}{1 - f(v)^2}$$

Hierdurch ist das Problem auf Quadraturen zurückgeführt. Es käme nach deren Ausführung, um eine Gleichung zwischen y und x zu erhalten, noch auf die Elimination von v an. Nachher wäre vermöge (7) auch λ durch x ausgedrückt, während die Abhängigkeit zwischen v und x durch (12) angegeben wird.

III) Da man in (11) und (12) noch zwei Integrationsconstanten anzufügen hat, so sind im Ganzen, übereinstimmend mit dem oben für $2h + 2v$ gefundenen Zahlwerthe, **vier** willkührliche Constanten in unsere Rechnung eingetreten. Eine derselben wird dadurch zu bestimmen sein, daß wir, um in (4) den Coefficienten von $\delta' v_\xi$ zum Verschwinden zu bringen, $\lambda_\xi = 0$ setzen. Zufolge (7) giebt dies die Bedingung

$$(13) \qquad C_2 + \frac{C_1}{p_\xi} = 0$$

Setzen wir nun voraus, die Anfangsgeschwindigkeit des fallenden Körpers wäre gegeben, entweder $v_\alpha = 0$, oder allgemeiner als Function der Coordinaten des Anfangspunkts A, etwa $v_\alpha = \Gamma(\alpha, \beta)$, so ist $\delta' v_\alpha = 0$, und das mit diesem Variationsquotienten behaftete Glied fällt aus (4)

weg, aber mittelst des gegebenen Werths von v_α würde eine zweite Constante zu bestimmen sein. Insbesondere wird man für $v_\alpha = 0$ aus Gl. (5) nämlich

$$(1 + \lambda_\alpha v_\alpha g f(v_\alpha))\left[\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right]_\alpha = C_1 v_\alpha = 0$$

den Schluß ziehen, daß $p_\alpha = 0$ sein müße, weil der Factor $1 + \lambda_\alpha v_\alpha g f(v_\alpha)$ sich nicht auf Null reducirt. Es wird zwar unter diesen Umständen λ_α unendlich, allein das Produkt $g\lambda_\alpha v_\alpha f(v_\alpha)$ besitzt einen endlichen positiven Werth; denn es ist vermöge (7)

$$g\lambda v = C_2 v + \frac{C_1 v}{p}$$

oder wenn man den aus (11) und (12) für $\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy}$ fließenden Werth einsetzt,

$$g\lambda v = C_2 v + \frac{(C_2 v f(v) + 1) f(v)}{1 - f(v)^2} + \frac{\sqrt{[(C_2 v f(v) + 1)^2 - C_1{}^2 v^2 (1 - f(v)^2)]}}{1 - f(v)^2}$$

und hieraus ergiebt sich für die Annahme $v_\alpha = 0$ sogleich

$$g[\lambda v]_\alpha = \frac{1 + f(0)}{1 - f(0)^2} = \frac{1}{1 - f(0)}$$

oder endlich, insofern es der Bedeutung von $f(v)$ gemäß gefordert wird $f(0) = 0$ anzunehmen,

$$g\lambda_\alpha v_\alpha = 1$$

Zur Anfangsgeschwindigkeit $v_\alpha = 0$ gehört also $p_\alpha = 0$, d. h. die Tangente der gesuchten Curve am Anfangspunkt A läuft vertikal abwärts.

Wollte man dagegen über v_α nichts festsetzen, also die Aufgabe in dem Sinne faßen, daß nicht allein die Curve $y = f(x)$, sondern zugleich das von v_α abhängige $v = f(x)$ so zu bestimmen wäre, daß die Fallzeit ein Minimum werde; so müßte man in (4) auch $[\lambda v]_\alpha = 0$ setzen, also

$$g\lambda_\alpha = C_2 + \frac{C_1}{p_\alpha} = 0$$

Dieses von (13) subtrahirt liefert $C_1\left(\frac{1}{p_\xi} - \frac{1}{p_\alpha}\right) = 0$ d. h. $C_1 = 0$, da für eine krummlinige Bahn nicht $p_\xi = p_\alpha$ sein kann. Durch $C_1 = 0$

reducirt sich aber λ auf die Constante $\frac{C_2}{g}$, es müßte also wegen $\lambda_a = 0$ auch $C_2 = 0$ sein, und die erste der Gleichungen (8) zeigte daß dann für jeden Punkt der gesuchten Curve $\frac{1}{v} = 0$, $v = \infty$ sein, mithin auch $v_a = \infty$ angenommen werden müßte, wie sich im Voraus erwarten ließ.

Nachdem nun durch $\lambda_\xi = 0$ und $v_a = \Gamma(\alpha, \beta)$ zwei Bestimmungsgleichungen für die erwähnten vier Integrationsconstanten festgestellt sind, so werden auch die beiden übrigen bestimmt sein, wenn die Gränzpunkte A und B gegeben sind. Wäre aber nur der Punkt A$[x = \alpha,\ y = \beta]$ gegeben, und B in der Horizontallinie KB (Fig. 8) zu suchen, so hätte man noch der Gränzgleichung

$$\left[\left(\frac{1}{v} + g\lambda f(v)\right)\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right]_\xi = 0$$

Genüge zu leisten. Diese ist aber wegen (5) gleichbedeutend mit der Forderung $C_1 = 0$, und dadurch reducirt sich Gl. (11) auf $y = 0$, d. h. die gesuchte Curve ist die durch A zu ziehende Vertikallinie, gerade wie im analogen Falle §. 27 III).

§. 50.

Wir legen uns jetzt die folgende etwas verwickeltere, übrigens allgemeine Aufgabe vor:

Man fragt nach einer solchen Function $y = f(x)$, durch welche $U = \int_\alpha^\xi V dx$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht wird, wobei wie bisher

$$(1) \qquad V = F(Z, x, y, p, q, \ldots)$$

gegeben, wobei aber Z selbst wieder ein unbestimmtes Integral von derselben allgemeinen Form wie U, nämlich

$$(2) \qquad Z = \int \mathfrak{F}(x, y, p, q, \ldots)dx$$

sein soll, dessen Anfangswerth (für $x = \alpha$) jedoch als gegeben vorauszusetzen ist.

So könnte, um die Sache an einem geometrischen Beispiele klar zu machen, etwa eine solche Curve verlangt werden, daß wenn man ihre von dem Gränzpunkte A an wachsenden Bogen AM rectificirt und in den Endpunkten P der zugehörigen Abscissen senkrecht zur Abscissenaxe auf-

trägt, also zu Ordinaten einer zweiten Curve macht, die von dieser letzteren und den Gränzordinaten HA, KB nebst der Strecke HK der Abscissenaxe umschloßene Figur den möglich kleinsten Inhalt besitze.

Hier ist offenbar $U = \int_a^\xi Z dx$, dabei giebt $Z = \int_a^x \sqrt{(1+p^2)}dx$ den Bogen AM an. Der Anfangswerth von Z ist in diesem Beispiele Null, in andern Fällen könnte er als Function von α oder auch wohl durch einen Ausdruck von der Form

$$(3) \qquad Z_\alpha = \mathfrak{F}(\alpha, y_\alpha, p_\alpha, \ldots)$$

gegeben sein. Wir wollen denselben überhaupt durch Z_α bezeichnen, so daß die Gl. (2) genauer durch $Z = Z_\alpha + \int_a^x \mathfrak{f}.dx$ vorzustellen wäre.

I) Man erkennt nun aber auf den ersten Blick die große Verwandtschaft zwischen den hierher gehörigen Aufgaben und den in §. 45 III) resp. §. 47 behandelten, da unser jetziges Z wie das dort vorkommende s eine Function von x vorstellt, welche völlig bestimmt wäre, sobald man die Beschaffenheit der gesuchten Function $y = f(x)$ bereits ermittelt hätte. Deshalb wird die dort entwickelte Methode auch hier mit geringer Modifikation anwendbar sein. Zwar war damals die Abhängigkeit zwischen s und y entweder durch eine endliche Gleichung $\Theta(x, y, s) = 0$ oder auch durch eine Differentialgleichung

$$\Theta\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots s, \frac{ds}{dx}, \frac{d^2s}{dx^2}, \ldots\right) = 0$$

gegeben, während man gegenwärtig für Z den unbequemeren Integralausdruck (2) hat. Allein diese Schwierigkeit läßt sich durch den einfachen Kunstgriff beseitigen, daß man die Gleichung (2) differentiirt, also die Abhängigkeit zwischen Z und y durch die Gleichung

$$(4) \qquad \frac{dZ}{dx} - \mathfrak{f}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) = 0$$

ausspricht. Addiren wir daher zu V die Größe $\lambda\left(\frac{dZ}{dx} - \mathfrak{f}\right)$ wobei λ die in §. 47 I) besprochene Beschaffenheit haben soll, so erhalten wir

$$U = \int_a^\xi \left(F - \lambda\mathfrak{f} + \lambda\frac{dZ}{dx}\right)dx$$

und hieraus

$$\delta U = \int_a^\xi \left(\delta F - \lambda \delta \mathfrak{f} + \lambda \frac{d\delta Z}{dx}\right) dx$$

$$= [\lambda \delta Z]_{\xi \dots a} - \int_a^\xi \frac{d\lambda}{dx} \delta Z dx + \int_a^\xi (\delta F - \lambda \delta \mathfrak{f}) dx$$

Nun ist aber

$$\delta F = \frac{dF}{dZ} \delta Z + \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{dp} \delta p + \cdots$$

$$\delta \mathfrak{f} = \frac{d\mathfrak{f}}{dy} \delta y + \frac{d\mathfrak{f}}{dp} \delta p + \cdots$$

daher

$$\delta' U = [\lambda \delta' Z]_{\xi \dots a} + \int_a^\xi \left(\frac{dF}{dZ} - \frac{d\lambda}{dx}\right) \delta' Z dx$$

$$(5) \qquad + \int_a^\xi \left(\left(\frac{dF}{dy} - \lambda \frac{d\mathfrak{f}}{dy}\right) \delta' y + \left(\frac{dF}{dp} - \lambda \frac{d\mathfrak{f}}{dp}\right) \delta' p + \cdots \right) dx$$

Da $\frac{dF}{dZ}$ eine ganz bestimmte und gegebene Function von x vorstellt, in so fern man sich die unbekannte Function $y = f(x)$ schon als gefunden denkt, so kann man die unbestimmt gelaßene Function λ so wählen, daß

$$(6) \qquad \frac{dF}{dZ} - \frac{d\lambda}{dx} = 0$$

wird. Ferner übersehe man nicht, daß nach der Forderung der Aufgabe entweder $\delta' Z_\alpha = 0$, $\delta'^2 Z_\alpha = 0, \dots$ ist, wenn nämlich Z_α für alle variirenden Curven denselben Werth besitzen soll, — oder daß man, wenn Z_α in der durch (3) angezeigten Weise gegeben wäre, sofort $\delta' Z_\alpha$ durch $\delta' y_\alpha$, $\delta' p_\alpha, \dots$ auszudrücken und die so entstehenden Glieder mit den gleichartigen in (9) zu vereinigen hätte.

Endlich bedenke man, daß in (6) die Function λ nur durch eine Differentialgleichung der ersten Ordnung gegeben ist, daß also nach deren Integration in λ jedenfalls eine unbestimmte Constante enthalten sein würde, und lege dieser aus den in §. 47 II) auseinander gesetzten Gründen einen solchen Werth bei, daß

$$(7) \qquad \lambda_\xi = 0$$

sei. Durch (6) und (7) ist dann λ vollständig bestimmt. Das in (5)

noch übrig gebliebene Integral, nämlich

$$\int_a^\xi (\partial_y F - \lambda f)\,\delta y + \partial_p(F - \lambda f)\,\delta p + \partial_q(F - \lambda f)\,\delta q + \cdots)dx$$

führt nach der bekannten Umformung zur Hauptgleichung

$$(8) \qquad (\partial_y F - \lambda \partial_y f) - \frac{d}{dx}(\partial_p F - \lambda \partial_p f) + \cdots = 0$$

und in Betreff der Gränzbestimmungen hat man aus (5), wenn zur Abkürzung

$$(\partial_p F - \lambda \partial_p f) - \frac{d}{dx}(\partial_q F - \lambda \partial_q f) + \cdots = N$$

$$(\partial_q F - \lambda \partial_q f) - \cdots = P$$

u. s. w.

gesetzt wird, die Gleichung

$$(9) \qquad \left.\begin{aligned} \delta U = &- \lambda_\alpha \delta Z_\alpha + N_\xi \delta y_\xi + P_\xi \delta p_\xi + \cdots \\ &- N_\alpha \delta y_\alpha - P_\alpha \delta p_\alpha - \cdots \end{aligned}\right\} = 0$$

Vermittelst der Differentialgleichungen (4) (6) (8) sind nun y, Z, λ als Functionen von x zu bestimmen.

II) Wir wollen dieses Verfahren sofort auf die am Eingange dieses §. beispielsweise gedachte Aufgabe anwenden, die jedoch noch etwas allgemeiner so gefaßt werden kann:

Es soll $U = \int_a^\xi Z^n dx$ zu einem Minimum gemacht werden, während $Z = \int_a^x \sqrt{(1 + p^2)}dx$ ist und n eine positive Zahl $\gtreqless 1$ bedeutet. — In dieser Aufgabe ist also $Z_\alpha = 0$.

Die Gleichungen (6) und (8) nehmen die Gestalt an

$$nZ^{n-1} - \frac{d\lambda}{dx} = 0 \qquad \frac{1}{dx} d \frac{\lambda p}{\sqrt{1 + p^2}} = 0$$

Das Integral dieser letztern ist

$$(10) \qquad \frac{\lambda p}{\sqrt{(1 + p^2)}} = \text{Const.} = A$$

und hieraus fließt

$$\lambda = \frac{A\sqrt{(1 + p^2)}}{p} \qquad \frac{d\lambda}{dx} = \frac{-Aq}{p^2\sqrt{(1 + p^2)}}$$

also $$(11) \qquad nZ^{n-1} + \frac{Aq}{p^2\sqrt{(1 + p^2)}} = 0$$

Durch Multiplication mit $dZ = \sqrt{(1 + p^2)}dx$ könnte man hieraus folgende Differentialgleichung

innerhalb des Integrationsintervalls continuirliche Function von x vorstellt, übrigens wie vorhin

$$Z = Z_\alpha + \int_\alpha^x f(x, y, p, q, \ldots)dx$$

ist. Man könnte alsdann die Rechnung auch auf folgendem Wege durchzuführen versuchen. Es sei

$$\int X dx = \psi(x) + \text{Const.}$$

so hat man durch partielles Integriren

$$\int XZdx = Z\psi(x) - \int \psi(x)dZ$$

also indem man dieses allgemeine Integral innerhalb der Gränzen $x = \alpha$ bis $x = \xi$ nimmt und bemerkt, daß $dZ = f.dx$, $Z_\xi = Z_\alpha + \int_\alpha^\xi f.dx$ sein soll,

$$\int_\alpha^\xi XZdx = Z_\alpha(\psi(\xi) - \psi(\alpha)) + \psi(\xi)\int_\alpha^\xi f.dx - \int_\alpha^\xi \psi(x) f.dx$$

also

$$(15) \qquad U = Z_\alpha(\psi(\xi) - \psi(\alpha)) + \int_\alpha^\xi F_1\, dx + \int_\alpha^\xi (\psi(\xi) - \psi(x)) f.dx$$

Hieraus würde nun folgen

$$\delta U = (\psi(\xi) - \psi(\alpha))\delta Z_\alpha + \int_\alpha^\xi (\partial_y F_1\, \delta y + \partial_p F_1\, \delta p + \cdots)dx$$
$$+ \int_\alpha^\xi (\psi(\xi) - \psi(x))(\partial_y f.\, \delta y + \partial_p f.\, \delta p + \cdots)dx$$

Man wird jedoch leicht gewahr werden, daß diese Formel mit der in (5) aufgestellten allgemeinen genau übereinstimmt, sobald man nur, wie es den gegenwärtigen Umständen entspricht, daselbst $\partial_y F$, $\partial_p F$, ... mit $\partial_y F_1$, $\partial_p F_1$, ... vertauscht und für λ den aus der Gl. (6) mit Rücksicht auf (7) hervorgehenden Ausdruck

$$\lambda = \int X dx = \psi(x) - \psi(\xi) = -(\psi(\xi) - \psi(x))$$

einsetzt.

Anmerkung. Die hier besprochene Aufgabe würde natürlich eine sehr verschiedene gewesen sein, wenn Z nicht das von $x = \alpha$ bis $x = x$ ausgedehnte, sondern das zwischen den zwei bestimmten Gränzen α und ξ genommene Integral von $f.dx$ vorstellen sollte. Denn in diesem Falle würde sich Z bei der Integration von $XZdx$ als ein constanter Factor verhalten, man würde also, wenn man zur Abkürzung die gegebene Größe $\int_\alpha^\xi X dx$ durch a vorstellt, den Werth

$$\int_\alpha^\xi XZdx = Z\int_\alpha^\xi Xdx = aZ = a\int_\alpha^\xi \mathfrak{f}.dx$$

in $U = \int_\alpha^\xi Vdx = \int_\alpha^\xi (XZ + F_1)dx$ einzuſetzen haben und dadurch

$$U = \int_\alpha^\xi (a\mathfrak{f} + F_1)dx \qquad \text{und} \qquad \delta U = \int_\alpha^\xi (a\delta\mathfrak{f} + \delta F_1)dx$$

erhalten, was auf die gewöhnliche Weiſe ohne Schwierigkeit weiter zu behandeln ſein würde.

§. 51.

Die in §. 47 auseinander geſetzte Methode wird, wie wir ſchließlich zu bemerken haben, auch noch zur Auflöſung einer anderen Art von Aufgaben ausreichen, deren Beziehung zu den bisher behandelten bei dem erſten Anblick vielleicht überſehen werden könnte. Es ſei nämlich diejenige Größe, deren Maximum oder Minimum gefunden werden ſoll, wie bisher das Integral $U = \int_\alpha^\xi Vdx$, dabei ſei aber nicht V unmittelbar gegeben, ſondern nur eine Gleichung von der Form

$$(1) \qquad \Theta\left(\int Vdx,\ V,\ \frac{dV}{dx},\ \frac{d^2V}{dx^2},\ldots\ x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ldots\right) = 0$$

oder, im noch complicirteren Falle

$$(2) \qquad \Theta\left(\int Vdx,\ V,\ \frac{dV}{dx},\ldots\ x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ldots\ z,\ \frac{dz}{dx},\ldots\right) = 0$$

worin $\int Vdx$ das bis $x = x$ genommene Integral vorſtellt, deſſen Anfangswerth für $x = \alpha$ entweder Null ſein oder auch, je nach der Natur der Aufgabe, als ein aus α, y_α, p_α, $\ldots$ z_α, $\ldots$ gebildeter Ausdruck gegeben ſein möge.

Man bedient ſich wohl zu einer kurzen Charakteriſtik dieſer Art von Aufgaben des Ausdrucks: Es ſolle das Maximum oder Minimum einer Integralfunction U gefunden werden, welche durch eine Differentialgleichung

$$\Theta\left(U,\ \frac{dU}{dx},\ \frac{d^2U}{dx^2},\ldots\ x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ldots\ z,\ \frac{dz}{dx},\ldots\right) = 0$$

verwickelt gegeben iſt, — und in dieſer Faßung mag das Problem von den bisher behandelten allerdings weſentlich verſchieden erſcheinen.*)

*) Vgl. Dirksen analyt. Darstellung der Var.-Rechn. p. 143. (§. 54). Ohm Lehre vom Größten und Kleinſten p. 311.

Denkt man sich dabei y und s bereits als bestimmte Functionen von x, so würden, wenn $\frac{d^\nu U}{dx^\nu}$ der höchste Differentialquotient von U in der vorgelegten Gleichung ist, durch deren Integration ν willkührliche Constanten in U eingehen; die Natur der hierher gehörenden Aufgaben wird jedoch gestatten diese Integrationsconstanten dadurch zu bestimmen, daß außer U_α auch die Anfangswerthe $\left[\frac{dU}{dx}\right]_\alpha, \left[\frac{d^2U}{dx^2}\right]_\alpha \cdots \left[\frac{d^{\nu-1}U}{dx^{\nu-1}}\right]_\alpha$ eine vorgeschriebene Größe haben sollen.

I) Wir nehmen zunächst an, Θ besitze die einfachere Form (1). Setzen wir alsdann

$$\int V dx = u$$

so wird $U = u_\xi - u_\alpha$, wobei wir der eben gemachten Bemerkung zu Folge u_α als gegeben anzusehen haben. Ferner wird $V = \frac{du}{dx}$, $\frac{dV}{dx} = \frac{d^2u}{dx^2}$ u. s. w. Daher können wir die Gl. (1) vorstellen durch

$$\Theta\left(u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \ldots x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right) = 0 \tag{3}$$

und die Aufgabe besteht jetzt darin, das Integral $U = \int_\alpha^\xi \frac{du}{dx} dx$ zu einem Maximum oder Minimum zu machen, während zwischen u und y als Functionen von x die Bedingungsgleichung (3) bestehen soll. Hierdurch ist das Problem auf das in §. 47 behandelte zurückgeführt. Man laße nur, um völlige Uebereinstimmung zu erreichen, das dort vorkommende $V dx$ sich auf den einfachen Ausdruck $\frac{du}{dx} dx$ reduciren, und setze in der Bedingungsgleichung (1) (Seite 220) so wie in den weiteren Rechnungen an die Stelle von s und y die gegenwärtig gesuchten Functionen u und y, entweder so, daß u dem dort vorkommenden s, $\frac{du}{dx}$ dem p, u. s. w. entspricht, oder nach Belieben auch umgekehrt so, daß y das dort vorkommende s, also u das y vertrete. Man erhält somit ein System von drei Gleichungen für die drei Functionen u, y, λ; und insofern es nicht sowohl auf die Berechnung des Werths von U, als auf die Gestalt der Gleichung $y = f(x)$ ankommt, kann man sich vielleicht der Bestimmung von $V = \frac{du}{dx}$ und von u ganz entschlagen.

II) In dem complicirteren Falle, daß in Θ außer x, u, y noch eine andere zu bestimmende Function s nebst ihren Differentialquotienten vorkäme, würde man natürlich das System der eben gedachten drei Gleichungen noch um folgende vierte vermehren:

$$\partial_s(\lambda\Theta) - \frac{1}{dx} d\partial_p(\lambda\Theta) + \frac{1}{dx^2} d^2\partial_q(\lambda\Theta) - \cdots = 0$$

wie man leicht aus §. 45 I) in Verbindung mit §. 47 erkennen wird.

III) Als Beispiel diene uns die Frage nach derjenigen Curve AB, längs welcher herabfallend ein von der Schwerkraft beschleunigter aber von einem widerstehenden Mittel in seiner Bewegung aufgehaltener Körper mit der größten Endgeschwindigkeit im Gränzpunkte B anlangt.

Setzen wir als selbstverständlich voraus, daß die gesuchte Curve eine ebene sein müße, und bedienen uns genau der in §. 49 gebrauchten Bezeichnung, ziehen auch wie dort die Axe der X vertikal abwärts; so haben wir für die Geschwindigkeit des fallenden Körpers in jedem Punkte seiner Bahn die Differentialgleichung

$$(4) \qquad v\frac{dv}{dx} - g\left(1 - f(v)\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}\right) = 0$$

Diejenige Größe, welche ein Maximum werden soll, ist die Endgeschwindigkeit v_ξ. Es würde ein großes Misverständnis sein, wenn man die Aufgabe so auffaßte, daß für jede beliebige Abscisse $x < \xi$ die Geschwindigkeit v auf der fraglichen Curve größer sein solle, als für dasselbe x auf einer variirenden Nachbarcurve. Wollte man diesen Sinn unterlegen, so würde freilich die Aufgabe nicht hierher, sondern zu den in §. 22 behandelten zu rechnen sein, indem man nur den dort mit U bezeichneten Ausdruck auf die einzige Variable s zu reduciren, alsdann an die Stelle von s und p unser gegenwärtiges v und $\frac{dv}{dx}$ zu setzen und die Bedingungsgleichung $\Theta = 0$ mit (4) zusammenfallen zu laßen brauchte. Allein man wird sich leicht überzeugen, daß auf diese Weise keine Auflösung möglich sei. In der That, unsere gesuchte Curve der größten Endgeschwindigkeit wird im Stande sein für den Gränzpunkt B [$x = \xi$] einen größern Werth von v zu liefern, als irgend eine Nachbarcurve AM_1B, ohne daß im beliebigen Punkte M [$\alpha < x < \xi$] die Geschwindigkeit v fortwährend größer als das für dasselbe x aus der Gleichung der variirenden Curve berechnete $v + \varphi v$ zu sein brauchte. (Vgl. §. 23 I).

Hierin besteht der wesentliche Unterschied zwischen jenen Problemen des zweiten Capitels und den gegenwärtig betrachteten.

IV) Indem wir nun unter der Voraussetzung, daß v_α eine gegebene Größe sein solle, in der obigen allgemeinen Entwickelung $(v_\xi - v_\alpha)$ an die Stelle von $U = \int_\alpha^\xi V dx$, also v an die Stelle von u setzen, und im Uebrigen uns an die erklärte Vorschrift halten, ergiebt sich uns für die in §. 47 I) durch $V + \lambda\Theta$ vorgestellte Größe der Ausdruck

$$\frac{dv}{dx} + \lambda\left(v\frac{dv}{dx} - g + gf(v)\sqrt{1+p^2}\right)$$

und die Gleichungen (2) (3) des angeführten Paragraphen nehmen die Gestalt an

$$d\left[\frac{\lambda g f(v).p}{\sqrt{(1+p^2)}}\right] = 0, \quad \lambda\left(\frac{dv}{dx} + gf'(v)\sqrt{1+p^2}\right) - \frac{d(1+\lambda v)}{dx} = 0$$

d. h. (5) $$\lambda g f(v)\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = C_1$$

(6) $$v\frac{d\lambda}{dx} - \lambda g f'(v)\sqrt{1+p^2} = 0$$

Diese zwei Gleichungen sind den in §. 49 mit (5) und (6) bezeichneten ganz ähnlich, nur etwas einfacher, und können nach dem dort angewendeten Verfahren leicht integrirt werden. Man wird zunächst den Werth

(7) $$g\lambda = C_2 + \frac{C_1}{p}$$

wieder finden. Setzt man zur Abkürzung $C_2 = aC_1$, so wird die Forderung $\lambda_\xi = 0$ zur Relation

$$ap_\xi + 1 = 0$$

führen, welche als Bestimmungsgleichung für a anzusehen ist, während C_1 durch die Forderung, daß v_α einen vorgeschriebenen Werth erhalte, schließlich bestimmt werden müßte.

Genau auf demselben Wege, den wir in §. 49 II) verfolgt haben, wird man dann weiter zu den Formeln

$$dy = \frac{1}{g}\frac{vdv}{\sqrt{((a^2+1)f(v)^2-1)}}$$

$$dx = \frac{1}{g}\left(\frac{af(v)^2}{\sqrt{((a^2+1)f(v)^2-1)}} + 1\right)\frac{vdv}{1-f(v)^2}$$

gelangen.

§. 52.

Bis hierher ist im gegenwärtigen Capitel sowohl als im vorhergehenden vorausgesetzt worden, daß der dem Integrale U zu Grunde liegende Ausdruck V außer x und constanten Größen nur die variirenden Functionen $y, p, q, \ldots$ resp. $z, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$ und nicht etwa auch einige der Gränzwerthe $y_\xi, y_\alpha, p_\xi \ldots z_\xi, z_\alpha, \mathfrak{p}_\xi, \ldots$ explicit enthalte. Da jedoch dieses letztere Verhalten wirklich vorkommen kann, so daß V ein Ausdruck von derselben Form wie das in §. 19 untersuchte U ist, so müßen wir, um unsern Gegenstand mit der zu wünschenden Vollständigkeit abzuhandeln, auch noch auf solche Fälle einen Blick werfen.

I) Zu dem Aggregate

$$\partial_y V\,\delta y + \partial_p V\,\delta p + \partial_q V\,\delta q + \cdots + \partial_z V\,\delta z + \partial_\mathfrak{p} V\,\delta \mathfrak{p} + \cdots$$

welches bisher die Variation δV bildete, treten jetzt noch Bestandtheile von der Form

$$\frac{dV}{d.y_\xi}\delta y_\xi,\ \frac{dV}{d.y_\alpha}\delta y_\alpha,\ \frac{dV}{d.p_\xi}\delta p_\xi, \ldots,\ \frac{dV}{d.z_\xi}\delta z_\xi,\ \frac{dV}{d.z_\alpha}\delta z_\alpha,\ \frac{dV}{d.\mathfrak{p}_\xi}\delta \mathfrak{p}_\xi, \ldots$$

(vgl. §. 19) und deshalb wird die Variation δU vermehrt um die Integrale

$$(1) \qquad \int_\alpha^\xi \frac{dV}{d.y_\xi}\delta y_\xi dx,\ \int_\alpha^\xi \frac{dV}{d.y_\alpha}\delta y_\alpha dx,\ \int_\alpha^\xi \frac{dV}{d.p_\xi}\delta p_\xi dx, \qquad \text{u. s. w.}$$

Diese neuen Bestandtheile sind also den früherhin entwickelten Formeln für δU zu addiren. Es versteht sich von selbst, daß der hier zuerst von uns hingeschriebene Bestandtheil $\int_\alpha^\xi \frac{dV}{d.y_\xi}\delta y_\xi dx$ nur dann existirt, wenn erstens in V die Gränzordinate y_ξ wirklich explicit vorkommt, und wenn zweitens y_ξ als variirende Größe gedacht werden, also nicht etwa für alle in Betrachtung zu ziehenden variirenden Curven einerlei Werth besitzen soll. Dieselbe Erinnerung gilt in Betreff aller übrigen in (1) zusammengestellten Glieder. Da nun aber die Variationen $\delta y_\xi, \delta y_\alpha, \delta p_\xi, \ldots \delta z_\xi, \delta z_\alpha, \delta \mathfrak{p}_\xi, \ldots$ keine während des continuirlichen Wachsens von x sich ändernde Größen sind, so laßen sie sich wie constante Factoren außerhalb des Integralzeichens setzen. Aus diesem Grunde wird man die Integralien (1) nach der Reihe mit denjenigen Bestandtheilen von δU einzeln zusammenfaßen, welche wir bisher gewöhnlich durch

$\mathrm{N}_\xi\delta y_\xi - \mathrm{N}_\alpha\delta y_\alpha + \mathrm{P}_\xi\delta p_\xi - \cdots + \mathfrak{N}_\xi\delta s_\xi - \mathfrak{N}_\alpha\delta s_\alpha + \mathfrak{P}_\xi\delta\mathfrak{p}_\xi - \cdots$
vorgestellt haben (§. 38, §. 43 IV und §. 45 I).

Während also die sogenannten Hauptgleichungen ganz auf dieselbe Weise wie früher zu bilden sind, tritt gegenwärtig nur

$$\left(\mathrm{N}_\xi + \int_\alpha^\xi \frac{d\mathrm{V}}{d.y_\xi}\,dx\right)\delta y_\xi \text{ an die Stelle von } \mathrm{N}_\xi\delta y_\xi$$

$$-\left(\mathrm{N}_\alpha - \int_\alpha^\xi \frac{d\mathrm{V}}{d.y_\alpha}\,dx\right)\delta y_\alpha \quad " \quad " \quad " \quad " \quad -\mathrm{N}_\alpha\delta y_\alpha$$

u. s. w.

$$\left(\mathfrak{N}_\xi + \int_\alpha^\xi \frac{d\mathrm{V}}{d.s_\xi}\,dx\right)\delta s_\xi \quad " \quad " \quad " \quad " \quad \mathfrak{N}_\xi\delta s_\xi$$

$$-\left(\mathfrak{N}_\alpha - \int_\alpha^\xi \frac{d\mathrm{V}}{d.s_\alpha}\,dx\right)\delta s_\alpha \quad " \quad " \quad " \quad " \quad -\mathfrak{N}_\alpha\delta s_\alpha$$

u. s. w.

Bei der Berechnung der Integrale $\int \frac{d\mathrm{V}}{d.y_\xi}\,dx$, $\int \frac{d\mathrm{V}}{d.y_\alpha}\,dx$ ꝛc. verhalten sich natürlich die darin explicit vorkommenden Größen y_ξ, y_α, p_ξ, ... s_ξ, s_α, $\mathfrak{p}_\xi$, ... obwohl ihre Werthe noch unbekannt sind, wie Constante. Und sobald die Functionen $y = f(x)$, $p = f'(x)$, $q = f''(x)$ ... resp. $s = \mathfrak{f}(x)$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{f}'(x)$, ... durch Integration der Hauptgleichung (resp. Hauptgleichungen) gefunden und in $\frac{d\mathrm{V}}{d.y_\xi}$, $\frac{d\mathrm{V}}{d.y_\alpha}$, ꝛc. eingesetzt worden sind, steht der Ausführung der gedachten Quadraturen kein Hindernis entgegen.

II) Um das Verfahren an einem einfachen Beispiele zu erläutern, wollen wir annehmen, es solle das Integral

$$\mathrm{U} = \int_0^1 \tfrac{1}{2}\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 dx$$

ein Minimum werden, unter der näheren Bedingung, daß die gesuchte Function $y = f(x)$ für $x = 0$ den Werth $y_0 = 1$ besitzen und daß sowohl für sie selbst als für alle mit ihr in Vergleich zu ziehenden vari-

renden Functionen das zwischen den Gränzen $x=0$ bis $x=1$ genommene Integral $\int\frac{f(x)}{f(1)}dx=\int\frac{y}{y_1}dx$ den Werth $\mathfrak{A}=-1$ erhalte.

In unserer gewöhnlichen Bezeichnung ausgedrückt ist diesmal $\alpha=0$, $\xi=1$, $y_\alpha=y_0=1$, $y_\xi=y_1$ eine gesuchte und mit y variirende Größe; ferner

$$\mathrm{U}=\int_0^1 \mathrm{V}dx=\tfrac{1}{2}\int_0^1 p^2dx \qquad \int_0^1 \mathrm{W}dx=\int_0^1\frac{y}{y_1}dx=-1$$

und wir haben also zu Folge §. 39 II) ein absolutes Minimum von

$$\ddot{\mathrm{U}}=\int_0^1(\tfrac{1}{2}p^2+\frac{\lambda y}{y_1})dx$$

zu suchen. Hierzu gehört die Variation

$$\delta\ddot{\mathrm{U}}=-\int_0^1\frac{\lambda y}{{y_1}^2}\delta y_1dx+\int_0^1(\frac{\lambda}{y_1}\delta y+p\delta p)dx$$

oder nach der bekannten Umformung von $\int p\delta pdx$ in $p\delta y-\int dp\delta y$ und unter Beachtung, daß der zu $x=0$ gehörige Werth von y gegeben ist, daß also $\delta y_0=0$ sein soll,

$$(2)\qquad \delta\ddot{\mathrm{U}}=(p_1-\frac{\lambda}{{y_1}^2}\int_0^1 ydx)\delta y_1+\int_0^1(\frac{\lambda}{y_1}-\frac{dp}{dx})\delta ydx$$

Daher ist die Hauptgleichung

$$(3)\qquad \frac{\lambda}{y_1}-\frac{dp}{dx}=0$$

deren erstes und zweites Integral man sofort finden kann, nämlich

$$\frac{\lambda}{y_1}(x-A)=p=\frac{dy}{dx}$$
$$\tfrac{1}{2}\lambda(x-A)^2=y_1(y-B)$$

Nun gehören zusammen $x=0$, $y=1$, d. h. es muß sein $\frac{1}{2}\lambda A^2=y_1(1-B)$ und dadurch verwandelt sich die vorangehende Gleichung in

$$(4)\qquad y_1y=y_1+\tfrac{1}{2}\lambda(x^2-2Ax).$$

In dieser Gleichung treten drei unbestimmte Constanten A, λ, y_1 auf. Zur Bestimmung der beiden ersten liegen die zwei Bedingungen vor, erstens daß das innerhalb der Gränzen $x=0$ bis $x=1$ genommene Integral $\int ydx$ den Werth $-y_1$ erhalten soll, zweitens daß der Coeffi-

cient von δy_1 in (2) gleich Null sein muß. Aus (4) findet man für das allgemeine Integral $\int y dx$ den Ausdruck

$$x + \frac{1}{6}\frac{\lambda}{y_1}x^3 - \frac{1}{2}\frac{\lambda}{y_1}Ax^2$$

Daher ist die erstgedachte Bedingung

$$(5) \qquad 1 + \frac{1}{6}\frac{\lambda}{y_1} - \frac{1}{2}\frac{\lambda}{y_1}A = -y_1$$

die andere Bedingung aber ist

$$(6) \qquad 0 = p_1 + \frac{\lambda}{y_1^2}y_1 = \frac{\lambda}{y_1}(1 - A) + \frac{\lambda}{y_1} = \frac{\lambda}{y_1}(2 - A)$$

Hierzu tritt nun die aus (4) für $x = 1$ zu gewinnende Relation

$$(7) \qquad y_1 = 1 + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{y_1}(1 - 2A)$$

Um (6) zu befriedigen kann man nicht etwa $\frac{\lambda}{y_1} = 0$ setzen, weil sonst die Gleichung (4) sich auf $y = 1 = y_1$ reduciren und der Forderung $\int_0^1 \frac{y}{y_1} dx = -1$ nicht Genüge leisten würde. Daher muß $A = 2$ sein. Dadurch ziehen sich die beiden übrigen Bedingungsgleichungen (5) und (7) zusammen in

$$1 - \frac{5}{6}\frac{\lambda}{y_1} = -y_1, \qquad 1 - \frac{3}{2}\frac{\lambda}{y_1} = y_1$$

woraus $\frac{\lambda}{y_1} = \frac{6}{7}$, $y_1 = -\frac{2}{7}$ folgt. Setzen wir diese Werthe

$$(8) \qquad A = 2, \qquad \lambda = -\frac{12}{49}, \qquad y_1 = -\frac{2}{7}, \qquad \frac{\lambda}{y_1} = \frac{6}{7}$$

in Gl. (4) ein, so wird definitiv

$$(9) \qquad \begin{array}{l} y = 1 + \frac{3}{7}(x^2 - 4x) \quad \text{oder auch} \quad (x-2)^2 = \frac{7}{3}(y + \frac{5}{7}) \\ p = \frac{6}{7}(x - 2) \end{array}$$

III) Zur Entscheidung, ob der hier für y gefundene Ausdruck wirklich ein Minimum von Ü liefere, oder ein Maximum oder auch keines von beiden, wollen wir von dem variirten Werthe

$$\ddot{U} + \nabla\ddot{U} = \int_0^1 \left(\tfrac{1}{2}(p + \nabla p)^2 + \lambda\frac{y + \nabla y}{y_1 + \nabla y_1}\right)dx$$

ausgehen. Die Entwickelung der in Parenthese geschloßenen Summe führt zu

$$\delta\ddot{U} = -\frac{\lambda}{y_1^2}\int_0^1 y\,dx\,\delta y_1 + \int_0^1 \left(\frac{\lambda}{y_1}\delta y + p\,\delta p\right)dx$$

$$+\int_0^1 \left(\frac{\lambda y}{y_1^3}\delta y_1^2 - \frac{\lambda}{y_1^2}\delta y_1\delta y + \tfrac{1}{2}\delta p^2\right)dx$$

Mittelst partieller Integration erhält man aber,

$$\int p\,\delta p\,dx = p\,\delta y - \int dp\,\delta y$$

und $$-\int\frac{\lambda}{y_1^2}\delta y_1\delta y\,dx = -\frac{\lambda\delta y_1}{y_1^2}x\,\delta y + \frac{\lambda\delta y_1}{y_1^2}\int x\,\delta p\,dx$$

daher haben wir

$$\delta\ddot{U} = \left(p_1 - \frac{\lambda}{y_1^2}\int_0^1 y\,dx\right)\delta y_1 + \int_0^1 \left(\frac{\lambda}{y_1} - \frac{dp}{dx}\right)\delta y\,dx$$

$$-\left(\frac{\lambda}{y_1^2} - \frac{\lambda}{y_1^3}\int_0^1 y\,dx\right)\delta y_1^2 + \int_0^1 \left(\frac{\lambda\delta y_1}{y_1^2}x\delta p + \tfrac{1}{2}\delta p^2\right)dx$$

Die beiden ersten Glieder dieses Ausdrucks verschwinden wegen (3) und (6); dem letzten Integrale aber können wir die Gestalt geben

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \left(\delta p^2 + 2\frac{\lambda x}{y_1^2}\delta p\,\delta y_1 + \frac{\lambda^2 x^2}{y_1^4}\delta y_1^2\right)dx - \frac{\lambda^2\delta y_1^2}{2y_1^4}\int_0^1 x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\delta p + \frac{\lambda x}{y_1^2}\delta y_1\right)^2 dx - \frac{1}{6}\frac{\lambda^2}{y_1^4}\delta y_1^2$$

Demnach ist $\delta\ddot{U} =$

$$-\frac{\lambda}{y_1^2}\left(1 - \frac{1}{y_1}\int_0^1 y\,dx + \frac{1}{6}\frac{\lambda}{y_1^2}\right)\delta y_1^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\delta p + \frac{\lambda x}{y_1^2}\delta y_1\right)^2 dx$$

Setzen wir hierin die bei (8) festgestellten Werthe für λ und y_1, wodurch $\frac{\lambda}{y_1^2} = -3$ wird, so wie für $\int y\,dx$ seinen Werth $-y_1$, so wird endlich

$$(10)\qquad \delta\ddot{U} = \tfrac{9}{2}\delta y_1^2 + \tfrac{1}{2}\int_0^1 (\delta p - 3x\delta y_1)^2 dx$$

Hieraus schließen wir, daß $\ddot{U}$ wirklich ein Minimum sei, daß also auch das Integral $U = \int_0^1 \frac{1}{2}p^2 dx$, wenn man p aus Gl. (9) nimmt,

einen kleinern Werth U_0 erhält, als wenn man für y irgend eine von (9) mehr oder weniger abweichende, übrigens der Forderung $\int_0^1 y dx = -y_1$ genügende Function annehmen wollte. Das gedachte Minimum selbst ist $U_0 = \frac{2}{7}$; durch (10) wird aber zugleich der zu diesem U_0 hinzukommende Zuwachs angegeben, insofern man nur für νy eine solche Function von x wählt, deren numerischer Werth innerhalb des Integrationsintervalls hinreichend klein bleibt und für $x = 0$ verschwindet, und welche außerdem so beschaffen ist, daß $\int_0^1 \nu y dx = -\nu y_1$ ausfällt, damit

$$\int_0^1 \frac{y + \nu y}{y_1 + \nu y_1} dx = -1$$

sei. Derartige Functionen kann man sich in unzähliger Menge bilden, wenn man z. B. $\nu y = ax + bx^2 + cx^3$ setzt, darin für b und c hinreichend kleine Brüche beliebig annimmt und a aus der mehrgedachten Bedingung $\int \nu y dx = -\nu y_1$ bestimmt.

§. 53.

Wir haben den Kreis der verschiedenen wichtigeren Gattungen von Aufgaben über das Maximum und Minimum der einfachen Integrale zwischen gegebenen Gränzen hiermit durchlaufen. Indem wir uns gestatten, am Schluße des Capitels unsern Leser nochmals an den Anfang zurückzuführen, laßen wir noch eine Aufgabe folgen, die zu den isoperimetrischen Problemen im weitern Sinne (§. 43) gehört. Dieselbe soll uns, abgesehen von dem an ihr selbst haftenden Interesse, sowohl dazu dienen, eine im gegenwärtigen Paragraphen zu machende allgemeine Bemerkung in Betreff jener Probleme zu erläutern, als auch eine später auszusprechende Behauptung zu bestätigen.

Aufgabe: Man verlangt eine zwischen zwei Gränzpunkten A, B zu ziehende Curve von der Eigenschaft, daß wenn man dieselbe um eine gegebene Gerade, die wir zur Axe der X annehmen, sich umdrehen läßt und die entstehende Rotationsfläche durch $\mathfrak{O}$, den räumlichen Inhalt des von dieser Fläche und den durch A, B gehenden Kreisflächen begränzten Körpers aber durch $\mathfrak{J}$ bezeichnet, $\mathfrak{O}$ ein Minimum werde im Vergleich mit allen anderen Curven, welche einerlei $\mathfrak{J}$ liefern, oder auch umgekehrt,

daß das Volumen $\mathfrak{J}$ ein Maximum werde im Vergleich mit allen Curven, für welche die Oberfläche $\mathfrak{M}$ einerlei Ausdehnung beſitzt.

I) Mögen wir die eine oder die andere dieſer zwei, in einem gewißen Verhältniße der Reciprocität zu einander ſtehenden Aufgaben aufzulöſen ſuchen, die Hauptgleichung wird ganz dieſelbe Geſtalt haben. Denn im letztern Falle hätten wir

$$U = \int V dx = \mathfrak{J} = \pi \int y^2 dx$$
$$\text{Const.} = \int W dx = \mathfrak{M} = 2\pi \int y ds$$

und es käme alſo darauf an, das Integral

$$\mathfrak{J} + \lambda \mathfrak{M} = \pi \int (y^2 + 2\lambda y \frac{ds}{dx}) dx$$

oder nach Weglaßung des Factors π, das Integral

$$\ddot{U} = \int_a^\xi (y^2 + 2\lambda y \frac{ds}{dx}) dx$$

zu einem Maximum zu machen. Im erſten Falle dagegen hätte man

$$U = \mathfrak{M} = 2\pi \int y ds \qquad \text{Const.} = \mathfrak{J} = \pi \int y^2 dx$$

und gefordert würde, daß

$$\mathfrak{M} + \lambda' \mathfrak{J} = \pi \int (2y \frac{ds}{dx} + \lambda' y^2) dx$$

ein Minimum werde. Setzt man aber hierin, was offenbar immer erlaubt iſt, $\lambda' = \frac{1}{\lambda}$, ſo kommt es nach Weglaßung des außerhalb des Integralzeichens zu ſetzenden Factors $\frac{\pi}{\lambda}$ darauf an, das Integral

$$\ddot{U} = \int_a^\xi (2\lambda y \frac{ds}{dx} + y^2) dx$$

zu einem Minimum zu machen. Dieſes und das vorhergehende $\ddot{U}$ ſind nun einerlei, folglich wird auch die Hauptgleichung (§. 25) ganz dieſelbe werden.

Ueberhaupt läßt ſich zu jedem iſoperimetriſchen Probleme in derſelben Weiſe, wie wir es hier gethan haben, eine Umkehrung finden, deren Auflöſung von derſelben Gleichung abhängt wie die urſprüngliche Aufgabe. So würde man z. B. durch eine in dem hier angedeuteten Sinne vorzunehmende Umkehrung des in §. 40 behandelten Problems zu dem Satze gelangen, daß unter allen Curven AMB, welche der Figur

HAMBK einerlei Inhalt verschaffen, der Kreisbogen AMB die kürzeste ist; u. dgl. m.

Um nun für ein constantes λ das Maximum des obigen Integrals $\dot{U}$ zu finden, erhalten wir die Hauptgleichung

$$(1) \qquad y + \lambda\sqrt{(1+p^2)} - \frac{\lambda}{dx} d\frac{yp}{\sqrt{(1+p^2)}} = 0$$

oder entwickelt

$$\left(y + \frac{\lambda}{\sqrt{(1+p^2)}}\right)dx - \lambda y \frac{dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Wenn man diese Gleichung mit p multiplicirt, so verwandelt sie sich in

$$ydy + \frac{\lambda dy}{\sqrt{(1+p^2)}} - \lambda y \frac{pdp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

was gleichbedeutend ist mit

$$ydy + d\frac{\lambda y}{\sqrt{1+p^2}} = 0$$

und wovon sich unmittelbar das Integral

$$(2) \qquad y^2 + \frac{2\lambda y}{\sqrt{1+p^2}} = B$$

angeben läßt. Noch kürzer gelangt man zu eben dieser Gleichung, wenn man in Anbetracht, daß in $V = 2\lambda y\sqrt{(1+p^2)} + y^2$ die Variable x nicht explicit vorhanden ist, sich an die Gl. (1.α) des §. 30 hält, deren linker Theil sich gegenwärtig auf

$$\partial_p V.p - V = 2\lambda y \frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} - 2\lambda y\sqrt{1+p^2} - y^2 = -y^2 - \frac{2\lambda y}{\sqrt{1+p^2}}$$

reducirt.

Man wird jetzt aus (2) den Ausdruck für den Differentialquotienten p entwickeln, und die Variablen absondern. Dadurch findet man

$$dx = \pm \frac{(y^2 - B)dy}{\sqrt{4\lambda^2 y^2 - (y^2 - B)^2}}$$

und die verlangte Gleichung zwischen x und y ist also

$$(3) \qquad x - A = \pm \int \frac{(y^2 - B)dy}{\sqrt{4\lambda^2 y^2 - (y^2 - B)^2}}$$

II) Die Form dieser Gleichung hat viel Aehnlichkeit mit derjenigen, welche als die Gleichung der elastischen Curve (Curva elastica, courbe élastique) bekannt ist, nämlich

$$x - A = \pm \int \frac{(y^2 - B)dy}{\sqrt{C^2 - (y^2 - B)^2}}$$

und auf welche man auch bei der Auflösung einer mit der hier behandelten nahe verwandten Aufgabe geführt wird, nämlich bei der Aufsuchung derjenigen Curve, welche unter allen mit ihr gleichlangen Curven bei der Umdrehung um die Axe der X dem entstehenden Rotationskörper $\pi\int y^2dx$ den größten Inhalt verschafft.*) Als eine besonders merkwürdige und charakteristische Eigenschaft der durch unsere Gl. (3) oder (2) bezeichneten Curven aber kann die mechanische Construction**) hervorgehoben werden, daß sie von dem Brennpunkte einer Ellipse oder einer Hyperbel, je nachdem die Constante B einen negativen oder einen positiven Werth besitzt, beschrieben werden, wenn man diesen Kegelschnitt längs der Axe der X sich ohne zu gleiten in derselben Weise aufrollen läßt, wie man zur Erzeugung der Cykloiden einen Kreis fortzurollen hat.

Um dieses zu zeigen, sei (Fig. 16) DNR irgend eine Curve, welche längs der Geraden ONX aufgerollt werden soll, D sei der Anfangspunkt des abgewickelten Bogens und F sei derjenige mit dieser Curve festverbundene Punkt, welcher die in Untersuchung stehende Curve beschreiben soll. Setzen wir den veränderlichen W. $DFN = \theta$, den zugehörigen Radius-Vector $FN = r$, so ist nach der bekannten Formel zur Bestimmung des Winkels, welchen der Radius-Vector mit der Tangente ONX bildet,

$$\text{tang ONF} = \frac{rd\theta}{dr}$$

Bezeichnen wir diesen Winkel ONF durch χ, und setzen diejenige rollende Bewegung voraus, bei welcher das einem positiven $d\theta$ entsprechende Differential dr so lange einen positiven Werth besitzt, als $\chi < \frac{1}{2}\pi$ bleibt, so wird

$$\text{Cos}\,\chi = \frac{dr}{\sqrt{r^2d\theta^2 + dr^2}} \qquad \text{Sin}\,\chi = \frac{rd\theta}{\sqrt{r^2d\theta^2 + dr^2}}$$

Legen wir jetzt den Anfangspunkt O der Abscissen in denjenigen Punkt, welcher bei dem Beginne der Abwickelung des Bogens $DN = \sigma$ mit D in Berührung war, so haben wir $x = \sigma - r\,\text{Cos}\,\chi$, $y = r\,\text{Sin}\,\chi$, d. h.

---

*) Man findet diese Aufgabe, welche zu der hier behandelten in so naher Beziehung steht, bei Euler meth. inv. Cap. V No. 46. Francoeur Th. 2 Buch 4 §. 36. Strauch T. II. Aufg. 222. Vgl. auch unsern §. 68 Gl. (6). Ueber die Ableitung der Gleichung aus statischen Principien kann man nachsehen Eytelwein Statik Bd. II §. 414 u. Bd. III §. 134. Poisson méc. No. 307 — 310.

**) Diese Eigenschaft ist von Delaunay entdeckt worden. S. Liouville Journ. d. Math. T. VI (1841) p. 313.

(4) $x = \sigma - \frac{rdr}{\sqrt{r^2d\theta^2 + dr^2}} \qquad y = \frac{r^2d\theta}{\sqrt{r^2d\theta^2 + dr^2}}$

wobei $\sigma = \int \sqrt{(r^2d\theta^2 + dr^2)}$ ist. Wäre daher die Polargleichung der rollenden Curve in Beziehung auf den Pol F gegeben, so würde man, je nachdem entweder r, $\frac{dr}{d\theta}$, σ als Functionen des Polarwinkels θ, oder umgekehrt θ, $\frac{d\theta}{dr}$, σ als Functionen von r darzustellen sind, vermittelst (4) die Coordinaten x und y beide durch θ resp. beide durch r ausdrücken und dann, um die Gleichung der Curve FF′ zu entwickeln, die Hülfsvariable θ resp. r eliminiren. Aber auch bei der umgekehrten Aufgabe, wenn nämlich die Gleichung zwischen x und y gegeben, und die Gleichung zwischen r und θ zu suchen ist, laßen sich diese Formeln (4) benutzen. Wenn insbesondere eine Differentialgleichung von der Form $f(y, \frac{dy}{dx}) = 0$ vorliegt, wie das mit unserer obigen Gl. (2) der Fall ist, worin kein x explicit vorkommt, so wird man sofort, indem man die Werthe $y = \frac{r^2d\theta}{\sqrt{(r^2d\theta^2 + dr^2)}}$, $\frac{dy}{dx} = \frac{dr}{rd\theta}$ einsetzt, eine Differentialgleichung erster Ordnung zwischen r und θ erhalten. Von der Richtigkeit der eben zuletzt hingestellten Formel überzeugt man sich am leichtesten durch die Betrachtung daß, wenn FT die Tangente der Curve FF′, also W. TFN $= 90^0$ ist,

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang XTF} = \text{Cotang } \chi = \frac{\text{Cos } \chi}{\text{Sin } \chi}$$

sein muß. — Aus (2) entspringt auf diese Weise

(5) $d\theta = \frac{\pm\sqrt{B}.dr}{r\sqrt{-B + 2\lambda r + r^2}}$ oder (6) $d\theta = \frac{\pm\sqrt{-B}.dr}{r\sqrt{B - 2\lambda r - r^2}}$

je nachdem B einen positiven oder einen negativen Werth erhalten soll. Für den letztern Fall muß auch, damit die Curve reell sei, die Constante λ negativ sein und der Radius-Vector r innerhalb gewißer Gränzen liegen.

Die Polargleichung der Kegelschnitte ist aber, wenn man die Polarwinkel θ von dem in der Richtung der ersten Hauptaxe fallenden Radius FD an zählt, bekanntlich

$$r = \frac{\frac{1}{2}p}{1 + \varepsilon \text{ Cos } \theta}$$

wobei p den Parameter, ε die absolute Excentricität bedeutet. Diese Gleichung läßt sich auch in der Gestalt

$$\theta = \text{Arc Cos}\left(\frac{\frac{1}{2}p}{\varepsilon r} - \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

schreiben, und daraus wird man durch Differentiation ohne Mühe herleiten

$$d\theta = \frac{\frac{1}{2}p\,dr}{r\sqrt{[-\frac{1}{4}p^2 + pr + (\varepsilon^2 - 1)r^2]}} \quad \text{oder auch}$$

$$d\theta = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}p^2}{\varepsilon^2 - 1}} \cdot \frac{dr}{r\sqrt{\left[-\left(\frac{\frac{1}{4}p^2}{\varepsilon^2 - 1}\right) + \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}r + r^2\right]}}$$

Wenn hierin $\varepsilon > 1$ ist, so hat man es mit einer Hyperbel zu thun, und die vorstehende Gleichung stimmt, sobald man

$$B = \frac{\frac{1}{4}p^2}{\varepsilon^2 - 1} \qquad \lambda = \frac{\frac{1}{2}p}{\varepsilon^2 - 1}$$

macht, genau mit (5) überein. Im entgegengesetzten Falle, für $\varepsilon < 1$, wird man die Umformung

$$d\theta = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}p^2}{1 - \varepsilon^2}} \cdot \frac{dr}{r\sqrt{\left[-\left(\frac{\frac{1}{4}p^2}{1 - \varepsilon^2}\right) + \frac{p}{1 - \varepsilon^2}r - r^2\right]}}$$

anwenden, und indem man $B = -\frac{\frac{1}{4}p^2}{1 - \varepsilon^2}$, $\lambda = -\frac{\frac{1}{2}p}{1 - \varepsilon^2}$ setzt, sieht man aus der Vergleichung mit (6), daß diese letztere Gleichung einer Ellipse zugehört.

III) Ein besonderes Interesse nimmt der Fall in Anspruch, daß einer der beiden Gränzpunkte A, B in der Rotationsaxe liegen, daß also $y_\alpha = 0$ oder $y_\xi = 0$ sein soll. Durch keine der so eben besprochenen Curven ist dann der Aufgabe ein Genüge zu leisten, da bei der erklärten Bewegung des Kegelschnitts der Brennpunkt F nirgends mit der Basis ONX in Berührung kommt. Aus der Gl. (2) wird man aber, indem man der Independenten x in Gedanken den Werth α resp. ξ beilegt, sofort den Schluß ziehen, daß die unbestimmte Constante B in diesem Falle Null sein müße, weil sonst für $y_\alpha = 0$ resp. $y_\xi = 0$ eine Ungereimtheit entstehen würde. An die Stelle der Gl. (2) tritt daher jetzt die folgende

$$y\left(y+\frac{2\lambda}{\sqrt{1+p^2}}\right)=0$$

welche zu zertheilen ist in $y=0$ und $y+\frac{2\lambda}{\sqrt{(1+p^2)}}=0$.

Der Ort für die Gl. $y=0$ leistet allerdings in gewißem Betracht der Aufgabe Genüge. Es entsprechen ihm die Werthe $\mathfrak{J}=0$, $\mathfrak{O}=0$. Wenn man aber zwei in der Abscissenaxe angenommene Punkte **A**, **B** durch eine solche Curve **AMGNB** verbindet, welche in dem zwischen **A** und **B** liegenden Punkte **G** die Abscissenaxe durchschneidet, deren Bögen **AMG** und **GNB** demnach auf verschiedenen Seiten der Abscissenaxe gelegen sind, so wird bei der Berechnung von $\mathfrak{O}$ nach der Formel $2\pi\int y ds$ der von dem Bogen **GNB** erzeugte Theil der Rotationsfläche das entgegengesetzte Vorzeichen von dem durch die Umdrehung des Bogens **AMG** entstandenen Theile haben, und es kann also auf unzählige Weisen bewirkt werden, daß das ganze, dem Intervalle $AG+GB=\xi-\alpha$ entsprechende Integral gleich Null werde. Der nach der Formel $\pi\int y^2 dx$ berechnete Cubikinhalt $\mathfrak{J}$ dagegen ergiebt sich stets als eine positive Größe. Daher wird $\mathfrak{J}=0$ wirklich das Minimum sein in Vergleich mit den unzähligen, an die Gerade $y=0$ sich mehr oder weniger anschmiegenden Curven, für welche $\mathfrak{O}=0$ ist. — Allein die eigentlich verlangte Auflösung, durch welche $\mathfrak{J}$ ein Maximum werden soll, und welche auch dann brauchbar sein muß, wenn von den beiden Gränzpunkten **A**, **B** nur der eine in der Abscissenaxe liegt, der andere aber außerhalb derselben gegeben ist, müßen wir mittelst der Gleichung

$$(7)\qquad y+\frac{2\lambda}{\sqrt{(1+p^2)}}=0$$

zu finden suchen. Aus derselben folgt

$$(8)\qquad p=\frac{dy}{dx}=\pm\frac{\sqrt{(4\lambda^2-y^2)}}{y}$$

und durch Integration

$$(9)\qquad (x-A)^2+y^2=4\lambda^2$$

d. h. die Gleichung eines Kreises, dessen Mittelpunkt in der Abscissenaxe liegt, und dessen Halbmeßer gleich -2λ ist. Wir haben hier das Vorzeichen (—) vorgeschrieben, weil wir in (7) y als positive, λ als negative Größe auffaßen.

Dieselbe Gleichung ergiebt sich auch aus (3) sobald man darin $B=0$ macht. Uebrigens bemerke man, daß wenn die Oberfläche $\mathfrak{O}$ als

gegeben angesehen und demgemäß der Werth von λ angenommen wird (nämlich $-2\lambda = \frac{\mathfrak{U}}{2\pi(\xi-\alpha)}$ nach dem bekannten Satze über den Inhalt der Kugelmütze) alsdann in (9) nur noch die einzige Integrationsconstante A übrig bleibt, welche durch die Bedingung $y_\alpha = 0$ zu bestimmen ist, und daß nachgehends die andere Gränzordinate aus (9) sich berechnen läßt. Damit aber nicht noch einer Gränzgleichung Genüge zu leisten sei, wird man genöthigt sein $\delta y_\xi = 0$ zu denken, d. h. die Vergleichung auf solche Nachbarcurven zu beschränken, welche mit der gefundenen Maximumscurve denselben Endpunkt B haben, obwohl y_ξ keine gegebene Größe ist. In dieser Beziehung besitzt die hier gefundene Auflösung dieselbe Eigenthümlichkeit, von welcher für einen analogen Fall in §. 30 IV (S. 117) die Rede gewesen ist. Sollte aber δy_ξ nicht gleich Null gedacht werden, so hätte man die Gränzgleichung

$$[\partial_p(V+\lambda W)]_\xi = 2\lambda\left[\frac{yp}{\sqrt{1+p^2}}\right]_\xi = 0$$

zu befriedigen, woraus man unter Zuziehung von (8) leicht schließen wird, daß entweder $y_\xi = 0$ oder $y_\xi = -2\lambda$ d. h. gleich dem Radius des Kreises, daß also $\mathfrak{U}$ entweder dem Inhalte einer über $(\xi-\alpha)$ als Durchmeßer beschriebenen Kugelfläche, oder der halben Oberfläche einer mit $(\xi-\alpha)$ als Radius beschriebenen Kugel gleich sein müße, wenn die Auflösung möglich sein soll.

Fünftes Capitel.

Von den mit gleichzeitigen Aenderungen der independenten Variablen gemischten Variationen.

§. 54.

In allen vorhergehenden Untersuchungen hatten wir, während wir im Sinne des §. 5 den Functionen $y = f(x)$, $z = f(x)$ unmittelbare Variationen, so wie den Functionen V, U mittelbare Variationen zuschrieben, der Independenten x ausdrücklich einen zwar beliebigen aber

während des Variirens jener Functionen sich nicht ändernden Werth beigelegt (vgl. §. 2). Es giebt indessen zahlreiche Aufgaben, bei deren Auflösung man genöthigt ist, indem man von y, z,.. V, U zu $y+\delta y$, $z+\delta z$, $V+\delta V$ ꝛc. oder auch zu $y+\varphi y$, $z+\varphi z$, $V+\varphi V$ übergeht, gleichzeitig den Werth der independenten Variablen x sich ändern zu laßen. Dieses ereignet sich z. B. wenn eine Curve AMB gesucht wird, welche einem Integrale $U=\int_\alpha^\xi V dx$ den größten oder kleinsten Werth verschafft, und wenn dabei weder die Ordinaten β, η der Gränzpunkte A, B noch ihre Abscissen α, ξ gegeben sind, aber vorgeschrieben ist, daß der Punkt A auf einer ersten, der Punkt B auf einer zweiten gegebenen Curve gesucht werden solle, so daß an die Stelle der Gränzordinaten HAJ, KBL in Fig. 2 diese zwei Gränzcurven treten, etwa L_1AA_1, L_2BB_1 in Fig. 17, auf welchen die Gränzpunkte A, B in die benachbarten Oerter A_1, B_1 fortrücken. Bei jeder Aufgabe dieser Art ist offenbar, indem man von der ursprünglichen Curve AMB zu einer nächstanliegenden $A_1M_1B_1$ übergeht, mit y_α und y_ξ gleichzeitig auch α und ξ variabel; und man wird daher auch $\delta\xi$ und $\delta\alpha$ in den Calkul einzuführen haben. Eben dieses gilt dann aber auch von jedem andern Punkt M des Bogens AB; denn wenn man diesen Bogen in die unendlich nahe Lage A_1B_1 verschiebt, so wird ein dem Punkte M entsprechender Punkt M_1 existiren, dessen Abscisse eben so wohl als die Ordinate einen andern Werth besitzt als die gleichnamige Coordinate des Punkts M. Ueber das Gesetz, wie man zu jedem Punkte M den entsprechenden M_1 zu finden habe, ließe sich auf verschiedene Weise eine Vereinbarung treffen. Man könnte z. B. denjenigen Punkt als den entsprechenden von M auffaßen, durch welchen der Bogen A_1B_1 in demselben Verhältnis getheilt wird, wie der Bogen AB im Punkte M. Oder man könnte den Punkt M_1 dann als den entsprechenden von M definiren, wenn in dem Fußpunkte P_1 seiner Ordinate die Strecke H_1K_1 ebenso getheilt wird, wie HK in P; u. s. w. Aber eben deshalb weil aus der Natur des Gegenstands keine bestimmte Vorschrift sich als besonders empfehlenswerth herausstellt, müßen wir uns enthalten etwas specielles festzusetzen, und glauben durch folgende allgemeinere Auffaßung, welche auch bei Untersuchungen im Raume gebraucht werden kann, wo drei variirende Coordinaten x, y, z vorkommen, allen Ansprüchen Genüge zu leisten.

I) Man denke sich außer der variirenden Curve AB, deren Glei-

chung wir gemäß §. 2 durch

$$(1) \qquad y = \Phi(x, t)$$

vorstellen wollen, noch eine andere variirende Curve, welche einen continuirlichen Uebergang von der ersten Gränzcurve L_1AA_1 (Fig. 17) in die zweite Gränzcurve L_2BB_1 vermittelt. Dieses würde nach den im angeführten Paragraphen gegebenen Erläuterungen dadurch zu erreichen sein, daß man, wenn etwa

$f_1(x, y) = 0$ die Gleichung der gegebenen Curve L_1
$f_2(x, y) = 0$ " " " " " L_2

ist, eine allgemeine Gleichung von der Form

$$(2) \qquad \Psi(x, y, t) = 0$$

bildete, worin t einen variablen Parameter (ein von t unabhängiges Variationsargument) vorstellt, so daß für einen bestimmten Werth $t = t_1$ aus $\Psi(x, y, t)$ die gegebene Function $f_1(x, y)$ und für einen andern Werth $t = t_2$ die Function f_2 entspränge. Jeder Punkt M oder M_1 ist dann bestimmt durch Fixirung der ihm entsprechenden Werthe von t und t, indem durch jeden partikulären Werth von t eine einzelne aus dem System der Curven AB, $A_1B_1, \ldots$, durch jeden besondern zwischen t_1 und t_2 liegenden Werth von t dagegen eine einzelne aus dem von den Curven AA_1, MM_1, BB_1 gebildeten Systeme bestimmt wird. Man kann sich demnach jetzt aus (1) und (2) hergeleitet denken

$$(3) \qquad x = \varphi_1(t, t) \qquad y = \varphi_2(t, t)$$

in der Weise, daß wenn man aus diesem Systeme die Variable t eliminirt, die Gleichung (1), dagegen durch Elimination von t die Gl. (2) zum Vorschein kommt. Für $t = 0$ aber hätte man das System

$$(4) \qquad \begin{aligned} x &= \varphi_1(t, 0) = f_1(t) \\ y &= \varphi_2(t, 0) = f_2(t) \end{aligned}$$

welches die Gleichung $y = f(x)$ der gesuchten Curve verträte. Hiernach sind die Differentialien dx, dy gleichbedeutend mit

$$d\varphi_1(t, 0) = f_1'(t)dt, \qquad d\varphi_2(t, 0) = f_2'(t)dt$$

während dagegen aus (3), indem man blos t um sein Differential dt zunehmen läßt und dann $t = 0$ setzt, die Variationen δx und δy entspringen, nämlich

$$\delta x = \left(\frac{d\varphi_1(t, t)}{dt}\right)_0 dt \qquad \delta y = \left(\frac{d\varphi_2(t, t)}{dt}\right)_0 dt$$

Sowohl δx als δy hätten wir demnach zu denken als Produkt einer Function der Independenten t mit dem Factor dt. Da aber die varii-

renden Curven, durch deren Betrachtung wir zu den Gleichungen (3) gelangt sind, ihrer Natur nach unbestimmt bleiben sollen, da also für Φ und Ψ keine bestimmten Functionen gewählt werden können, so sieht man, daß die Variationsquotienten $\delta x = \frac{d\varphi_1(t,\,\mathrm{t})}{dt}$ und $\delta y = \frac{d\varphi_2(t,\,\mathrm{t})}{dt}$ für $\mathrm{t} = 0$ sich als ganz willkührliche Functionen von t herausstellen. Und eben dieses gilt dann auch für die höheren Differentialquotienten $\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}, \frac{d^2\varphi_2}{dt^2}, \frac{d^3\varphi_1}{dt^3}, \ldots$ welche uns für $\mathrm{t} = 0$ die höheren Variationsquotienten $\delta^2 x, \delta^2 y, \delta^3 x, \ldots$ liefern werden.

Allerdings müßen die Functionen φ_1, φ_2 so beschaffen sein, daß sie für $\mathrm{t} = 0$ der bestimmt gedachten Gleichung $y = f(x)$ Genüge leisten, daß also, wenn man $\varphi_1(t,\,0) = \mathrm{f}_1(t)$ an die Stelle von x in die Function $f(x)$ einsetzt, die Gleichung $y = f[\varphi_1(t,\,0)]$ identisch werde mit der Gl. $y = \varphi_2(t,\,0) = \mathrm{f}_2(t)$; d. h. $\varphi_2(t,\,0)$ muß identisch mit $f[\varphi_1(t,\,0)]$ werden. Es steht deswegen die eine der Functionen φ_1, φ_2 zu der anderen in einer gewißen Abhängigkeit. Allein man braucht nur einen Blick auf §. 2 zu werfen, um sich sofort zu überzeugen, daß man unzählige Functionen $\varphi_2(t,\,\mathrm{t})$ bilden könne, welche für $\mathrm{t} = 0$ sich auf die eben gedachte bestimmte Function von t reduciren, und daß aus diesem Grunde die in Beziehung auf t gebildeten Derivirten von φ_1 und φ_2, sobald man nach ausgeführter Differentiation $\mathrm{t} = 0$ macht, sämmtlich als willkührliche Functionen von t aufzufaßen sind. (Vgl. §. 9 S. 22).

Nur dies eine steht in Betreff der Variationen δx, δy fest, daß wenn wir die aus der Gleichung der Gränzcurve L_1 abzuleitende Differentialgleichung durch

$$\partial_x \mathfrak{f}_1(x,\,y).dx + \partial_y \mathfrak{f}_1(x,\,y).dy = 0 \qquad (5)$$

vorstellen, für die Variationen der Coordinaten des Punkts A, nämlich $\delta\alpha$ und $\delta y_\alpha = \delta\beta$ die Bedingungsgleichung

$$\partial_x \mathfrak{f}_1(\alpha,\,\beta).\delta\alpha + \partial_y \mathfrak{f}_1(\alpha,\,\beta).\delta\beta = 0$$

Statt finde. Denn da das System der Gleichungen (3), sobald man darin $t = t_1$ annimmt und t variabel sein läßt, die Gl. $\mathfrak{f}_1(x,\,y) = 0$ vollkommen ersetzt, so werden auch die nach t genommenen Differentialien von φ_1 und φ_2 für jeden Werth von t, d. h. für jeden beliebigen Punkt A, A_1, $\mathrm{A}_2, \ldots$ der Gränzcurve L_1 in dem durch (5) vorgeschriebenen Verhältnisse zu einander stehen; dieses gilt also insbesondere auch für

$t = 0$. — Ebenso folgt in Betreff des Punkts B, daß die Differentialgleichung

$$\partial_x f_2 \, dx + \partial_y f_2 \, dy = 0$$

befriedigt wird, wenn man $x = \mathrm{OK} = \xi$, $y = \mathrm{KB} = f(\xi) = \eta$ und gleichzeitig $\delta\xi$, $\delta\eta$ an die Stelle von dx, dy setzt.

II) Nehmen wir aber an, um sogleich auch zu den höheren Variationen von x und y fortzuschreiten, die Curve A_1B_1 (Fig. 17) entspräche einem von Null sehr wenig verschiedenen jedoch endlichen Werthe von t, der wieder wie früher (§. 8 und §. 9) durch τ vorgestellt werden möge, so wird man aus (3) die zusammengehörigen Coordinaten OP_1 und P_1M_1 mittelst des Mac-Laurin'schen Satzes in die Reihen entwickeln

$$x + \nabla x = x + \left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)_0 . \tau + \left(\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}\right)_0 . \tfrac{1}{2}\tau^2 + \cdots$$

$$y + \nabla y = y + \left(\frac{d\varphi_2}{dt}\right)_0 . \tau + \left(\frac{d^2\varphi_2}{dt^2}\right)_0 . \tfrac{1}{2}\tau^2 + \cdots$$

welche im Folgenden durch

$$(6) \qquad x + \nabla x = x + \delta x . \tau + \delta^2 x . \tfrac{1}{2}\tau^2 + \cdots$$

$$(7) \qquad y + \nabla y = y + \delta y . \tau + \delta^2 y . \tfrac{1}{2}\tau^2 + \cdots$$

vorgestellt werden. Darin bedeuten der vorhin gemachten Bemerkung zu Folge δx, δy, $\delta^2 x$, $\delta^2 y$, ... beliebig annehmbare Functionen von t; dieselben dürfen jedoch, weil jedem bestimmten Punkte M der Curve AMB, d. h. jedem bestimmten t ein bestimmter Werth von x entspricht, auch als willkührliche Functionen von x aufgefaßt werden, oder von irgend einer anderen Variablen, welche man gerade als Independente der Rechnung zu Grunde legen will, z. B. des Bogens der Curve, oder eines Polarwinkels u. s. w.

III) Nach dieser ausführlichen Besprechung über δx und δy, so wie über ∇x und ∇y werden nun einige allgemeinere Andeutungen ohne Mühe verständlich sein.

Zunächst wird man sich das gleichzeitige Auftreten der drei Variationen δx, δy, δs bei Untersuchungen über krumme Flächen und doppelt gekrümmte Linien leicht erklären. Denn wenn es z. B. darauf ankommt, zwischen zwei gegebenen Gränzflächen L_1 und L_2 eine Curve im Raume ausfindig zu machen, welcher eine durch den Variationscalkul zu erforschende Eigenschaft zukommt, so wird man sich eine variirende Fläche

$$(8) \qquad \Psi(x, y, z, t) = 0$$

denken können, die den continuirlichen Uebergang von L_1 in L_2 vermittelt.

Zu jedem Punkt M der gesuchten Curve gehört dann ein partikulärer Werth von t, und unter dem Punkte M_1, welcher der entsprechende von M sein soll, wird man denjenigen Punkt zu verstehen haben, worin die Nachbarcurve A_1B_1 von der Fläche (8) geschnitten wird. Für diese variirende Nachbarcurve kann man sich nun ein System von zwei Gleichungen von der Form

$$y = \Phi(x, t) \qquad z = \Phi_1(x, t_1)$$

vorstellen. Dabei ist in dem Falle, daß zwischen y und z keine Abhängigkeit Statt finden soll, nicht allein die Function Φ_1 von Φ ganz unabhängig, sondern wir dürften auch noch das Differentialverhältnis $\frac{dt_1}{dt}$, wie bereits in §. 21 erinnert worden, gleich einer willkührlichen Function von x setzen, oder auch, weil gegenwärtig zu jedem bestimmten x ein bestimmtes t gehört, t_1 gleich dem Produkt von t in eine willkührliche Function von t denken. Zu Folge dieser Bemerkung über t_1 und wegen der Willkührlichkeit von Φ_1 reicht es deshalb hin, daß wir

$$(9) \qquad y = \Phi(x, t) \qquad z = \Phi_1(x, t)$$

setzen. Die drei Gleichungen (9) und (8) zwischen den fünf Variablen x, y, z, t, t bedeuten aber gerade so viel, wie wenn man sich x, y, z als unbestimmte Functionen von t und t vorschweben läßt, etwa

$$(10) \qquad \begin{aligned} x &= \varphi_1(t, t) \\ y &= \varphi_2(t, t) \\ z &= \varphi_3(t, t) \end{aligned}$$

die nur so beschaffen sein müßen, daß sobald man $t = 0$ setzt, das System (10) einerlei wird mit den Gleichungen der ursprünglich gedachten, in den Zustand des Variirens versetzten Curve. Die Differentialien dx, dy, dz beziehen sich dann wieder auf die Aenderung des dem Punkte M entsprechenden Werths von t; die Variationsquotienten δx, δy, δz, $\delta^2 x$, $\delta^2 y$, $\delta^2 z$, ... dagegen entspringen aus (10), indem man in den nach t genommenen Differentialquotienten der ersten, zweiten, ꝛc. Ordnung $t = 0$ macht und sind zu denken als willkührliche Functionen von t oder von sonst einer Variablen, die man als Independente wählen mag. Alsdann sind

$$(11) \qquad \begin{aligned} x + \nu x &= x + \delta x.\tau + \delta^2 x.\tfrac{1}{2}\tau^2 + \cdots \\ y + \nu y &= y + \delta y.\tau + \delta^2 y.\tfrac{1}{2}\tau^2 + \cdots \\ z + \nu z &= z + \delta z.\tau + \delta^2 z.\tfrac{1}{2}\tau^2 + \cdots \end{aligned}$$

die Coordinaten eines Punkts M_1, welcher auf der zu $t = \tau$ gehörenden

Curve $A_1M_1B_1$ der entsprechende von M ist. Und für die auf den Gränzflächen L_1, L_2 gelegenen Endpunkte A, B der verlangten Curve werden zwischen ∇x, ∇y, ∇s diejenigen Relationen Statt finden, welche aus den Gleichungen dieser Gränzflächen sich ergeben, wenn man $x + \nabla x$, $y + \nabla y$, $s + \nabla s$ an die Stelle von x, y, s setzt.

Soll dagegen die in Untersuchung stehende Curve $y = f(x)$, $s = f(x)$ auf einer gegebenen Fläche

$$\Theta(x, y, s) = 0 \qquad (12)$$

liegen (§. 22 I) und §. 45 III) und werden ebenfalls auf dieser Fläche zwei Gränzcurven gegeben; dann müßen freilich die drei Functionen φ_1, φ_2, φ_3 in einer solchen Beziehung zu einander stehen, daß wenn man sie in (12) an die Stelle von x, y, s einsetzt, die Gleichung identisch würde, weil sie für jedes t und jedes τ bestehen soll. Es müßen also auch, wenn man die in (11) für $x + \nabla x$, $y + \nabla y$, $s + \nabla s$ aufgestellten Ausdrücke in die Gl. (12) für x, y, s substituirt und nach Potenzen von τ entwickelt, die Coefficienten von τ, τ^2, ... einzeln gleich Null sein.

§. 55.

Indem wir uns nun anschicken, in Zukunft bei Behandlung der Ausdrücke δU resp. δV sämmtlichen Variablen x, y, s, ... unmittelbare Variationen zuzuschreiben, drängt sich wohl von selbst die Bemerkung auf, daß wir dieses auch schon in den vorhergehenden Capiteln hätten thun können. In der That haben andere Schriftsteller gleich von Anfang, wenn in der zu variirenden Function U oder V blos x und y vorkommen, beide Variationen δx, δy in den Calkul eingeführt; es schien uns indessen rathsam, die Heranziehung der Variationen der Independenten für so lange zu verschieben, als sie entbehrt werden konnten. Wir werden aber jetzt zeigen, wie sich die zur Auflösung der im zweiten und dritten Capitel behandelten Probleme dienlichen Differentialgleichungen gestalten, wenn man von der dem vorigen Paragraphen zu Grunde liegenden Anschauung ausgeht.

I) Nach den bekannten Formeln für die Vertauschung der Independenten haben wir, indem wir x und y als (gesuchte) Functionen von t auffaßen, etwa wie bei (4) im vor. §.

$$x = f_1(t) \qquad y = f_2(t)$$

und t als Independente behandeln, die Ausdrücke

$$\frac{\partial y}{\partial x} \text{ an die Stelle von } p$$

$$(1) \qquad \frac{\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x}{\partial x^3} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad q$$

u. s. w. u. s. w.

zu setzen, wobei wir unter ∂x, $\partial^2 x, \ldots$ ∂y, $\partial^2 y, \ldots$ die Derivirten $f_1'(t)$, $f_1''(t), \ldots$ $f_2'(t)$, $f_2''(t), \ldots$ denken. Durch Einsetzen dieser Ausdrücke erhält man, je nachdem man es zu thun hat mit einer der zum zweiten Capitel §. 12 u. fgg. gehörigen Aufgaben, oder mit einem der im dritten Capitel behandelten Integrale,

$$(2) \qquad U = F_1(x, \partial x, \partial^2 x, \ldots y, \partial y, \partial^2 y, \ldots)$$

resp. $$(3) \qquad U = \int F_1(x, \partial x, \partial^2 x, \ldots y, \partial y, \partial^2 y, \ldots)dt$$

und es wird nach denjenigen für x und y zu setzenden Functionen von t gefragt, welche dieses U zu einem Maximum oder Minimum machen.

Die erste dieser beiden Aufgaben, wenn nämlich das gegebene U ein endlicher Ausdruck $F(x, y, p, q, \ldots)$ war, ist jetzt nach den in §. 21 entwickelten Vorschriften zu behandeln, indem t dieselbe Rolle spielt wie dort die Independente x, während die dort mit y und s bezeichneten Dependenten gegenwärtig x und y sind. Nehmen wir also z. B. die zweite in §. 15 behandelte Aufgabe vor. Das daselbst gegebene

$$U = 2\left(x - \frac{p}{q}[1+p^2]\right)^2 + 2\left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)^2 - 2\beta\left(x - \frac{p}{q}[1+p^2]\right) + \beta^2$$

verwandelt sich jetzt in

$$U = 2\left(x - \frac{\partial y(\partial y^2 + \partial x^2)}{\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x}\right)^2 + 2\left(y + \frac{\partial y^2\partial x + \partial x^3}{\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x}\right)^2$$

$$(\oplus) \qquad - 2\beta\left(x - \frac{\partial y(\partial y^2 + \partial x^2)}{\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x}\right) + \beta^2$$

Man erhält also, indem man dem §. 21 zu Folge die partiellen Differentialquotienten von U nach x, y, ∂x, ∂y, $\partial^2 x$, $\partial^2 y$ sämmtlich gleich Null setzt, strenggenommen ein System von sechs Gleichungen, welches sich jedoch auf zwei von einander verschiedene reducirt. Zunächst hat man nämlich

$$(\odot) \qquad \begin{aligned} \frac{dU}{dx} &= 4\left(x - \frac{\partial y(\partial y^2 + \partial x^2)}{\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x}\right) - 2\beta = 0 \\ \frac{dU}{dy} &= 4\left(y + \frac{\partial x(\partial y^2 + \partial x^2)}{\partial x\partial^2 y - \partial y\partial^2 x}\right) = 0 \end{aligned}$$

und wenn man dieses schon bei der Bildung der übrigen vier Differentialquotienten $\frac{dU}{d.\partial x}$, $\frac{dU}{d.\partial y}$, $\frac{dU}{d.\partial^2 x}$, $\frac{dU}{d.\partial^2 y}$ berücksichtigt, so findet man, daß dieselben dadurch von selbst verschwinden. Man hat daher x und y aus den vorstehenden zwei Gleichungen (○) zu bestimmen. Durch Elimination der Größe $\frac{\partial y^2 + \partial x^2}{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}$ ergiebt sich aber sogleich

$$4(x + y\frac{\partial y}{\partial x}) - 2\beta = 0$$

oder $2x + 2yp - \beta = 0$, also genau dieselbe Gleichung, welche auf S. 52 mit (6) numerirt und durch deren Integration das vorgelegte Problem aufgelöst worden ist.

II) Ungeachtet dieser Uebereinstimmung der Resultate wird man jedoch zwischen der hier dargelegten Auflösungsmethode und der früher angewendeten einen wesentlichen Unterschied nicht übersehen, welcher darin liegt, daß man gegenwärtig die beiden Coordinaten x und y so zu bestimmen suchte, daß U ein Maximum oder Minimum würde, — daß man also dem ersten Anscheine nach gerade doppelt so viele Einzelgleichungen erhielte als in §. 13 II). Dieser Umstand könnte weniger auffallen, wenn, wie man es sich hatte vorschweben laßen, x und y wirklich als Functionen von t gefunden würden, weil ein System von zwei Gleichungen zwischen x, y, t gleichbedeutend mit einer Gleichung zwischen x und y ist. Allein die sämmtlichen Gleichungen

$$(4.\alpha) \qquad \frac{dF_1}{dx} = 0 \qquad \frac{dF_1}{d.\partial x} = 0 \qquad \frac{dF_1}{d.\partial^2 x} = 0 \qquad \ldots$$

$$(4.\beta) \qquad \frac{dF_1}{dy} = 0 \qquad \frac{dF_1}{d.\partial y} = 0 \qquad \frac{dF_1}{d.\partial^2 y} = 0 \qquad \ldots$$

enthalten nicht allein kein explicites t, sondern es bleibt sogar, wenn man für ∂x, ∂y, $\partial^2 x$, ... wieder $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, ... einführt, nicht einmal das Differential dt darin übrig. Denn wenn wir nach den Potenzen des Factors $\frac{1}{dt}$ zählend ∂x, ∂y als Größen erster Dimension, $\partial^2 x$, $\partial^2 y$ als Größen zweiter Dimension u. s. w. auffaßen, und bedenken, daß der Ausdruck F_1 vermöge seines Ursprungs aus U den Factor $\frac{1}{dt}$ gar nicht enthält, also von der Oten Dimension ist, so leuchtet ein, daß überhaupt

sowohl $\frac{dF_1}{d.\partial^n x}$ als $\frac{dF_1}{d.\partial^n y}$ zur $(-n)$ten Dimension gehören, d. h. Ausdrücke sind, an deren sämmtlichen Einzelgliedern der Factor dt^n haftet. Dieser gemeinschaftliche Factor ist aber aus jeder der obigen Gleichungen (4) durch Division sofort zu beseitigen. — Um die Coexistenz der Gleichungen (4) zu erklären, beachte man daher, daß die Gruppe $\frac{dF_1}{d.\partial x} = 0$, $\frac{dF_1}{d.\partial^2 x} = 0$ ꝛc. mit der Gruppe (4.β) zusammen steht und fällt. Denn insofern wir unter $p, q, r, \ldots$ die Ausdrücke (1) verstehen, erhalten wir offenbar

$$\frac{dF_1}{d.\partial y} = \partial_p U \frac{dp}{d.\partial y} + \partial_q U \frac{dq}{d.\partial y} + \partial_r U \frac{dr}{d.\partial y} + \cdots$$
$$\frac{dF_1}{d.\partial^2 y} = \partial_q U \frac{dq}{d.\partial^2 y} + \partial_r U \frac{dr}{d.\partial^2 y} + \cdots$$
$$\frac{dF_1}{d.\partial^3 y} = \partial_r U \frac{dr}{d.\partial^3 y} + \cdots$$

u. s. w.

Darin ist, wie man aus (1) ersieht,

$$\frac{dp}{d.\partial y} = \frac{1}{\partial x}, \qquad \frac{dq}{d.\partial^2 y} = \frac{1}{\partial x^2}, \qquad \frac{dr}{d.\partial^3 y} = \frac{1}{\partial x^3}, \quad \cdots$$

man wird also, wenn im ursprünglichen U der höchste Differentialquotient von y etwa r ist, aus der Bedingung $\frac{dF_1}{d.\partial^3 y} = \partial_r U \frac{dr}{d.\partial^3 y} = 0$ sogleich den Schluß ziehen, daß $\partial_r U = 0$ zu setzen sei; hierauf aus der Bedingungsgleichung $\frac{dF_1}{d.\partial^2 y} = \partial_q U \frac{dq}{d.\partial^2 y} = 0$ den Schluß, daß $\partial_q U = 0$ sei, endlich aus $\frac{dF_1}{d.\partial y} = \partial_p U \frac{dp}{d.\partial y} = 0$ den Schluß, daß auch $\partial_p U = 0$ sein müße. Durch die Gleichungen

$$(5) \qquad \partial_p U = 0, \qquad \partial_q U = 0, \qquad \partial_r U = 0, \quad \cdots$$

werden aber zugleich auch die Ausdrücke

$$\frac{dF_1}{d.\partial x} = \partial_p U \frac{dp}{d.\partial x} + \partial_q U \frac{dq}{d.\partial x} + \cdots, \qquad \frac{dF_1}{d.\partial^2 x} = \partial_q U \frac{dq}{d.\partial^2 x} + \cdots$$

u. s. w. zum Verschwinden gebracht.

Zu den vorstehenden Gleichungen (5) treten jetzt noch folgende zwei

$$(6) \qquad \partial_s U = 0 \qquad \partial_t U = 0$$

man hat also auch hier wieder genau das in §. 13 II) aufgestellte und mit (2) numerirte System von Bedingungsgleichungen vor sich, nur vermehrt um das einzige neue Element $\partial_x U = 0$.

In Rücksicht auf den Einfluß, welchen diese neu hinzugetretene Gleichung $\partial_x U = 0$ ausübt, sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Angenommen man habe mittelst des Systems der übrigen Gleichungen für $y, p, q, \ldots$ bestimmte Functionen $f(x), f'(x), f''(x), \ldots$ hergeleitet und diese in $\partial_x U$ eingesetzt, so wird die Gl. $\partial_x U = 0$ entweder identisch, oder ihr Bestehen erfordert, daß man für x einen bestimmten Werth annehme. Im ersten Fall bleibt x willkührlich; im andern Fall dagegen hat man die vorgelegte Aufgabe in dem Sinne gelöst, daß nicht nur eine Curve gefunden wurde, welche im Vergleich mit Nachbarcurven den gegebenen Ausdruck U zu einem Maximum oder Minimum macht, sondern daß zugleich auf dieser Curve derjenige Punkt bestimmt worden ist, durch dessen Coordinaten U einen größern beziehungsw. kleinern Werth erhält als für die benachbarten Punkte jener Curve.

Als Beispiel zum ersten Falle kann uns die vorhin benutzte Aufgabe dienen. Denn aus der Gl. $y^2 + (x - \frac{1}{2}\beta)^2 = A^2$ folgt, wie bereits am Schluße von §. 15 bemerkt worden,

$$p = -\frac{x - \frac{1}{2}\beta}{y}, \quad q = -\frac{1 + p^2}{y}, \quad \text{also} \quad \frac{1 + p^2}{q} = -y$$

Hierdurch wird nicht allein der oben bei (O) aufgestellte Ausdruck für $\partial_y U$, welcher gleichbedeutend mit $4\left(y + \frac{1+p^2}{q}\right)$ ist, identisch Null, sondern der Ausdruck für $\partial_x U$, nämlich

$$4\left(x - \frac{p(1+p^2)}{q}\right) - 2\beta$$

verwandelt sich zu gleicher Zeit in $4 \cdot \frac{1}{2}\beta - 2\beta$, verschwindet also ebenfalls für jeden Werth von x. — Die Aufgaben dieser Gattung besitzen die Eigenthümlichkeit, daß das totale Differential von U, nämlich

$$\partial_x U\, dx + \partial_y U\, dy + \partial_p U\, dp + \partial_q U\, dq + \cdots$$

zu Folge (5) und (6) für jeden Werth von x gleich Null ist, daß also das in Untersuchung stehende Maximum oder Minimum von U an allen Punkten der verlangten Curve einerlei Werth besitzt. So hatten wir in der hier besprochenen Aufgabe bereits früher (S. 53) den constanten Werth $U_0 = \frac{1}{2}\overline{AB}^2$ für das fragliche Minimum gefunden, und

mit der unmittelbar vorhergehenden Aufgabe desselben §. 15 hatte es eine ähnliche Bewandtnis.

Ein Beispiel zum zweiten Fall würden wir vor uns haben, wenn wir, die vorige Aufgabe nur ein wenig modificirend, die Forderung stellten, es solle eine durch den festen Punkt **A** laufende Curve von der Beschaffenheit gefunden werden, daß wenn man auf derselben einen Punkt **M** beliebig annimmt, den zugehörigen Krümmungsmittelpunkt **O** bestimmt, denselben mit den zwei festen Punkten **A**, **B** geradlinig verbindet und auch das Perpendikel **MP** auf die Gerade **AB** fällt, die Summe

$$U = AO^2 + BO^2 + BP^2$$

kleiner sei als für eine andere Curve, — zugleich solle aber auf der gesuchten Curve derjenige Punkt **M** bestimmt werden, für welchen **U** am kleinsten ausfällt. Bei Anwendung des früher gebrauchten Coordinatensystems muß man, um den Ausdruck für **U** zu bilden, zu der oben bei (⊕) hingeschriebenen Summe jetzt noch den Bestandtheil $(\beta - x)^2$ hinzufügen. Da hierdurch an den Formeln für $\partial_y U$, $\partial_p U$, $\partial_q U$ nichts geändert wird und da diese durch die Kreisgleichung

$$y^2 + (x - \tfrac{1}{2}\beta)^2 = A^2$$

zum Verschwinden gebracht werden, so ist hiermit die verlangte Curve schon gefunden, wobei die Constante A vermöge der Forderung, daß die Curve durch den gegebenen Punkt **A** laufen soll, ebenfalls bestimmt ist. Der Differentialquotient $\partial_x U$ dagegen reducirt sich gegenwärtig auf $2(x - \beta)$ und um die Bedingung $\partial_x U = 0$ zu befriedigen, muß man $x = \beta$ nehmen d. h. **P** in den Punkt **B** rücken. Daß auf diese Weise **U** wirklich den möglich kleinsten Werth erhalte, ist leicht zu sehen.

In den besondern Fällen, wenn **U** nur x und y, kein p, q, ... enthält, hat man zur Bestimmung von x und y die beiden Gleichungen (6); sowohl die Bedeutung der Aufgabe als ihre Auflösung ist dann dieselbe, wie die nach der bekannten Regel der Differentialrechnung vorzunehmende Bestimmung des Maximums oder Minimums einer Function zweier independenter Variablen x und y.

III) Was ferner die Bestimmung des Maximums oder Minimums des Integrals (3) betrifft, so ist diese Aufgabe jetzt genau diejenige geworden, deren Auflösung uns in §. 45 I) beschäftigte, indem jetzt x, y, t, dt nach der Reihe dieselbe Bedeutung haben, wie dort y, s, x, dx. Man wird auf der Stelle das dort mit (2) numerirte System umschreiben in

$$(7) \qquad \partial_1 F_1 - \frac{1}{dt} d \frac{dF_1}{d.\partial x} + \frac{1}{dt^2} d^2 \frac{dF_1}{d.\partial^2 x} - \cdots = 0$$

$$(8) \qquad \partial_1 F_1 - \frac{1}{dt} d \frac{dF_1}{d.\partial y} + \frac{1}{dt^2} d^2 \frac{dF_1}{d.\partial^2 y} - \cdots = 0$$

Die vorhin gemachte Erinnerung über das Fehlen von t und dt ist aber hier zu wiederholen. Auch die beiden vorstehenden Gleichungen enthalten nur x, y, ∂x, ∂y, $\partial^2 x$, ꝛc. ohne t und es bleibt darin auch dann, wenn man statt ∂x, ∂y, $\partial^2 x$, ... nach der Reihe wieder die Quotienten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, ... einsetzt, das Differential dt nirgends übrig. Denn aus dem Ursprung der Function F_1, nämlich

$$F_1 = V\partial x = F\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial x^3}, \ldots\right)\partial x$$

folgt, wie man leicht ersehen wird, daß wenn wir wie vorhin nach den in ∂x, ∂y, $\partial^2 x$, ... enthaltenen Potenzen von $\frac{1}{dt}$ zählen, F_1 so wie die partiellen Differentialquotienten $\partial_1 F_1$, $\partial_y F_1$ zur ersten Dimension dagegen $\frac{dF_1}{d.\partial^n x}$, $\frac{dF_1}{d.\partial^n y}$ zur $(1-n)$ten, also $\frac{1}{dt^n} d^n \frac{dF_1}{d.\partial^n x}$, $\frac{1}{dt^n} d^n \frac{dF_1}{d.\partial^n y}$ wieder zur ersten Dimension gehören; d. h. alle einzelnen Glieder der linken Theile der Gleichungen (7) und (8) werden nach Ausführung der angezeigten Substitutionen nur die erste Potenz von $\frac{1}{dt}$ als Factor enthalten, welcher sofort durch Division der ganzen Gleichung zu beseitigen ist. Da hiernach blos x, y und die Differentialien dx, dy, d^2x, d^2y, d^3x, ... in (7) und (8) vorkommen, so kann man zum Zwecke der Integration nach Belieben das eine oder andere Differential constant setzen, sei es nun dx oder dy oder das Differential des Bogens oder dgl. mehr, ohne daß man wegen dieser Vertauschung der Indepenbenten irgend etwas an den gedachten Gleichungen zu ändern brauchte. Behandelt man dx als das constante Differential, nimmt also $d^2x = 0$, $d^3x = 0$ ꝛc., so wird (8) mit unserer vielgebrauchten Gleichung (6) in §. 25 identisch. Denn die nach ∂y, $\partial^2 y$, ... genommenen partiellen Differentialquotienten von F_1 sind, sobald man darin $\partial^2 x = 0$ macht, dieselben als wenn man schon vor der Differentiation $\partial^2 x = 0$ gesetzt hätte, sind also einerlei mit den nach ∂y, $\partial^2 y$, ... genommenen Differentialquotienten von

$F\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots\right)\partial x$, wobei F das urſprüngliche V vorſtellt. Man erhält alſo

$$\frac{dF_1}{dy} = \partial_y V.\partial x, \quad \frac{dF_1}{d.\partial y} = \frac{1}{\partial x}\partial_p V.\partial x, \quad \frac{dF_1}{d.\partial^2 y} = \frac{1}{\partial x^2}\partial_q V.\partial x, \quad \text{ꝛc.}$$

Setzt man aber dieſe Werthe in (8) ein, läßt den allen Gliedern gemeinſchaftlichen Factor ∂x weg und bemerkt, daß für $\frac{1}{\partial x^n dt^n}$ wieder $\frac{1}{\partial x^n}$ zu ſetzen ſei, ſo hat man wirklich die erwähnte Gleichung vor ſich. — Was hingegen das Zuſammenbeſtehen der Gleichungen (7) und (8) anbelangt, ſo wird man auch hier im Voraus erwarten, daß ſich dieſelben in Einklang müßen bringen laßen, daß alſo die Gl. (7) nach geeigneter Transformation eine Wiederholung von (8) liefern werde.

In der That, nehmen wir an, der gegebene Ausdruck V enthalte außer x und y noch p und q, ſo daß

$$F_1 = V\partial x = F(x, y, p, q)\partial x$$

iſt, ſo folgt daraus

$$\frac{dF_1}{dx} = \partial_x V\,\partial x \qquad \frac{dF_1}{dy} = \partial_y V\,\partial x$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dF_1}{d.\partial x} &= V + \partial_p V\frac{dp}{d.\partial x}\partial x\\ &\quad + \partial_q V\frac{dq}{d.\partial x}\partial x\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned}\frac{dF_1}{d.\partial y} &= \partial_p V\frac{dp}{d.\partial y}\partial x\\ &\quad + \partial_q V\frac{dq}{d.\partial y}\partial x\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{dF_1}{d.\partial^2 x} = \partial_q V\frac{dq}{d.\partial^2 x}\partial x \qquad \frac{dF_1}{d.\partial^2 y} = \partial_q V\frac{dq}{d.\partial^2 y}\partial x$$

Subſtituiren wir hierin die aus (1) herzuleitenden Werthe

$$\frac{dp}{d.\partial x} = -\frac{1}{\partial x}.p, \quad \frac{dq}{d.\partial x} = \frac{\partial^2 x}{\partial x^3}.p - \frac{2q}{\partial x}, \quad \frac{dq}{d.\partial^2 x} = -\frac{1}{\partial x^2}.p$$

$$\frac{dp}{d.\partial y} = +\frac{1}{\partial x} \qquad \frac{dq}{d.\partial y} = -\frac{\partial^2 x}{\partial x^3} \qquad \frac{dq}{d.\partial^2 y} = \frac{1}{\partial x^2}$$

und bezeichnen die linken Theile der Gleichungen (7) und (8) durch X und Y, ſo wird

$$X = \partial_x V\,\partial x - \partial V + \partial[\partial_q V.2q] + \partial[\partial_p V.p] - \partial\left[\partial_q V\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}p\right] - \partial^2\left[\partial_q V.\frac{p}{\partial x}\right]$$

$$Y = \partial_y V\,\partial x - \partial[\partial_p V] + \partial\left[\partial_q V\frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\right] + \partial^2\left[\partial_q V.\frac{1}{\partial x}\right]$$

Wenn man nun die in X angezeigten Differentiationen ausführt und für ∂V seinen Werth $\partial_x V \partial x + \partial_y V \partial y + \partial_p V \partial p + \partial_q V \partial q$ setzt, so verwandelt sich X in

$$X = -Yp + \partial_q V \partial q + \partial \partial_q V . 2q - \partial_q V \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} \partial p - 2\partial\Big[\partial_q V . \frac{1}{\partial x}\Big]\partial p - \partial_q V \frac{\partial^2 p}{\partial x}$$

Wegen $\frac{\partial^2 p}{\partial x} = \frac{\partial(q\partial x)}{\partial x} = \partial q + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial x} = \partial q - \partial\big(\frac{1}{\partial x}\big)\partial p$ reducirt sich aber die dem ersten Gliede $-Yp$ nachfolgende Summe auf

$$2\Big(\partial\partial_q V . \frac{1}{\partial x} + \partial_q V \partial\big(\frac{1}{\partial x}\big) - \partial\Big[\partial_q V . \frac{1}{\partial x}\Big]\Big)\partial p$$

was identisch Null ist. Mithin ist

$$X = -Yp \qquad (9)$$

Es stimmt also wirklich die Gleichung $X = 0$ mit der Gl. $Y = 0$ überein. Wir werden die hier entdeckte Relation (9) demnächst von einem andern Standpunkte ausgehend wieder finden (§. 58 V), machen jedoch noch darauf aufmerksam, daß der Factor $-p$, mit welchem Y zu multipliciren ist, damit X zum Vorschein komme, manchmal bewirken kann, daß die eine der Gleichungen (7) und (8) unmittelbar integrabel ist, während diese Eigenschaft der anderen abgeht. Insbesondere wenn die Variable x in V fehlt, so fällt auf der linken Seite in (7) das erste Glied $\partial_x F_1$ weg und die folgenden Glieder sind lauter Differentialquotienten, daher ist die Gl. $X = 0$ unmittelbar integrabel, die Gl. $Y = 0$ aber erst nachdem man sie mit p multiplicirt hat. Diesen integrirenden Factor p haben wir daher sowohl bei der allgemeinen Auflösung dieses Falls in §. 30 I) (Seite 113) als auch in dem dazu gehörigen Beispiele §. 53 I) benutzt.

IV) Von den Gleichungen (7) und (8) würde auch die Bestimmung des Maximums oder Minimums von $\int V dx$ in den Fällen abhängen, wenn V ein aus x, y, dx, dy, d^2x, d^2y, ... gebildeter Ausdruck ist, der sich gar nicht unter die Form $V = F(x, y, p, q, \ldots)$ stellen läßt; z. B. wenn $V = \frac{yd^2x + xd^2y}{dx^2}$ oder $V = \frac{dyd^2x + dxd^2y}{dx^3}$ u. dgl. wäre. — Es versteht sich ferner von selbst, daß diese Gleichungen (7) und (8) auch für die Probleme über relatives Maximum oder Minimum zu benutzen seien, wobei man an die Stelle von V eine Summe $V + \lambda W$ (§. 39) zu setzen hat.

§. 56.

Stellen wir uns nun, um zunächst zu den allgemeinen Betrachtungen des §. 54 zurückzukehren, unter **M** den Punkt x, y der variirten Curve **AMB** (**Fig. 17**) und unter $\mathbf{M}_1$ den entsprechenden, auf der Nachbarcurve $\mathbf{A}_1\mathbf{M}_1\mathbf{B}_1$ liegenden Punkt $x + \varDelta x, y + \varDelta y$ vor, so wird in Beziehung auf das unendliche Abnehmen von $\mathbf{PP}_1 = \varDelta x$, so daß wir statt τ das Differential dt denken, und wenn $\mathbf{Mq} \parallel \mathbf{PP}_1$ gezogen wird, $\mathbf{qM}_1$ die Variation δy angeben. In den vorhergehenden Capiteln dagegen war die Variation von y so viel als $\mathbf{M}\tau$. Wenn wir uns wieder, wie im Anfange von §. 54, für das System der Curven **AB**, $\mathbf{A}_1\mathbf{B}_1$, $\mathbf{A}_2\mathbf{B}_2, \ldots$ eine Gleichung zwischen x, y, t, etwa

$$(1) \qquad y = \Phi(x, t)$$

denken, so wird die Variation $\mathbf{M}\tau$ nach der Formel $\left[\frac{d\Phi(x,t)}{dt}\right]_0 dt$ erhalten werden, welche früher in §. 2 u. fgg. durch $\delta y = \Omega(x)dt$ vorgestellt worden ist. Ferner würde die Ordinate $\mathbf{P}_1\mu$ aus (1) dadurch zu berechnen sein, daß man $x + \delta x$ an die Stelle von x setzt, während $t = 0$ bleibt, die Ordinate $\mathbf{P}_1\mathbf{M}_1$ aber findet man, wenn man in (1) gleichzeitig $x + \delta x$, $t + dt$ an die Stelle von x, t setzt und dann $t = 0$ macht. Auf diese Weise ergiebt sich

$$\mathbf{P}_1\mathbf{M}_1 = \Phi(x, 0) + \frac{d\Phi(x,0)}{dx}\delta x + \left[\frac{d\Phi(x,t)}{dt}\right]_0 dt$$

oder wenn wir berücksichtigen, daß $\Phi(x, 0) = f(x)$ sein soll, und für $\left[\frac{d\Phi(x,t)}{dt}\right]_0$ wieder $\Omega(x)$ schreiben,

$$\mathbf{P}_1\mathbf{M}_1 - \mathbf{PM} = \mathbf{qM}_1 = \frac{df(x)}{dx}\delta x + \Omega(x)dt$$

Zu Folge dieser Formel ist diejenige Größe, welche wir auf unserm gegenwärtigen Standpunkt unter der Variation δy verstehen, aus zwei Summanden zusammengesetzt, von welchen der eine, nämlich $\Omega(x)dt$, übereinstimmt mit der in den vorhergehenden vier Capiteln durch δy vorgestellten Variation, während der andere durch $f'(x)\delta x$ oder $\frac{dy}{dx}\delta x$ oder $p\delta x$ bezeichnet werden kann. Es mag zum Behufe größerer Präcision und um möglichen Verwechselungen zu begegnen nützlich erscheinen, diese zweierlei

Variationen sowohl in der Benennung als auch in der Bezeichnung zu unterscheiden. Von Lagrange und den nach ihm folgenden Schriftstellern wird ein besonderer Kunstausdruck nicht gebraucht; in der früheren Arbeit von Sträuch, welche wir in §. 5 erwähnt haben, findet man*) die Benennungen „zusammengesetzte" Variationen im Gegensatze zu „einfachen" vorgeschlagen, dagegen in dem neuern Werke desselben Autors werden dafür die Benennungen „gemischte" Variationen im Gegensatze zu „reinen" substituirt.**) Nehmen wir diese letztere Nomenclatur an, so haben wir diejenigen Aenderungen, welche entstehen, wenn nicht blos die Form der Function (beziehgsw. die Werthe der darin vorkommenden Parameter), sondern gleichzeitig die Werthe der zu Grunde liegenden independenten Variablen geändert werden, gemischte Variationen zu nennen, während dagegen die in Cap. I — IV gebrauchten zur Unterscheidung reine Variationen heißen sollen. (Vgl. §. 2 am Schluß.) Was ferner die Bezeichnung anbelangt, so könnte man in der Wahl schwanken, ob man da wo die Variationen beider Arten in einer Entwickelung vorkommen, die gemischten mit einem neuen Zeichen und die reinen wie früher durch δ bezeichnen solle oder umgekehrt***). Wir glauben dem letztern Principe den Vorzug geben zu müßen, und werden im Folgenden die reinen Variationen durch $({}_\delta)$ anzeigen.

Die gefundene Relation wird daher in den Zeichen

$$\delta y = ({}_\delta)y + p\delta x \qquad (2)$$

geschrieben werden. Und wenn man durch das als Factor an δy, δx, $({}_\delta)y$ haftende Differential des Variationsarguments dividirt, so entsteht

$$\delta^k y = ({}_\delta{}^k)y + p\delta^k x \qquad (3)$$

Dieser Ausdruck für $\delta^k y$ kann also in der Formel für ∇y (§. 54 Gl. (7)) als Coefficient von τ eingesetzt werden. Die Coefficienten der folgenden, mit den Potenzen τ^2, τ^3, ... behafteten Glieder von ∇y werden aber auf folgende Weise sich durch die reinen Variationsquotienten $({}_\delta{}^k)y$, $({}_\delta{}^k)^2 y$, $({}_\delta{}^k)^3 y$, .. in Verbindung mit den in ∇x enthaltenen und in §. 54 I) erklärten Variationsquotienten $\delta^k x$, $\delta^{k2} x$, ... ausdrücken laßen. Nach dem Taylor'schen Satze erhält man aus (1), indem man x in $x + \nabla x$ und t von $t = 0$ in $t = \tau$ übergehen läßt, sofort

*) Grunert's Archiv Th. III p. 122.

**) Strauch Var.-Calc. Th. I p. 72 und p. 114.

***) Näheres hierüber in der Vorrede.

$$y + \nabla y = \Phi(x, 0) + \frac{d\Phi}{dx}\cdot\nabla x + \frac{d^2\Phi}{dx^2}\cdot\tfrac{1}{2}\nabla x^2 + \cdot\cdot$$
$$+ \frac{d\Phi}{dt}\cdot\tau \quad + \frac{d^2\Phi}{dx\,dt}\cdot\nabla x.\tau + \cdot\cdot$$
$$+ \frac{d^2\Phi}{dt^2}\cdot\tfrac{1}{2}\tau^2 \quad + \cdot\cdot$$

Da man in den angezeigten Differentialquotienten überall $t = 0$ gesetzt denken muß und da $\Phi(x, 0)$ die gesuchte Function $f(x)$ sein soll, so ist vorstehende Gleichung einerlei mit

$$y + \nabla y = f(x) + f'(x)\,\nabla x + f''(x)\cdot\tfrac{1}{2}\nabla x^2 + \cdot\cdot$$
$$+ (\delta)y.\tau \quad + (\delta)p.\nabla x.\tau \quad + \cdot\cdot$$
$$+ (\delta)^2 y.\tfrac{1}{2}\tau^2 \quad + \cdot\cdot$$

Führt man aber hierin für ∇x die in §. 54 aufgestellte Reihe (6). ein, und faßt das entwickelte Aggregat nach den Potenzen von τ zusammen, so findet man

$$\nabla y = \quad (p\delta x + (\delta)y).\tau$$
$$+ (p\delta^2 x + q\delta x^2 + 2(\delta)p\delta x + (\delta)^2 y).\tfrac{1}{2}\tau^2 + \cdot\cdot$$

Noch bequemer vielleicht gelangt man zu demselben Ergebnisse auf folgendem Wege. Man setze in $y = \Phi(x, t)$ für x in Gedanken den Ausdruck $\varphi_1(t, t)$ ein, wodurch man also in der Bezeichnung des §. 54 I) erhalten würde $y = \varphi_2(t, t)$, und bilde hierauf die Differentialien von y zur ersten, zweiten, ꝛc. Ordnung in Beziehung auf die Variable t, nämlich

$$\delta y = \left(\frac{d\Phi}{dt} + \frac{d\Phi}{dx}\frac{dx}{dt}\right)dt$$
$$\delta^2 y = \left(\frac{d^2\Phi}{dt^2} + 2\frac{d^2\Phi}{dx\,dt}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2\Phi}{dx^2}\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \frac{d\Phi}{dx}\frac{d^2x}{dt^2}\right)dt^2$$

u. s. w., mache hierin $t = 0$, nachdem man durch dt, dt^2, .. dividirt hat, und vergegenwärtige sich die Bedeutung von $\Phi(x, 0)$ so wie von $(\delta)y$, $(\delta)^2 y$, δx, $\delta^2 x$, .. Dann hat man sogleich

$$(4) \qquad \delta y = (\delta)y + p\delta x$$
$$(5) \qquad \delta^2 y = (\delta)^2 y + 2(\delta)p\delta x + q\delta x^2 + p\delta^2 x$$

wie vorher.

Die in diesen Entwickelungen vorkommenden Variationen δy, $\delta^2 y$, .. und ihre Beziehungen zu δx, $(\delta)y$, $(\delta)p$, $\delta^2 x$, $(\delta)^2 y$, .. laßen sich auch geometrisch veranschaulichen, was zur Erreichung einer größeren Sicherheit in der Handhabung dieser Größen vielleicht nützlich ist. Es sei (Fig. 18) $M\mu M'$ die in den Zustand des Variirens versetzte Curve, und die Curven

$\tau M_1 \mu_1$, $\tau_1 M_2 \mu_2$ zwei ihr nächstanliegende, so daß die Gleichungen dieser drei Curven aus der gemeinschaftlichen Gl. (1) oder auch aus dem gleichbedeutenden Systeme

$$(6) \qquad x = \varphi_1(t, \mathfrak{t}) \qquad y = \varphi_2(t, \mathfrak{t})$$

dadurch entspringen würden, daß man dem Argumente t successive die Werthe 0, dt, $2dt$ ertheilt (vgl. §. 54 I). Unmittelbar hieraus folgt

$$M\tau = {}_{(\delta)}y \qquad \tau\tau_1 = {}_{(\delta)}y + {}_{(\delta)}{}^2y$$

Ferner werden die trigonometrischen Tangenten der Winkel, unter welchen die Curve $M\mu$ im Punkte M, die Curve $\tau M_1 \mu_1$ im Punkte τ, die Curve $\tau_1 M_2 \mu_2$ in τ_1 gegen die Abscissenaxe geneigt sind, der Reihe nach durch p, $p + {}_{(\delta)}p$, $p + {}_{(\delta)}p + {}_{(\delta)}(p + {}_{(\delta)}p) = p + 2{}_{(\delta)}p + {}_{(\delta)}{}^2p$ angegeben. Und ähnliches gilt von q, u. s. w.

Wenn nun MM_1M_2 die durch den Punkt M $[x, y]$ laufende, also einem partikulären und constanten Werthe von t entsprechende Curve aus dem Systeme (6) ist, so hat man

$$PP_1 = \delta x \qquad P_1P_2 = \delta x + \delta^2 x \qquad P_1P_2 - PP_1 = \delta^2 x$$
$$qM_1 = \delta y \qquad q_1M_2 = \delta y + \delta^2 y \qquad q_1M_2 - qM_1 = \delta^2 y$$

Ferner giebt δp den Unterschied zwischen den trigonometrischen Tangenten der Winkel an, unter welchen die an die Curve $M\mu$ im Punkte M und an die Curve $M_1\mu_1$ in M_1 zu construirenden Tangenten gegen die Abscissenaxe geneigt sind; ferner $\delta p + \delta^2 p$ den Unterschied u. s. w.

Man bemerke hier gleich, daß weil das Operationszeichen ${}_{(\delta)}$ eine unveränderlich gebliebene Abscisse voraussetzt, ${}_{(\delta)}x = 0$ ist. Hieraus folgt, daß auch ${}_{(\delta)}\delta x$, ${}_{(\delta)}\delta^2 x$ u. dergl. nicht vorkommen können d. h. gleich Null sind. Denn wenn ${}_{(\delta)}x$ für jeden Werth von x gleich Null ist, so muß auch ${}_{(\delta)}(x + \delta x) = 0$, also ${}_{(\delta)}\delta x = 0$ sein. U. s. w.

Sehr einfach ist nun die geometrische Bedeutung der oben gefundenen Formel (2); dieselbe sagt blos aus, daß der Unterschied zwischen μM_1 und $M\tau$ zu den außer Acht zu laßenden unendlich-kleinen Größen höherer Ordnung gehöre, daß man also

$$\overline{\mu M_1} = {}_{(\delta)}\overline{PM} = {}_{(\delta)}y$$

setzen dürfe. Addirt man nämlich hierzu die Gleichung $\overline{q\mu} = p\delta x$, welche wegen $p = \text{tang}\, qM\mu$ ebenfalls unter Abstraction von den Unendlichkleinen zweiter Ordnung richtig ist, so führt die Figur sofort zu

$$\overline{q\mu} + \overline{\mu M_1} = \delta y = {}_{(\delta)}y + p\delta x$$

So wie aber das Fortschreiten vom Punkte M zu M_1 gleichbedeutend

mit der Vorstellung ist, daß der zu $y = \mathbf{PM}$ gehörige Werth von t um das Differential dt zunehme während t ungeändert bleibe, so schreitet man nun von $\mathbf{M}_1$ zu $\mathbf{M}_2$ dadurch fort, daß man den zu $\mathbf{P}_1\mathbf{M}_1$ gehörigen Werth von t wieder um ein Differential wachsen läßt. Hierbei tritt $\mu_1\mathbf{M}_2$ an die Stelle von $\mu\mathbf{M}_1$ und $\mathfrak{q}_1\mu_1$ an die Stelle von $\mathfrak{q}\mu$. Es muß also sein

$$\overline{\mu_1\mathbf{M}_2} = {}_{(\delta)}\overline{\mathbf{P}_1\mathbf{M}_1} = {}_{(\delta)}(y + {}_{(\delta)}y + p\delta x) = {}_{(\delta)}y + {}_{(\delta)}{}^2y + {}_{(\delta)}p\delta x$$

d. h. (7) $$\mu_1\mathbf{M}_2 - \mu\mathbf{M}_1 = {}_{(\delta)}{}^2y + {}_{(\delta)}p\delta x$$

Andererseits folgt aber bei dem eben gedachten Fortschreiten von den Punkten $\mathbf{M}$, μ, $\mathfrak{q}$ zu den Punkten $\mathbf{M}_1$, μ_1, $\mathfrak{q}_1$ daß, gerade so wie $\mathfrak{q}\mu = p \cdot \mathbf{PP}_1 = p\delta x$ gewesen ist, auch

$$\mathfrak{q}_1\mu_1 = (p + \delta p) \cdot \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = (p + \delta p)(\delta x + \delta^2 x)$$

sein müße; also

(8) $$\mathfrak{q}_1\mu_1 - \mathfrak{q}\mu = p\delta^2 x + \delta p\delta x = p\delta^2 x + {}_{(\delta)}p\delta x + q\delta x^2$$

Auf die hier gebrauchte Relation $\delta p = {}_{(\delta)}p + q\delta x$ werden wir sofort im folgenden Paragraphen zurückkommen. Bei der Addition der Gleichungen (7) und (8) ergiebt sich aber

$$\mathfrak{q}_1\mathbf{M}_2 - \mathfrak{q}\mathbf{M}_1 = \delta^2 y = p\delta^2 x + q\delta x^2 + 2{}_{(\delta)}p\delta x + {}_{(\delta)}{}^2y$$

was mit (5) übereinstimmt.

§. 57.

Es sei nun, wie in §. 6 II)

$$\mathbf{U} = \mathbf{F}(x, y, p, q, \ldots s, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots)$$

ein gegebener Ausdruck, in welchem y, s noch unbekannte Functionen von x, und $p, q, \ldots \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots$ ihre Derivirten vorstellen. Man verlangt, indem x, y, s gleichzeitig variiren sollen, die Variation $\delta\mathbf{U}$. Diese würde zu Folge der gegenwärtig (im vor. §.) und der früher (in §. 5) festgesetzten Terminologie eine mittelbare und gemischte sein.

I) Man erhält zunächst

$$\delta\mathbf{U} = \partial_x\mathbf{U}\,\delta x + \partial_y\mathbf{U}\,\delta y + \partial_p\mathbf{U}\,\delta p + \partial_q\mathbf{U}\,\delta q + \cdots$$
$$+ \partial_z\mathbf{U}\,\delta z + \partial_\mathfrak{p}\mathbf{U}\,\delta\mathfrak{p} + \partial_\mathfrak{q}\mathbf{U}\,\delta\mathfrak{q} + \cdots$$

Darin ist nun bereits bekannt aus dem vorigen Paragraphen Gl. (2)

$$\delta y = {}_{(\delta)}y + p\delta x$$

Ebenso ist natürlich $\delta z = {}_{(\delta)}z + \mathfrak{p}\delta x$

Allein die hier angewendete Regel, wonach man die (gemischte) Variation einer Function von x dadurch erhält, daß man zur reinen Variation

derselben noch das Produkt ihres Differentialquotienten in den Factor dx addirt, läßt sich offenbar auch in Betreff der Functionen p, $\mathfrak{p}$, q, $\mathfrak{q}$, ... geradezu anwenden. Demnach wird

$$(1)\qquad \begin{aligned} \delta p &= {}_{(\delta)}p + q\delta x & \delta q &= {}_{(\delta)}q + r\delta x & &\text{u. s. w.}\\ \delta \mathfrak{p} &= {}_{(\delta)}\mathfrak{p} + \mathfrak{q}\delta x & \delta \mathfrak{q} &= {}_{(\delta)}\mathfrak{q} + \mathfrak{r}\delta x & &\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Setzt man alle diese Werthe in δU ein und bemerkt, daß

$$\partial_x U + \partial_y U.p + \partial_{\mathfrak{p}} U.q + \cdots + \partial_{\mathfrak{x}} U.\mathfrak{p} + \partial_{\mathfrak{y}} U.\mathfrak{q} + \cdots$$

den totalen Differentialquotienten $\frac{dU}{dx}$ angiebt; so erhält man

$$(2)\qquad \delta U = \frac{dU}{dx}\delta x + \partial_y U\,{}_{(\delta)}y + \partial_{\mathfrak{p}} U\,{}_{(\delta)}p + \partial_q U\,{}_{(\delta)}q + \cdots + \partial_{\mathfrak{x}} U\,{}_{(\delta)}\mathfrak{x} + \partial_{\mathfrak{y}} U\,{}_{(\delta)}\mathfrak{p} + \partial_{\mathfrak{q}} U\,{}_{(\delta)}\mathfrak{q} + \cdots$$

oder auch, sobald man durch dt dividirt,

$$(3)\qquad \delta' U = \frac{1}{dx} dU\delta x + \partial_y U\,{}_{(\delta')}y + \partial_{\mathfrak{p}} U \frac{d\,{}_{(\delta')}y}{dx} + \partial_q U \frac{d^2\,{}_{(\delta')}y}{dx^2} + \cdots + \partial_{\mathfrak{x}} U\,{}_{(\delta')}\mathfrak{x} + \partial_{\mathfrak{y}} U \frac{d\,{}_{(\delta')}\mathfrak{x}}{dx} + \partial_{\mathfrak{q}} U \frac{d^2\,{}_{(\delta')}\mathfrak{x}}{dx^2} + \cdots$$

Die Summe der auf $\frac{dU}{dx}\delta x$ folgenden Glieder giebt offenbar die reine Variation ${}_{(\delta)}U$ an, sie ist identisch mit der Formel (2) in §. 6, weil die dort vorkommenden Variationen reine sind. Ueberhaupt laßen sich alle in den vorhergehenden Capiteln entwickelten Formeln nach Vertauschung des Zeichens δ mit ${}_{(\delta)}$ oder nach Substitution von $\delta y - p\delta x$ für δy, $\delta \mathfrak{x} - \mathfrak{p}\delta x$ für $\delta \mathfrak{x}$, ꝛc. sofort in unsere jetzigen Rechnungen übertragen, wie ein für alle Mal hier bemerkt sein möge. — Wir können daher auch schreiben

$$(4)\qquad \delta U = {}_{(\delta)}U + \frac{dU}{dx}\delta x$$

und diese Formel ist, wie man sieht, wieder nach derselben Regel gebildet, deren Wortlaut wir oben vor Aufstellung der Gleichungen (1) gegeben haben.

II) Es dürften jedoch in Betreff der obigen Gleichungen (1) noch einige Erläuterungen hier am Ort sein. Daß man die Operationszeichen d und δ, wenn sie hintereinander folgen, auch in den gegenwärtigen Rechnungen versetzen dürfe, so daß $\delta d^n y = d^n \delta y$ ist, versteht sich von selbst, sobald man sich ein System zweier Gleichungen $x = \varphi_1(t, \mathfrak{t})$, $y = \varphi_2(t, \mathfrak{t})$ vorschweben läßt und bedenkt, daß durch jedes der beiden Zeichen d und δ nur eine Differentiation, das eine Mal in Beziehung

auf t, das andere Mal in Beziehung auf t, angezeigt wird. Allein es ist δp jetzt nicht mehr gleichbedeutend mit $\frac{d\delta y}{dx}$, δq nicht gleich $\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, u. s. w. vor welchem Versehen man sich um so mehr in Acht zu nehmen haben wird, als man in den vorhergehenden Capiteln an diese Gleichheiten sich bereits gewöhnt hat. Gegenwärtig ist aber

$$\delta p = \delta\frac{dy}{dx} = \frac{dx d\delta y - dy d\delta x}{dx^2} = \frac{d\delta y}{dx} - p\frac{d\delta x}{dx}$$

Setzen wir hierin für δy seinen Werth $(\delta)y + p\delta x$ und qdx für dp, so erhalten wir

$$\delta p = \frac{d(\delta)y}{dx} + q\delta x$$

Ferner wird

$$\delta q = \delta\frac{dp}{dx} = \frac{dx d\delta p - dp d\delta x}{dx^2} = \frac{d\delta p}{dx} - q\frac{d\delta x}{dx}$$

Setzen wir hierin für δp seinen eben gefundenen Werth und rdx für dq, so entsteht

$$\delta q = \frac{d^2(\delta)y}{dx^2} + r\delta x$$

In gleicher Weise kann man offenbar immer weiter voranschreiten. Ueberhaupt ist also, übereinstimmend mit (1)

$$(5) \qquad \delta\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n(\delta)y}{dx^n} + \frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}\delta x$$

III) Wir haben hierbei auch Anlaß auf die Variationen von dx einen Blick zu werfen, so wie auf die nach x genommenen Differentialien von δx. Um die Bedeutung von δdx zu erkennen, muß man sich auf der ursprünglichen Curve $y = f(x)$ zwei Punkte M, M′ denken, von denen der erste zur Abscisse x, der andere zu $x + dx$ gehört, und muß dann auf der unendlich nahe liegenden variirenden Curve die Punkte M_1, M_1' fixiren, welche zu M, M′ die entsprechenden sind. Der Unterschied der zu M_1 und M_1' gehörigen Abscissen ist dann augenscheinlich der um seine Variation geänderte Werth von dx, und wenn wir also die Fußpunkte der zu M, M′, M_1, M_1' gehörenden Ordinaten nach der Reihe mit P, P′, P_1, P_1' bezeichnen, so ist $dx + \delta dx = \pm P_1P_1'$. Es würde hierin, wenn P_1P_1' als absolute Zahl angesehen wird, das obere oder das untere Vorzeichen anzuwenden sein, je nachdem die Abscisse

des Punktes M_1' größer oder kleiner als die des Punkts M_1 ist. Setzen wir aber fest, daß jede mit zwei Buchstaben benannte Strecke der Abscissenaxe als positive oder als negative Zahl gelten solle, je nachdem sie von ihrem eigenen Anfangspunkt an gerechnet nach der Seite der wachsenden oder der abnehmenden Abscissen gerichtet ist, so können wir des doppelten Vorzeichens überall entbehren und uns an die Gleichung

$$(6) \qquad dx + \delta dx = P_1P_1'$$

halten.

Andererseits aber ist $\delta x = PP_1$. Daß diese Größe mit x selbst variabel sei, erhellt unmittelbar aus ihrem Ursprung. Nach einem Fortschritte um das Differential dx tritt aber $P'P_1'$ an die Stelle von PP_1 d. h. es ist

$$(7) \qquad \delta x + d\delta x = P'P_1'$$

Wenn man nun, um von M nach M_1' zu gelangen, den Curvenelementen MM_1, M_1M_1' nachgeht und dieselben auf die Axe der X projicirt, so erhält man zu Folge (6)

$$PP_1 + P_1P_1' = \delta x + dx + \delta dx$$

Nimmt man dagegen seinen Weg durch die Curvenelemente MM', $M'M_1'$, so findet man als dessen Projection mit Rücksicht auf (7) die Summe

$$PP' + P'P_1' = dx + \delta x + d\delta x$$

Da beide Projectionen einander gleich sind, nämlich $= PP_1'$, so folgt hieraus, wie es sein muß, $\delta dx = d\delta x$.

§. 58.

Gehen wir nun zu den Variationen der Integrale $U = \int_a^\xi V dx$ über, wobei V einen gegebenen Ausdruck $F(x, y, p, q, \ldots)$ bedeutet.

1) Der um δU vergrößerte oder verkleinerte Werth von U wird dadurch erzeugt, daß erstens wegen der Variationen von x die Integrationsgränzen sich um $\delta\xi$ resp. $\delta\alpha$ ändern, und daß zweitens in Folge einer reinen Variation des y auch V eine reine Variation $(\delta)V$ erleidet. Die aus der erstgedachten Ursache erwachsende Aenderung wird durch die Differenz $V_\xi \delta\xi - V_a \delta\alpha$ angegeben, die andere ist $\int_a^\xi (\delta)V dx$, also im Ganzen

$$(1) \qquad \delta U = V_\xi \delta\xi - V_a \delta\alpha + \int_a^\xi (\delta)V dx$$

Um dieſes deutlich einzuſehen, theile man das Integrationsintervall, welches jetzt von $\alpha+\delta\alpha$ bis $\xi+\delta\xi$ reicht, in n unendlich-abnehmende Theilchen $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ deren letztes $\delta\xi$ ſei; ſo wird, wenn wir mit

$[V]_1$ den Werth von V für $x=\alpha+\delta\alpha$
$[V]_2$ " " " " " $x=\alpha+\delta\alpha+\omega_1$
$[V]_3$ " " " " " $x=\alpha+\delta\alpha+\omega_1+\omega_2$
u. ſ. w. u. ſ. w.

bezeichnen, der neue Werth von U nach dem bekannten Grundſatze über beſtimmte Integrale durch

$$\lim.\ \{[V+{}_{(\delta)}V]_1\omega_1+[V+{}_{(\delta)}V]_2\omega_2+\cdots+[V+{}_{(\delta)}V]_{n-1}\omega_{n-1}+[V+{}_{(\delta)}V]_\xi\delta\xi\}$$

angegeben; der urſprüngliche Werth dagegen war

$$\lim.\ \{V_\alpha\delta\alpha+[V]_1\omega_1+[V]_2\omega_2+\cdots+[V]_{n-1}\omega_{n-1}\}$$

Die Differenz beider Summen liefert uns alſo die verlangte Variation δU. Dieſelbe beſteht aus $V_\xi\delta\xi - V_\alpha\delta\alpha$ und dem Gränzausdruck

$$\lim.\ \{[{}_{(\delta)}V]_1\omega_1+[{}_{(\delta)}V]_2\omega_2+\cdots+[{}_{(\delta)}V]_{n-1}\omega_{n-1}+[{}_{(\delta)}V]_\xi\delta\xi\}$$

Dieſer letztere iſt aber wieder gleichbedeutend mit $\int_{\alpha+\delta\alpha}^{\xi+\delta\xi}{}_{(\delta)}V dx$, wofür man auch $\int_\alpha^\xi{}_{(\delta)}V dx$ ſetzen kann, da der Unterſchied zwiſchen dieſen beiden Integralen ein Unendlich-kleines der zweiten Ordnung iſt.

Wir können uns ſehr leicht denſelben Beweis der Formel (1) auch geometriſch veranſchaulichen. Wenn wir nämlich ſenkrecht zur Abſciſſenaxe die Werthe ſowohl von V wie von $V+{}_{(\delta)}V$ als Ordinaten auftragen, ſo daß etwa die Curven AB, A_1B_1 (Fig. 17) den Ort für die Gleichungen $y=V$, $y=V+{}_{(\delta)}V$ darſtellen, ſo giebt δU den Unterſchied der Flächenräume $H_1A_1B_1K_1$ und HABK an, d. h.

$$KBB_1K_1 - HAA_1H_1 + AA_1B_1B$$

Der erſte Beſtandtheil hiervon iſt $V_\xi\delta\xi$, der zweite $V_\alpha\delta\alpha$, der letzte aber $\int_\alpha^\xi{}_{(\delta)}V dx$, in ſo fern man die unendlich-kleinen Größen der zweiten Ordnung außer Acht läßt.

II) Auch ausgehend von der unbeſtimmten Integration $\int V dx$ gelangt man zu gleichem Ergebnis. Wenn man ſich nämlich denkt, daß in V überall $x+\delta x$ an die Stelle von x trete und gleichzeitig y in $y+\delta y$, p in $p+\delta p$, ꝛc. übergehe, ſo wird zu Folge (2) und (4)

des vor. §.

$$(2) \qquad \delta V = \frac{dV}{dx}\delta x + \partial_y V\,{}_{(\delta)}y + \partial_p V \frac{d\,{}_{(\delta)}y}{dx} + \partial_q V \frac{d^2\,{}_{(\delta)}y}{dx^2} + \cdots$$

oder $$(3) \qquad \delta V = \frac{1}{dx} dV\delta x + {}_{(\delta)}V$$

Indem man aber, um $\int V dx$ nach t zu differentiiren, den Satz von der Differentiation unter dem Integralzeichen anwendet, und dabei auch dx als Function von t behandelt, erhält man $\delta \int V dx = \int \delta V dx + \int V d\delta x$, und dieses verwandelt sich, sobald man für δV seinen Werth einsetzt, in $\delta \int V dx = \int dV\delta x + \int {}_{(\delta)}V dx + \int V d\delta x = \int d(V\delta x) + \int {}_{(\delta)}V dx$ d. h.

$$(4) \qquad \delta \int V dx = V\delta x + \int {}_{(\delta)}V dx$$

Bezieht man die hier angezeigten Integrationen auf die bestimmten Gränzen $x = \alpha$, $x = \xi$ und setzt einstweilen voraus, daß für die zu suchende Function $y = f(x)$ der Ausdruck V während des Integrationsintervalls nicht discontinuirlich werde, so ergiebt sich

$$\delta U = \int_\alpha^\xi \delta(V dx) = V_\xi \delta\xi - V_\alpha \delta\alpha + \int_\alpha^\xi {}_{(\delta)}V dx$$

wie vorher. Als Integrationsgränzen waren hierbei ξ, α und nicht wie in I) $\xi + \delta\xi$, $\alpha + \delta\alpha$ zu nehmen; denn da bereits in $V dx$ an die Stelle des variablen x überall $x + \delta x$ gesetzt worden ist, so muß man, damit das ursprüngliche x das Intervall von $\alpha + \delta\alpha$ bis $\xi + \delta\xi$ durchlaufe, dem ersten Summanden in $x + \delta x$ die Gränzwerthe α, ξ beilegen, während der zweite Summand $[\delta x]_\alpha = \delta\alpha$ resp. $[\delta x]_\xi = \delta\xi$ wird.

III) Uebrigens gilt die Formel (1) auch ohne irgend welche Modifikation in den Fällen, wenn in V außer y, p, q, ... noch andere unbekannte und variirende Functionen von x nebst ihren Derivirten enthalten sind. Denn wenn s eine solche Function bedeutet und wenn man $\frac{ds}{dx}, \frac{d^2s}{dx^2}, \ldots$ wieder durch $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, ... vorstellt, so muß man zwar, um δV zu erhalten, auf der rechten Seite der obigen Gl. (2) noch die Bestandtheile

$$\partial_s V\,\mathfrak{p}\delta x + \partial_\mathfrak{p} V\,\mathfrak{q}\delta x + \partial_\mathfrak{q} V\,\mathfrak{r}\delta x + \cdots$$
$$+ \partial_s V\,{}_{(\delta)}s + \partial_\mathfrak{p} V\,{}_{(\delta)}\mathfrak{p} + \partial_\mathfrak{q} V\,{}_{(\delta)}\mathfrak{q} + \cdots$$

hinzufügen, allein die erste Zeile hiervon gehört nun zu $\frac{1}{dx} dV\delta x$, die zweite zu ${}_{(\delta)}V$, so daß die Gleichungen (3) und (4) ganz ungestört bleiben.

IV) Wenn in V außer x, y, p, q, ... noch einige der Gränzwerthe ξ, α, y_ξ, y_α, p_ξ, p_α, q_ξ, .. vorkommen, so muß man zu dem in I) und II) besprochenen δU noch die Integrale

$$(5) \qquad \int \frac{dV}{d\xi}\delta\xi dx, \quad \int \frac{dV}{d\alpha}\delta\alpha dx, \quad \int \frac{dV}{d.y_\xi}\delta y_\xi dx, \quad \int \frac{dV}{d.y_\alpha}\delta y_\alpha dx, \quad \text{ꝛc.}$$

hinzufügen, gerade wie in §. 52. Die Gränzvariationen $\delta\xi$, $\delta\alpha$, δy_ξ, δy_α, δp_ξ, δp_α, ... sind auch hier, da sie sich blos auf die einzelnen Punkte A, B beziehen und nicht während des Durchlaufens des Integrationsintervalls sich continuirlich ändern, außerhalb des Integralzeichens zu bringen; an die Stelle von δy_ξ, δy_α, δp_ξ, ... wird man jedoch, um die Glieder (5) mit den Bestandtheilen $N_\xi({}_{(\delta)}y_\xi$, $-N_\alpha({}_{(\delta)}y_\alpha$, $P_\xi({}_{(\delta)}p_\xi$, $-P_\alpha({}_{(\delta)}p_\alpha$, ... zu vereinigen, welche in der für δU bei (1) aufgestellten Formel aus dem letzten Integrale entspringen, die Werthe

$\delta y_\xi = {}_{(\delta)}y_\xi + p_\xi\delta\xi$, $\delta y_\alpha = {}_{(\delta)}y_\alpha + p_\alpha\delta\alpha$, $\delta p_\xi = {}_{(\delta)}p_\xi + q_\xi\delta\xi$, ...

substituiren. Auf diese Weise findet man aus (1), nachdem man mit $\int {}_{(\delta)}V dx$ die bekannte Transformation (§. 23 Gl. (3)) vorgenommen hat, die Formel

$$\begin{aligned}
\delta U = {} & \Big(V_\xi + \int_\alpha^\xi \Big(\frac{dV}{d\xi} + \frac{dV}{d.y_\xi}p_\xi + \frac{dV}{d.p_\xi}q_\xi + \cdot\cdot\Big)dx\Big)\delta\xi \\
& - \Big(V_\alpha - \int_\alpha^\xi \Big(\frac{dV}{d\alpha} + \frac{dV}{d.y_\alpha}p_\alpha + \frac{dV}{d.p_\alpha}q_\alpha + \cdot\cdot\Big)dx\Big)\delta\alpha \\
(6) \qquad & + \Big(N_\xi + \int_\alpha^\xi \frac{dV}{d.y_\xi}dx\Big)({}_{(\delta)}y_\xi \qquad - \Big(N_\alpha - \int_\alpha^\xi \frac{dV}{d.y_\alpha}dx\Big)({}_{(\delta)}y_\alpha \\
& + \Big(P_\xi + \int_\alpha^\xi \frac{dV}{d.p_\xi}dx\Big)\Big[\frac{d({}_{(\delta)}y}{dx}\Big]_\xi \quad - \Big(P_\alpha - \int_\alpha^\xi \frac{dV}{d.p_\alpha}dx\Big)\Big[\frac{d({}_{(\delta)}y}{dx}\Big]_\alpha \\
& + \cdot\cdot \qquad\qquad \cdot\cdot \qquad - \cdot\cdot \qquad\qquad \cdot\cdot \\
& + \int_\alpha^\xi \Big(\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dx}d\frac{dV}{dp} + \frac{1}{dx^2}d^2\frac{dV}{dq} - \cdot\cdot\Big)({}_{(\delta)}y\,dx
\end{aligned}$$

worin, wie gewöhnlich

$$(7)\qquad \begin{aligned} N &= \partial_p V - \frac{1}{dx} d\partial_q V + \frac{1}{dx^2} d^2\partial_r V - \cdots \\ P &= \partial_q V - \frac{1}{dx} d\partial_r V + \cdots \end{aligned}$$

u. s. w. gesetzt worden ist.

V) Durch die auf partiellem Integriren beruhende Transformation von $\int ({}_\delta)V dx$ wurde bewirkt, daß sich unter dem Integralzeichen nur noch die einzige Variation ${}_\delta y$ befindet. Da aber ${}_\delta y = \delta y - p\delta x$ ist, so theilt sich das Integral, welches den Schluß der Formel (6) bildet, in

$$\int_\alpha^\xi (\mathfrak{W}\delta y - \mathfrak{W}p\delta x)dx = \int_\alpha^\xi \mathfrak{W}\delta y dx - \int_\alpha^\xi \mathfrak{W}p\delta x dx$$

wobei wir, größerer Kürze wegen, gerade wie früher in den §§. 37 fgg.

$$(8)\qquad \mathfrak{W} = \partial_y V - \frac{1}{dx} d\partial_p V + \frac{1}{dx^2} d^2\partial_q V - \frac{1}{dx^3} d^3\partial_r V + \cdots$$

gesetzt haben. Die Größen $\mathfrak{W}$, $-\mathfrak{W}p$ entsprechen daher den in §. 55 III) durch Y, X vorgestellten Ausdrücken, und hiermit ist der Grund der dort gefundenen Relation $X = -Yp$ aufgedeckt.

§. 59.

Die Anwendung der im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln auf die Bestimmung des Maximums oder Minimums des Integrals $U = \int V dx$ ist nun leicht zu machen.

I) Zuvörderst wird man den Coefficienten von ${}_\delta y$ in dem letzten Bestandtheile von δU gleich Null zu setzen haben, was man mittelst der in §. 24 auseinandergesetzten Schlußfolge auch hier ohne Mühe begründen würde. Es bleibt also die sogenannte Hauptgleichung, ohne irgend einer Modifikation wegen der gegenwärtig in Betrachtung gezogenen Variationen von x zu bedürfen, genau unsere bekannte Gl. (6) des §. 25.

Ferner ist ersichtlich, daß das Aggregat der dem letzten Integrale in der Formel (6) des vor. §. vorausgehenden Bestandtheile von δU außer den beiden mit $\delta\xi$ und $\delta\alpha$ multiplicirten Gliedern noch gerade so viele mit den Factoren ${}_\delta y_\xi$, ${}_\delta y_\alpha$, $\left[\frac{d({}_\delta y)}{dx}\right]_\xi$, ... behaftete Glieder zählt, als in der entsprechenden Formel (5) des §. 25 vorhanden waren. Wenn

daher $\frac{d^m y}{dx^m}$ der höchste in V vorkommende Differentialquotient von y ist, so beläuft sich die Anzahl jener Glieder jetzt auf $2m+2$, während sie früher (vgl. §. 30 II) gleich $2m$ war; und wenn keine Bedingungsgleichungen zwischen ξ, α, y_ξ, y_α, p_ξ, ... zu erfüllen wären, wenn also auch $\delta\xi$ und $\delta\alpha$ beliebig und von einander unabhängig gedacht werden sollten, so würde die allgemeine Gleichung $\delta U = 0$ sich in $2m+2$ einzelne Gränzgleichungen spalten. Jedenfalls liefert sie aber wegen des erwähnten Hinzutritts der beiden mit $\delta\xi$ und $\delta\alpha$ behafteten Glieder zwei Gränzgleichungen mehr, als man in den analogen Fällen des dritten und vierten Capitels erhielt, und eben dadurch wird es möglich auch für die Integrationsgränzen ξ und α die zum Maximum beziehsw. Minimum von U tauglichen Werthe auszumitteln. — Wir haben hierbei stillschweigend angenommen, daß in V, während $\frac{d^m y}{dx^m}$ der höchste Differentialquotient von y ist, explicit höchstens noch $\left[\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right]_\xi$, $\left[\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right]_\alpha$ und nicht etwa einer der Gränzwerthe $\left[\frac{d^m y}{dx^m}\right]_\xi$, $\left[\frac{d^m y}{dx^m}\right]_\alpha$, $\left[\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}\right]_\xi$ u. s. w. vorkomme. Sollte sich dieses letztere jemals ereignen und würden dabei nicht zufällig einige der eben gedachten Gränzgleichungen identisch, so müßte man sich, um nicht mehr Bestimmungsgleichungen als unbestimmte Größen zu erhalten, darauf beschränken die Aufgabe in dem Sinne zu lösen, daß für alle in Vergleichung zu ziehenden variirenden Curven die eine oder andere der Größen ξ, α, y_ξ, y_α, p_ξ, ... einerlei Werth besitzen solle, so daß ihre Variation Null ist und man nicht ihren Coefficienten in (6) gleich Null zu setzen braucht. In eben dieselbe Nothwendigkeit hatten wir uns bereits früher einmal in §. 30 IV), ein ander Mal am Schluße des §. 53 versetzt gesehen.

II) Wenn von den Gränzabscissen ξ, α und den zugehörigen Ordinaten y_ξ, y_α oder auch einigen anderen der auf die Integrationsgränzen bezüglichen Größen, wie p_ξ, p_α, q_ξ, ... eine gegebene Bedingungsgleichung

$$(1) \qquad \ominus_1(\xi, \alpha, y_\xi, y_\alpha, p_\xi, \ldots) = \text{Const.}$$

zu erfüllen ist*), so wird man daraus eine Gleichung $\delta\ominus_1 = 0$ nämlich

*) Der geneigte Leser wird gebeten, dieses schon in §. 47 zu gleichem Zwecke gebrauchte Zeichen $\ominus$ als eine andere Art Θ ansehen und etwa „Gränztheta" lesen zu wollen.

$$\frac{d\Theta_1}{d\xi}\delta\xi+\frac{d\Theta_1}{d.y_\xi}\delta y_\xi+\frac{d\Theta_1}{d.p_\xi}\delta p_\xi+\cdots+\frac{d\Theta_1}{d\alpha}\delta\alpha+\frac{d\Theta_1}{d.y_\alpha}+\cdots=0$$

herleiten (vgl. 43 III), welche, nachdem man in ihr die gemischten Variationen durch die reinen ausgedrückt hat, die Gestalt erhält

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{d\Theta_1}{d\xi}+\frac{d\Theta_1}{d.y_\xi}p_\xi+\frac{d\Theta_1}{d.p_\xi}q_\xi+\cdots\right)\delta\xi\\&+\left(\frac{d\Theta_1}{d\alpha}+\frac{d\Theta_1}{d.y_\alpha}p_\alpha+\frac{d\Theta_1}{d.p_\alpha}q_\alpha+\cdots\right)\delta\alpha\\&+\frac{d\Theta_1}{d.y_\xi}(\delta)y_\xi+\frac{d\Theta_1}{d.p_\xi}(\delta)p_\xi+\cdots+\frac{d\Theta_1}{d.y_\alpha}(\delta)y_\alpha+\frac{d\Theta_1}{d.p_\alpha}(\delta)p_\alpha+\cdots\end{aligned}\right\}=0 \qquad (2)$$

In der Regel freilich werden in einer solchen Bedingungsgleichung $\Theta_1=\text{Const.}$ nur einige wenige der genannten Größen vorkommen; es wird z. B. wenn gefordert wird, daß der Gränzpunkt A auf einer gegebenen Gränzcurve $\Gamma(\alpha,\beta)=0$ liege, die Gl. (2) sich reduciren auf

$$\frac{d\Gamma}{d\alpha}\delta\alpha+\frac{d\Gamma}{d\beta}\delta y_\alpha=\left(\frac{d\Gamma}{d\alpha}+\frac{d\Gamma}{d\beta}p_\alpha\right)\delta\alpha+\frac{d\Gamma}{d\beta}(\delta)y_\alpha=0$$

Wir haben hierher sogar den einfachsten aller Gränzfälle, nämlich die Bedingung $\delta y_\alpha=p_\alpha\delta\alpha+(\delta)y_\alpha=0$ oder $\delta y_\xi=p_\xi\delta\xi+(\delta)y_\xi=0$ zu zählen, ähnlich den in §. 48 Gl. (10) uns vorgekommenen.

Die Art und Weise, wie jede solche Bedingungsgleichung in den Calkul aufzunehmen sei, ist bereits aus früheren Untersuchungen hinlänglich bekannt. Man wird nämlich die Gleichung (2), nachdem man sie mit einem anfangs unbestimmten Factor $\mathfrak{L}_1$ multiplicirt hat, zu dem Aggregate addiren, welches in der Formel für δU dem letzten Integrale $\int\mathfrak{W}(\delta)ydx$ vorausgeht, wird im Falle noch andere ähnliche Bedingungsgleichungen $\delta\Theta_2=0$, $\delta\Theta_3=0,\ldots$ vorliegen, ganz ebenso mit diesen verfahren und schließlich die Coefficienten der Variationen $\delta\xi$, $\delta\alpha$, $(\delta)y_\xi$, $(\delta)y_\alpha$, $(\delta)p_\xi$, $(\delta)p_\alpha,\ldots$ sämmtlich gleich Null setzen. Wenn wir uns zur Abkürzung gestatten, durch

$$\begin{aligned}&\frac{d\mathrm{V}}{d\xi}\ \text{die Summe}\ \frac{d\mathrm{V}}{d\xi}+\frac{d\mathrm{V}}{d.y_\xi}p_\xi+\frac{d\mathrm{V}}{d.p_\xi}q_\xi+\cdots\\&\frac{d\mathrm{V}}{d\alpha}\quad''\quad''\quad\frac{d\mathrm{V}}{d\alpha}+\frac{d\mathrm{V}}{d.y_\alpha}p_\alpha+\frac{d\mathrm{V}}{d.p_\alpha}q_\alpha+\cdots\\&\frac{d\Theta}{d\xi}\quad''\quad''\quad\frac{d\Theta}{d\xi}+\frac{d\Theta}{d.y_\xi}p_\xi+\frac{d\Theta}{d.p_\xi}q_\xi+\cdots\\&\text{u. s. w.}\qquad\qquad\text{u. s. w.}\end{aligned} \qquad (3)$$

vorzustellen, was sich wegen der Analogie jener Summen mit der von uns gewöhnlich durch $\frac{dV}{dx}$ bezeichneten Größe leicht in Acht behalten läßt, so gelangen wir auf dem angedeuteten Wege zu dem Systeme folgender Gleichungen:

Coeff. von

$$V_\xi + \int_a^\xi \frac{dV}{d\xi} dx + \mathfrak{L}_1 \frac{d\Theta_1}{d\xi} + \mathfrak{L}_2 \frac{d\Theta_2}{d\xi} + \cdots = 0 \qquad \delta\xi$$

$$N_\xi + \int_a^\xi \frac{dV}{d.y_\xi} dx + \mathfrak{L}_1 \frac{d\Theta_1}{d.y_\xi} + \mathfrak{L}_2 \frac{d\Theta_2}{d.y_\xi} + \cdots = 0 \qquad (\delta)y_\xi$$

$$P_\xi + \int_a^\xi \frac{dV}{d.p_\xi} dx + \mathfrak{L}_1 \frac{d\Theta_1}{d.p_\xi} + \mathfrak{L}_2 \frac{d\Theta_2}{d.p_\xi} + \cdots = 0 \qquad (\delta)p_\xi$$

(4) .. ..

$$-V_\alpha + \int_a^\xi \frac{dV}{d\alpha} dx + \mathfrak{L}_1 \frac{d\Theta_1}{d\alpha} + \mathfrak{L}_2 \frac{d\Theta_2}{d\alpha} + \cdots = 0 \qquad \delta\alpha$$

$$-N_\alpha + \int_a^\xi \frac{dV}{d.y_\alpha} dx + \mathfrak{L}_1 \frac{d\Theta_1}{d.y_\alpha} + \mathfrak{L}_2 \frac{d\Theta_2}{d.y_\alpha} + \cdots = 0 \qquad (\delta)y_\alpha$$

.. ..

An die Bedeutung von N, P,... ist im vor. §. Gl. (7) nochmals erinnert worden.

In Betreff des Gebrauchs dieser Gleichungen würde im Allgemeinen das in §. 43 III) Gesagte zu wiederholen sein, nur hat man, indem gegenwärtig auch die Coefficienten von $\delta\xi$ und $\delta\alpha$ gleich Null zu setzen waren, zwei Gleichungen mehr erhalten als am angeführten Orte, wogegen aber auch die Werthe von ξ und α zu den gesuchten Größen zu zählen sind. Insbesondere ist auch hier die unter V) im angeführten Paragraphen gemachte Erinnerung im Auge zu behalten. Denn wenn z. B. α nicht variiren soll, so fällt die erste Gleichung in der zweiten Gruppe von (4) weg; allein insofern man alsdann α als eine gegebene Größe ansehen darf, ist zugleich hiermit die Anzahl der zu suchenden Größen um eine verkleinert worden. — Damit in dieser Beziehung die Anwendung der Gleichungen (4) möglichst bequem sei, haben wir in der

letzten Columne jedesmal diejenige Gränzvariation angezeigt, deren Coefficient durch den linken Theil der betreffenden Gleichung angegeben wurde.

Man darf hierbei auch nicht übersehen, daß unter Umständen $(\delta)y_\alpha$, $(\delta)y_\xi$ gleich Null gesetzt werden müßen, obwohl die Gränzpunkte **A**, **B** beide variiren sollen, obwohl also δy_α, δy_ξ von Null verschieden sind. Wenn z. B. eine Gränzcurve $\mathbf{L_1AA_1}$ gegeben ist, etwa durch die Gleichung $\beta = \chi(x)$, und wenn gefordert wird, daß die gesuchte Curve $y = f(x)$ im Punkte **A** mit jener Gränzcurve einerlei Tangente besitze, so muß $p_\alpha = f'(\alpha) = \chi'(\alpha)$ sein; und da (bei Vernachläßigung der Unendlich-kleinen zweiter Ordnung) $\delta y_\alpha = \delta\beta = \chi'(\alpha)\delta\alpha$ ist, so haben wir in diesem Falle die Bedingung

$$\delta y_\alpha - p_\alpha \delta\alpha = 0 \qquad \text{d. h.} \qquad (\delta)y_\alpha = 0$$

(Strenggenommen ist hier $(\delta)y_\alpha$ ein Unendlich-kleines zweiter Ordnung). Zugleich wird $\delta p_\alpha = \chi'(\alpha + \delta\alpha) - \chi'(\alpha) = \chi''(\alpha)\delta\alpha$, also

$$(\delta)p_\alpha + (q_\alpha - \chi''(\alpha))\delta\alpha = 0$$

Eine ähnliche Betrachtung würde sich über $(\delta)y_\xi$, $(\delta)p_\xi$, ... im Gegensatze zu δy_ξ, δp_ξ, ... anstellen laßen.

III) Zur Erläuterung vorstehender Regeln nehmen wir vorerst die sehr einfache Aufgabe: es soll die kürzeste Linie bestimmt werden, welche von dem festen Punkte $\mathbf{A}[x = \alpha, y = \beta]$ nach einer gegebenen Curve $\mathbf{L_2BB_1}$ gezogen werden kann. Die Gleichung dieser Gränzcurve möge durch $\eta = \chi(x)$ vorgestellt werden, wobei wir um die Möglichkeit einer Confusion mit den Ordinaten der gesuchten Curve **AB** abzuschneiden, η statt y geschrieben haben, was auch in zukünftigen ähnlichen Fällen geschehen wird.

Zunächst haben wir hier die zwei Bedingungsgleichungen

$$\textbf{(5)} \qquad \Theta_1 = y_\alpha - \beta = 0 \qquad \textbf{(6)} \qquad \Theta_2 = y_\xi - \chi(\xi) = 0$$

Ferner ist $\mathbf{V} = \sqrt{1+p^2}$, $\mathbf{N} = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $\mathbf{P} = 0$ ...

Mittelst dieser Werthe und mit Rücksicht darauf, daß $\delta\alpha = 0$, $(\delta)y_\alpha = 0$ sein soll, so wie unter Beachtung der bei (3) festgestellten Bedeutung von $\frac{d\Theta_2}{d\xi}$ finden wir, daß das System (4) sich jetzt reducirt auf folgende zwei Gleichungen:

$$\textbf{(7)} \qquad [\mathbf{V}]_\xi + \mathfrak{L}_2 \frac{d\Theta_2}{d\xi} = \sqrt{1+p_\xi^2} - \mathfrak{L}(\chi'(\xi) - p_\xi) = 0$$

$$(8) \qquad \left[\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\right]_\xi + \mathfrak{L}_2 \frac{d\Theta_2}{d.y_\xi} = \frac{p_\xi}{\sqrt{1+p_\xi^2}} + \mathfrak{L} = 0$$

Da man nun als Integral der Hauptgleichung $d\mathfrak{d}_p V = d\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} = 0$ sofort die Gleichung einer geraden Linie

$$y = C_1 x + C_2$$

erhält (§. 26 I), so gewinnen die Gleichungen (5) und (6) die Gestalt

$$(9) \qquad C_1\alpha + C_2 = \beta \qquad C_1\xi + C_2 = \chi(\xi)$$

aus (7) und (8) dagegen entspringen die Bedingungen

$$(10) \qquad \sqrt{1+C_1^2} - \mathfrak{L}(\chi'(\xi) - C_1) = 0 \qquad \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} + \mathfrak{L} = 0$$

Durch diese vier Gleichungen (9) und (10) würden nun die vier Unbekannten ξ, C_1, C_2, $\mathfrak{L}$ zu bestimmen sein, während α und β gegebene Größen sind. Indem man aber $\mathfrak{L}$ aus (10) eliminirt, erhält man die einfache Gleichung

$$(11) \qquad 1 + C_1\chi'(\xi) = 0$$

und da durch $\chi'(\xi)$ die trigonometrische Tangente des Winkels, unter welchem die im Punkte B an die Curve $\eta = \chi(x)$ zu legende Berührungslinie gegen die Abscissenaxe geneigt ist, durch $C_1 = p$ hingegen die Tangente des Neigungsw. der gesuchten Linie AB angegeben wird, so lehrt uns nach dem bekannten Satze der analytischen Geometrie die Gl. (11), daß die verlangte Linie AB in ihrem Endpunkte B auf der gegebenen Gränzcurve normal stehen müße.

§. 60.

Zur weiteren Anwendung der im vorigen Paragraphen entwickelten Regeln möge uns das Problem der Brachistochrone dienen; und zwar zunächst, entsprechend §. 27, unter der Voraussetzung, daß die Bewegung im leeren Raume geschehe, während die Voraussetzung eines widerstehenden Mittels, entsprechend §. 49, einem spätern Paragraphen zu Grunde gelegt werden soll (§. 65).

Gegeben seien zwei in derselben vertikalen Ebene liegende Gränzcurven DAL_1, EBL_2 (Fig. 19), gesucht werden die Coordinaten α, β, ξ, η der Punkte A, B und die Werthe der in die Gleichung der Cykloide eintretenden Integrationsconstanten. Es bieten sich jedoch zweierlei Fragen

von gleichem Intereſſe dar: nämlich entweder ſetzt man voraus, daß die Anfangsgeſchwindigkeit v_α eine gegebene Größe (z. B. gleich Null) ſei, gleichviel wo der Punkt A ſeinen Ort angewieſen bekommen wird, — oder man will, daß der fallende Körper mit einer von der Lage des Punktes A nach einem beſtimmten Geſetze abhängigen Anfangsgeſchwindigkeit in die zu findende Bahn AB eintrete, ſo daß wenn wir etwa $v_\alpha = \Gamma(\alpha, \beta)$ ſetzen, die Form der Function Γ gegeben ſei.

I) Ziehen wir die Axe der X wieder vertikal abwärts, ſo würden wir für die Geſchwindigkeit des fallenden Körpers in irgend einem Punkte M der verlangten Curve, deſſen Abſciſſe von einem feſten Anfangspunkt O an gerechnet $= x$ iſt, mit Rückſicht darauf, daß α die variirende Abſciſſe des Gränzpunkts A iſt, den Ausdruck $v = \sqrt{2g(x-\alpha)}$ haben, wofern $v_\alpha = 0$ ſein ſollte. Da wir jedoch größerer Allgemeinheit wegen eine Anfangsgeſchwindigkeit v_α von beliebiger Größe vorausſetzen müßen, ſo möge $v_\alpha = \sqrt{2gh}$ ſein, wobei h nach der üblichen Redeweiſe die zu v_α gehörige Fallhöhe bedeutet. Sobald dann der Körper in einem beliebigen Punkte M angelangt iſt, ſo beſitzt er dieſelbe Endgeſchwindigkeit, wie wenn er durch die Höhe $h+(x-\alpha)$ frei herabgefallen wäre, d. h. es iſt $v = \sqrt{2g(h+x-\alpha)}$. Daher wird die zum Durchlaufen des Bogens AMB erforderliche Zeit durch

$$\int \frac{ds}{v} = \int \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{2g}\sqrt{x+h-\alpha}}\,dx$$

angegeben, und wir können unter Weglaſſung des conſtanten Factors $\frac{1}{\sqrt{2g}}$ ausgehen von

$$\mathbf{V} = \frac{\surd(1+p^2)}{\surd(x+h-\alpha)} \qquad \mathbf{U} = \int_\alpha^\xi \frac{\surd(1+p^2)}{\surd(x+h-\alpha)}\,dx$$

An die Stelle unſerer früheren Differentialgleichung (1) (S. 99) tritt daher jetzt

$$(1) \qquad \partial_p \mathbf{V} = \frac{p}{\surd(x+h-\alpha)\surd(1+p^2)} = \text{Const.} = \frac{1}{\surd(2a)}$$

Daraus folgt

$$(2) \qquad p = \frac{\surd(x+h-\alpha)}{\surd(2a-(x+h-\alpha))}.$$

$$(3) \qquad y = B - \surd(2a(x+h-\alpha) - (x+h-\alpha)^2) + a\,\text{Arc Cos}\frac{a-(x+h-\alpha)}{a}$$

also die Gleichung einer Cykloide, deren Basis horizontal läuft und deren Anfangspunkt G die Coordinaten $x = \alpha - h$, $y = B$ hat. Dieser Anfangspunkt der Cykloide fällt in den gesuchten Gränzpunkt A, wenn $h = 0$ ist, d. h. wenn $v_\alpha = 0$ sein soll.

II) Für die Gränzenbestimmungen erhalten wir nun, wenn $\beta = \varphi(x)$, $\eta = \chi(x)$ die Gleichungen der Curven L_1 und L_2 sind, wenn also die Bedingungen

(4) $\ominus_1 = \beta - \varphi(\alpha) = 0$ (5) $\ominus_2 = \eta - \chi(\xi) = 0$

bestehen und wenn wir zunächst den Fall in's Auge faßen, daß $v_\alpha = \sqrt{2gh}$ einerlei Werth besitzen soll, möge der Anfangspunkt A nun höher oder tiefer angenommen werden, daß also im obigen Ausdrucke für U die Abscisse α eine variirende, dagegen h eine unveränderliche Größe vorstellt, das System der vier Gleichungen:

		Coeff. von
(6)	$V_\xi - \mathfrak{L}_2(\chi'(\xi) - p_\xi) = 0$	$\delta\xi$
(7)	$[\partial_p V]_\xi + \mathfrak{L}_2 = 0$	$(\delta)y_\xi$
(8)	$-V_\alpha + \int_\alpha^\xi \frac{dV}{d\alpha} dx - \mathfrak{L}_1(\varphi'(\alpha) - p_\alpha) = 0$	$\delta\alpha$
(9)	$-[\partial_p V]_\alpha + \mathfrak{L}_1 = 0$	$(\delta)y_\alpha$

Multipliciren wir aber (7) mit $-p_\xi$ und addiren das Produkt zu (6) so entsteht die Gleichung

(10) $[V - \partial_p V.p]_\xi - \mathfrak{L}_2\chi'(\xi) = 0$

welche geradezu als Stellvertreterin von Gl. (6) genommen werden kann. Ebenso findet man

(11) $-[V - \partial_p V.p]_\alpha + \int_\alpha^\xi \frac{dV}{d\alpha} dx - \mathfrak{L}_1\varphi'(\alpha) = 0$

was statt (8) genommen werden kann. Durch (7) (9) (10) (11) sind $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, α, B, ξ, α bestimmt, wenn man nämlich y_ξ, y_α, p_ξ, p_α vermöge (3) und (2) in α, B, ξ, α ausgedrückt hat und die aus (4) und (5) fließenden Bedingungen $y_\alpha = \varphi(\alpha)$, $y_\xi = \chi(\xi)$ zu Hülfe nimmt. Es ist zunächst zu substituiren

$$V = \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{x+h-\alpha}}, \quad V - \partial_p V.p = \frac{1}{\sqrt{x+h-\alpha}\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}\frac{1}{p},$$

$$\partial_p V = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

das in (11) vorkommende bestimmte Integral aber erhält wegen

$$\frac{dV}{d\alpha} = \tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{1+p^2}}{(x+h-\alpha)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{und} \quad \sqrt{1+p^2} = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{2a-(x+h-\alpha)}} \quad \text{und}$$

$$\int \frac{\sqrt{2a}\,.\,dx}{(x+h-\alpha)^{\frac{1}{2}}\sqrt{2a-(x+h-\alpha)}} = C - \frac{2}{\sqrt{2a}}\sqrt{\frac{2a-(x+h-\alpha)}{x+h-\alpha}}$$

$$= \text{Const.} - \frac{2}{\sqrt{2a}}\cdot\frac{1}{p}$$

den Werth

$$(12) \qquad \int_{\alpha}^{\xi} \frac{dV}{d\alpha}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{(2a)}}\left[\frac{1}{p_\xi} - \frac{1}{p_\alpha}\right]$$

Dadurch verwandeln sich die vier Gleichungen (10) (7) (11) (9) nach der Reihe in

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(2a)}}\frac{1}{p_\xi} - \mathfrak{L}_2\chi'(\xi) &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{(2a)}} + \mathfrak{L}_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (14) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(2a)}}\frac{1}{p_\xi} + \mathfrak{L}_1\varphi'(\alpha) &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{(2a)}} - \mathfrak{L}_1 &= 0 \end{aligned}$$

Mittelst Elimination von $\mathfrak{L}_2$ aus (13) findet man

$$(15) \qquad 1 + p_\xi\chi'(\xi) = 0$$

Diese Relation lehrt gerade wie die Gl. (11) im vor. §., daß am Gränzpunkte B die gesuchte Cykloide sich mit der gegebenen Gränzcurve L_2 rechtwinklig durchschneide. Durch Elimination von $\mathfrak{L}_1$ aus (14) dagegen ergiebt sich

$$(16) \qquad 1 + p_\xi\varphi'(\alpha) = 0$$

woraus zu schließen ist, daß die an der Gränzcurve DAL_1 im Punkte A zu construirende Tangente normal auf der im Gränzpunkte B an die Cykloide zu ziehenden Tangente stehen müße. Die Vergleichung dieses Resultats mit dem unmittelbar zuvor gefundenen lehrt, daß die Punkte A und B so ausgewählt werden müßen, daß die daselbst an die Gränzcurven zu legenden Tangenten AT, BU parallel laufen.

Für den besondern Fall $v_\alpha = 0$, $h = 0$ liegt der schon in I) gemachten Bemerkung zu Folge die in A an die Cykloide zu legende Tangente vertikal, was auch daraus, daß $p_\alpha = 0$ wird, zu ersehen ist.

III) Etwas anders verhält sich die Sache, wenn v_α zugleich mit den Coordinaten des Gränzpunkts A nach einem durch die Gleichung $v_\alpha = \Gamma(\alpha, \beta)$ vorgeschriebenen Gesetze variiren soll. Wir können zwar

auch in diesem Falle wie vorhin $v_\alpha = \sqrt{2gh}$ setzen, allein jetzt ist h selbst als eine mit α und $\beta = y_\alpha$ variirende Größe zu behandeln. Zum früheren δU tritt deshalb noch der Bestandtheil $\int \frac{dV}{dh}\delta h\,dx$ hinzu, worin

$$\frac{dV}{dh} = -\tfrac{1}{2}\frac{\sqrt{1+p^2}}{(x+h-\alpha)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{dV}{d\alpha}$$

ist, während δh durch die Gleichung

$$\frac{d\Gamma}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\Gamma}{d\beta}\delta\beta = \delta v_\alpha = \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h}}\delta h$$

bestimmt wird. Man hat daher unter Berücksichtigung, daß $\delta\beta = \delta y_\alpha = p_\alpha\delta\alpha + {}_{(\delta)}y_\alpha$ ist, in δU zu den Coefficienten von $\delta\alpha$ beziehungsweise ${}_{(\delta)}y_\alpha$ die Bestandtheile

$$-\left(\frac{d\Gamma}{d\alpha} + \frac{d\Gamma}{d\beta}p_\alpha\right)\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}}\int_\alpha^\xi \frac{dV}{d\alpha}dx\cdot\delta\alpha,\quad -\frac{d\Gamma}{d\beta}\cdot\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}}\int_\alpha^\xi \frac{dV}{d\alpha}dx\cdot{}_{(\delta)}y_\alpha$$

hinzuzufügen, und da alles Uebrige in dem vorhergehenden Calkul ungeändert bleibt, so erhält man anstatt der Gränzgleichungen (8) und (9) folgende zwei:

$$-V_\alpha + \int_\alpha^\xi \frac{dV}{d\alpha}dx + \mathfrak{L}_1\frac{d\Theta_1}{d\alpha} - \left(\frac{d\Gamma}{d\alpha} + \frac{d\Gamma}{d\beta}p_\alpha\right)\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}}\int_\alpha^\xi \frac{dV}{d\alpha}dx = 0$$

$$-[\partial_p V]_\alpha + \mathfrak{L}_1 - \frac{d\Gamma}{d\beta}\cdot\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}}\int_\alpha^\xi \frac{dV}{d\alpha}dx = 0$$

während (6) und (7) keine Modifikation erleiden. Wendet man statt der ersten dieser beiden neuen Gleichungen, gerade wie vorhin in II) geschehen ist, diejenige an, welche entsteht sobald man die mit $-p_\alpha$ multiplicirte zweite Gleichung zur ersten addirt, und setzt man für das Integral $\int_\alpha^\xi \frac{dV}{d\alpha}dx$ den oben bei (12) gefundenen Werth so wie für V, $\partial_p V$, $\frac{d\Theta_1}{d\alpha}$ ihre Werthe; so ergiebt sich das System

$$(17)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2a}}\frac{1}{p_\xi} + \mathfrak{L}_1\varphi'(\alpha) - \frac{d\Gamma}{d\alpha}\cdot\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2a}}\left(\frac{1}{p_\xi} - \frac{1}{p_\alpha}\right) = 0 \\ &\frac{1}{\sqrt{2a}} - \mathfrak{L}_1 - \frac{d\Gamma}{d\beta}\cdot\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2a}}\left(\frac{1}{p_\xi} - \frac{1}{p_\alpha}\right) = 0 \end{aligned}$$

worin $\sqrt{h} = \frac{\Gamma(\alpha, \beta)}{\sqrt{2g}} = \frac{\Gamma(\alpha, \varphi(\alpha))}{\sqrt{2g}}$ ist. Die durch Elimination von $\mathfrak{L}_1$ hieraus abzuleitende Gleichung in Verbindung mit (15) und mit $y_\alpha = \varphi(\alpha)$, $y_\xi = \chi(\xi)$ würde jetzt die gesuchten Werthe von a, B, ξ, α liefern.

IV) Das interessanteste Beispiel zu der hier vorausgesetzten allgemeinen Beschaffenheit von v_α ist unstreitig, wenn gefordert wird, daß der fallende Körper mit derjenigen Geschwindigkeit in die cykloidische Bahn **AMB** eintreten soll, welche er bei dem Herabfallen von einem festen Punkte **C** auf irgend einem vorgeschriebenen Wege **CA** erlangt haben wird. Sei $x = c$ die Abscisse des Punkts **C**, so muß $v_\alpha = \sqrt{2g(\alpha - c)}$ sein, was mit $v_\alpha = \Gamma(\alpha, \beta) = \sqrt{2gh}$ verglichen zu den Relationen

$$h = (\alpha - c) \qquad \frac{d\Gamma}{d\alpha} = \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{(\alpha - c)}} = \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{h}} \qquad \frac{d\Gamma}{d\beta} = 0$$

führt. Dadurch reduciren sich die Gleichungen (17) auf

$$\frac{1}{\sqrt{2a}}\frac{1}{p_\alpha} + \mathfrak{L}_1 \varphi'(\alpha) = 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{2a}} - \mathfrak{L}_1 = 0$$

und hieraus fließt die Bedingung

$$(18) \qquad 1 + p_\alpha \varphi'(\alpha) = 0$$

welche jetzt an die Stelle von (16) getreten ist, wogegen die vorige Gleichung (15) auch hier gilt. Um den gegenwärtig gemachten Forderungen zu genügen, muß also die gesuchte Cykloide *sowohl in* **A** *wie in* **B** *die Gränzcurven rechtwinklig schneiden*. — Uebrigens würden wir, wenn wir von Anfang an blos diesen letzten Fall im Auge gehabt hätten, den Calkul dadurch vereinfacht haben, daß wir die durch **C** laufende Horizontallinie zur Axe der **Y** angenommen hätten. Denn dadurch würde $c = 0$, $h = \alpha$, $v = \sqrt{2gx}$, $\mathbf{V} = \frac{\sqrt{1 + p^2}}{\sqrt{x}}$,

$$y - B = a \operatorname{Arc\,Cos} \frac{a - x}{a} - \sqrt{2ax - x^2}$$

geworden sein, — woraus man zugleich ersieht, daß der Anfangspunkt der Cykloide nämlich **G** in der durch **C** gezogenen Horizontallinie liegt, — und die Integrale $\int \frac{d\mathbf{V}}{d\alpha} dx$, $\int \frac{d\mathbf{V}}{dh} dx$ hätten gar nicht in den Gränzgleichungen existirt.

V) Wenn man von der Curve AB zu einer beliebig geänderten Nachbarcurve A_1B_1 übergeht, so wird sich natürlich der Abstand der durch die Gränzpunkte A, B zu ziehenden Vertikallinien ändern. Wie werden sich aber, kann man fragen, die Gränzbestimmungen gestalten, wenn der gedachte Abstand eine gegebene Größe, etwa $y_\xi - y_\alpha = k$ sein soll? Nach unsern im vor. §. entwickelten Vorschriften ist dann, nachdem man zu δU noch das Produkt

$$\mathfrak{L}_3(\delta y_\xi - \delta y_\alpha) = \mathfrak{L}_3(p_\xi \delta\xi - p_\alpha \delta\alpha + {}_{(\delta)}y_\xi - {}_{(\delta)}y_\alpha)$$

hinzugefügt hat, wieder der Coefficient jeder der vier Gränzvariationen gleich Null zu setzen. Machen wir daher im Uebrigen dieselben Voraussetzungen wie oben in II), so haben wir nur nöthig zu den linken Theilen der Gleichungen (6) bis (9) nach der Reihe die Glieder $\mathfrak{L}_3 p_\xi$, $\mathfrak{L}_3$, $-\mathfrak{L}_3 p_\alpha$, $-\mathfrak{L}_3$ zu addiren. Die Gleichungen (10) und (11) kommen dann aber genau wie in der früheren Gestalt zum Vorschein; statt der Systeme (13) und (14) erhalten wir daher

$$\frac{1}{\sqrt{2a}}\frac{1}{p_\xi} - \mathfrak{L}_2\chi'(\xi) = 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{2a}}\frac{1}{p_\xi} + \mathfrak{L}_1\varphi'(\alpha) = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2a}} + \mathfrak{L}_2 + \mathfrak{L}_3 = 0 \qquad \frac{1}{\sqrt{2a}} - \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_3 = 0$$

Durch Elimination von $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$ wird man hieraus ohne Mühe die Relation (19) $\chi'(\xi) = \varphi'(\alpha)$ finden. Es müßen also auch jetzt die Tangenten AT, BU parallel laufen, jedoch ohne daß die Cykloide mit einer der Gränzcurven sich unter rechten Winkeln zu durchschneiden brauchte. Die vier Unbekannten a, B, ξ, α würden aus (19) in Verbindung mit den Bedingungen $y_\xi - y_\alpha = k$, $y_\alpha = \varphi(\alpha)$, $y_\xi = \chi(\xi)$ zu bestimmen sein.

§. 61.

Die im Vorhergehenden entwickelten Regeln sind selbstverständlich auch auf die Gränzenbestimmungen bei den Aufgaben über relatives Maximum oder Minimum (§. 39 fgg.) anwendbar, indem dabei nur $\bar{U} = \int(V + \lambda W)dx$ an die Stelle von U, also $V + \lambda W$ an die Stelle von V sowohl in der Hauptgleichung als in den §. 59 aufgestellten Gränzgleichungen tritt. Um dieses an einem Beispiele zu zeigen, wählen wir die in §. 40 aufgelöste Aufgabe, und nehmen wieder, wie im vor-

hergehenden Paragraphen, zwei Gränzcurven L_1, L_2 an, deren Gleichungen $\beta = \varphi(x)$ resp. $\eta = \chi(x)$ seien. Indem wir voraussetzen, daß nach §. 40 bereits die Kreisgleichung

$$(1) \qquad y - C_2 = \mp\sqrt{\lambda^2 - (x - C_1)^2}$$

gefunden worden sei, haben wir nun in die Gleichungen (4) des §. 59 für V den Ausdruck $y + \lambda\sqrt{(1 + p^2)}$ einzusetzen. Daher erhalten wir die vier Gränzgleichungen

$$y_\xi + \lambda\sqrt{(1 + p_\xi^2)} - \mathfrak{L}_2(\chi'(\xi) - p_\xi) = 0$$

$$\left[\frac{\lambda p}{\sqrt{(1 + p^2)}}\right]_\xi + \mathfrak{L}_2 = 0$$

$$-y_\alpha - \lambda\sqrt{(1 + p_\alpha^2)} - \mathfrak{L}_1(\varphi'(\alpha) - p_\alpha) = 0$$

$$-\left[\frac{\lambda p}{\sqrt{(1 + p^2)}}\right]_\alpha + \mathfrak{L}_1 = 0$$

oder wenn wir $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ eliminiren

$$(2) \qquad y_\xi\sqrt{1 + p_\xi^2} + \lambda + \lambda p_\xi\chi'(\xi) = 0$$

$$(3) \qquad y_\alpha\sqrt{1 + p_\alpha^2} + \lambda + \lambda p_\alpha\varphi'(\alpha) = 0$$

Hieraus in Verbindung mit $y_\alpha = \varphi(\alpha)$, $y_\xi = \chi(\xi)$ sind, nachdem man y_ξ, p_ξ, y_α, p_α mittelst (1) in ξ, α, C_1, C_2 ausgedrückt hat, diese vier Unbekannten zu bestimmen, während der Kreishalbmeßer λ bekanntlich von dem Werthe $\mathfrak{A}$ abhängt, welchen $\int \mathfrak{W} dx = \int \sqrt{(1 + p^2)} dx$ erhalten soll. — Ohne jedoch die Functionen φ, χ näher zu specificiren und ohne auf die Berechnung von λ einzugehen, welche sogar in dem früher behandelten einfacheren Falle mit eigenthümlichen Schwierigkeiten verknüpft war (§. 40 III), wird man schon aus den gefundenen Gleichungen (2) und (3) bei einer etwas sorgfältigeren Betrachtung und indem man, wie auch in der Aufgabe des vorigen Paragraphen geschehen ist, p_ξ und p_α beibehält aber λ eliminirt, eine Bedingungsgleichung abzuleiten im Stande sein, welche eine geometrische Interpretation zuläßt. Aus (2) und (3) folgt nämlich

$$(4) \qquad \frac{y_\alpha\sqrt{1 + p_\alpha^2}}{1 + p_\alpha\varphi'(\alpha)} = \frac{y_\xi\sqrt{1 + p_\xi^2}}{1 + p_\xi\chi'(\xi)}$$

Zieht man nun (Fig. 20) im Punkte A die Tangente AT_1 an die Gränzcurve L_1 und die Tangente AS_1 an die verlangte Maximumscurve d. h. an den Kreisbogen AB, so ist $p_\alpha = \text{tang}\, S_1$, $\varphi'(\alpha) = \text{tang}\, T_1$ und

die linke Seite von (4) wird, weil $\sqrt{1+p_a^2} = \pm\frac{1}{\text{Cos } S_1}$ zu setzen ist, je nachdem $S_1 \lessgtr \frac{1}{2}\pi$ ist,

$$\pm\frac{y_a}{\text{Cos } S_1 + \text{Sin } S_1 \text{ tang } T_1} = \pm\frac{y_a \text{ Cos } T_1}{\text{Cos } (T_1 - S_1)} = \pm\frac{y_a \text{ Cos } T_1}{\text{Cos } T_1 A S_1}$$

Wenn man nun auf die Tangente AT_1 vom Fußpunkte der Gränzordinate $HA = y_a$ das Perpendikel Hh fällt, so wird W. AHh entweder gleich W. T_1 oder gleich $\pi - T_1$, also

$$Hh = \pm y_a \text{ Cos } T_1$$

Ist ferner C der Mittelpunkt des Kreisbogens AB, also $CA = CB = \pm\lambda$, so ist W. T_1AS_1 gleich $\frac{1}{2}\pi \pm CAT_1$, mithin

$$\text{Cos } T_1 A S_1 = \pm \text{Sin } CAT_1$$

Hieraus ersieht man, daß der linke Theil der Gleichung (4) mit dem Quotienten $\pm\frac{Hh}{\text{Sin } CAT_1}$ gleichbedeutend ist.

Ebenso wird, sobald von K aus das Perpendikel Kk auf die Berührungslinie BT_2 der anderen Gränzcurve L_2 gefällt ist, der rechte Theil der Gl. (4) durch $\pm\frac{Kk}{\text{Sin } CBT_2}$ zur Anschauung gebracht. Die genannte Gleichung ist demnach durch die Proportion

$$\frac{Hh}{Kk} = \frac{\text{Sin } CAT_1}{\text{Sin } CBT_2}$$

oder auch, wenn wir noch vom Centrum C die Perpendikel Cl_1, Cl_2 auf AT_1 resp. BT_2 fällen, durch die Proportion

$$Hh : Kk = Cl_1 : Cl_2$$

auszudrücken; d. h. die Abstände des gesuchten Mittelpunkts von den an die Gränzcurven in den Punkten A, B zu ziehenden Tangenten müßen den Abständen der Fußpunkte der Gränzordinaten von eben denselben Tangenten direct proportional sein.

§. 62.

Indem wir den Gang, welcher im dritten und vierten Capitel von uns befolgt worden ist, auch gegenwärtig im Allgemeinen einhalten, haben wir jetzt die Variation δU so wie die Gränzgleichungen bei der Bestimmung des Maximums oder Minimums von U für die Fälle zu unter-

suchen, wenn der dem Integrale U zu Grunde liegende Ausdruck V die Form hat

$$V = F\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \ldots\ s,\ \frac{ds}{dx},\ \frac{d^2s}{dx^2},\ \ldots\right)$$

I) Nach der Formel (1) in §. 58, welche wie wir daselbst unter III) schon bemerkt haben, auch für den gegenwärtig vorliegenden Fall gilt, haben wir

$$(1)\qquad \delta\int_a^\xi V dx = V_\xi\delta\xi - V_\alpha\delta\alpha + \int_a^\xi {}_{(\delta)}V dx$$

wobei der entwickelte Ausdruck für das letzte Integral aus §. 45 zu entnehmen ist, indem er daselbst die linke Seite der Gl. (1) (Seite 197) bildet, nur mit der Modifikation, daß man überall $_{(\delta)}$ für δ schreibe. Wenn jedoch auch einige der Größen $\xi,\ \alpha,\ y_\xi,\ y_\alpha, p_\xi, \ldots\ s_\xi,\ s_\alpha,\ \mathfrak{p}_\xi, \ldots$ in V explicit vorhanden sind, so kommen natürlich noch Bestandtheile wie

$$\int\frac{dV}{d\xi}dx\delta\xi,\ \int\frac{dV}{d\alpha}dx\delta\alpha,\ \int\frac{dV}{d.y_\xi}dx\delta y_\xi, \ldots\ \int\frac{dV}{d.s_\xi}dx\delta s_\xi, \ldots$$

hinzu. Man wird dann die unter den Integralzeichen stehenden Gränzvariationen $\delta\xi,\ \delta\alpha,\ \delta y_\xi,\ \delta y_\alpha,\ \delta p_\xi, \ldots\ \delta s_\xi,\ \delta s_\alpha,\ \delta\mathfrak{p}_\xi, \ldots$ wieder als constante Factoren außerhalb des Integralzeichens setzen und unter Benutzung der Relationen $\delta y_\xi = {}_{(\delta)}y_\xi + p_\xi\delta\xi$, $\delta y_\alpha = {}_{(\delta)}y_\alpha + p_\alpha\delta\alpha$ u. s. w. gerade so verfahren wie in §. 58 IV) gezeigt worden ist.

II) Wenn nun verlangt wird die Functionen $y = f(x)$, $s = f(x)$ so zu bestimmen, daß U ein Maximum oder Minimum werde, und wenn, wie wir zunächst hier annehmen, y und s von einander unabhängig sind, so gelangt man offenbar zu den S. 197 mit (2) bezeichneten Hauptgleichungen; die Gränzgleichungen aber findet man dadurch, daß man nach dem in §. 59 befolgten Verfahren die Coefficienten von $\delta\xi,\ \delta\alpha,$ $_{(\delta)}y_\xi,\ _{(\delta)}s_\xi,\ _{(\delta)}y_\alpha,\ _{(\delta)}s_\alpha$ ꝛc. mit Zuziehung der Produkte $\mathfrak{L}_1\delta\ominus_1,\ \mathfrak{L}_2\delta\ominus_2, \ldots$ bildet und jeden einzelnen (insofern nicht etwa die betreffende Gränzvariation selbst Null sein soll) gleich Null setzt.

III) Zur Erläuterung wollen wir dieselben zwei Aufgaben, welche wir in §. 59 und §. 60 als planimetrische behandelt haben, gegenwärtig in die Geometrie des Raums übertragen. — Bei der ersteren Aufgabe: die kürzeste Linie AB zwischen den beiden gegebenen Geraden

$$(2)\qquad \begin{aligned} y_\alpha &= A_1\alpha + B_1 \\ s_\alpha &= \mathfrak{A}_1\alpha + \mathfrak{B}_1 \end{aligned} \qquad (3)\qquad \begin{aligned} y_\xi &= A_2\xi + B_2 \\ s_\xi &= \mathfrak{A}_2\xi + \mathfrak{B}_2 \end{aligned}$$

zu bestimmen, haben wir auszugehen von $\mathrm{V} = \sqrt{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)}$, also liefern die Gleichungen (2) des §. 45 sofort $d\partial_p \mathrm{V} = d\frac{p}{\mathrm{V}} = 0$, $d\partial_{\mathfrak{p}} \mathrm{V} = d\frac{\mathfrak{p}}{\mathrm{V}} = 0$ d. h.

$$(4) \qquad \mathrm{C}_1 = \frac{p}{\sqrt{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)}} \qquad (5) \qquad \mathrm{C}_2 = \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)}}$$

Durch Division folgt hieraus $\mathfrak{p} = \frac{\mathrm{C}_2}{\mathrm{C}_1} p$ oder $p = \frac{\mathrm{C}_1}{\mathrm{C}_2} \mathfrak{p}$ und mit Hülfe hiervon $\mathfrak{p}$ aus (4) resp. p aus (5) eliminirend gelangen wir zu zwei Gleichungen, aus welchen für p und $\mathfrak{p}$ constante Werthe hervorgehen, woraus also zu schließen ist, daß die fragliche Curve eine gerade Linie sein müße. Stellen wir ihre Gleichungen durch

$$(6) \qquad \begin{aligned} y &= Cx + C' \\ \mathfrak{z} &= \mathfrak{C}x + \mathfrak{C}' \end{aligned}$$

vor, so wird $\mathrm{V}_\xi = \mathrm{V}_\alpha = \sqrt{(1 + C^2 + \mathfrak{C}^2)}$

$$\partial_p \mathrm{V} = \frac{C}{\sqrt{(1 + C^2 + \mathfrak{C}^2)}} \qquad \partial_{\mathfrak{p}} \mathrm{V} = \frac{\mathfrak{C}}{\sqrt{(1 + C^2 + \mathfrak{C}^2)}}$$

und da in V kein explicites ξ, α, y_ξ oder dgl. vorhanden ist, so zieht sich das Aggregat der vom Integralzeichen befreiten Glieder von $\delta\mathrm{U}$ zusammen in

$$D\delta\xi - D\delta\alpha + \frac{C}{D}({}_\delta)y_\xi - \frac{C}{D}({}_\delta)y_\alpha + \frac{\mathfrak{C}}{D}({}_\delta)\mathfrak{z}_\xi - \frac{\mathfrak{C}}{D}({}_\delta)\mathfrak{z}_\alpha$$

worin wir zur Abkürzung $\sqrt{(1 + C^2 + \mathfrak{C}^2)}$ durch D vorgestellt haben. Ferner wird man aus (2) und (3) mit Rücksicht auf $p = C$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{C}$ die Bedingungen

$$\delta\ominus_1 = ({}_\delta)y_\alpha + (C - A_1)\delta\alpha = 0 \qquad \delta\ominus_3 = ({}_\delta)y_\xi + (C - A_2)\delta\xi = 0$$
$$\delta\ominus_2 = ({}_\delta)\mathfrak{z}_\alpha + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A}_1)\delta\alpha = 0 \qquad \delta\ominus_4 = ({}_\delta)\mathfrak{z}_\xi + (\mathfrak{C} - \mathfrak{A}_2)\delta\xi = 0$$

ableiten; daher ergiebt sich das System folgender sechs Gleichungen

$$(7) \qquad \begin{aligned} D + \mathfrak{L}_3(C - A_2) + \mathfrak{L}_4(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}_2) &= 0 \\ -D + \mathfrak{L}_1(C - A_1) + \mathfrak{L}_2(\mathfrak{C} - \mathfrak{A}_1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{C}{D} + \mathfrak{L}_3 = 0 \qquad \frac{C}{D} - \mathfrak{L}_1 = 0 \qquad \frac{\mathfrak{C}}{D} + \mathfrak{L}_4 = 0 \qquad \frac{\mathfrak{C}}{D} - \mathfrak{L}_2 = 0$$

Die Anzahl der Unbekannten ist gegenwärtig zehn; nämlich vier Multiplikatoren $\mathfrak{L}$, vier Constanten in den Gleichungen (6), endlich ξ und α. Drückt man aber in (2) und (3) die Größen y_α, $\mathfrak{z}_\alpha$, y_ξ, $\mathfrak{z}_\xi$ gemäß

(6) durch ξ, α und die vier Integrationsconstanten aus, so entstehen vier neue Gleichungen, welche in Verbindung mit (7) zur Bestimmung der genannten Unbekannten gerade ausreichen. Indem wir aus (7) zunächst $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$, $\mathfrak{L}_4$ eliminiren, erhalten wir ohne Mühe

$$1 + A_1 C + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{C} = 0$$
$$1 + A_2 C + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{C} = 0$$

Nach dem bekannten Satze der analytischen Geometrie sagt uns die erste dieser beiden Gleichungen, daß die Geraden (6) und (2) auf einander senkrecht stehen müßen, die andere Gleichung aber sagt dasselbe in Betreff der Geraden (6) und (3). Somit haben wir durch den Calkul den schön in der Elementar-Stereometrie zur Sprache gebrachten Lehrsatz bewiesen, daß die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei gegebenen Geraden diejenige Gerade ist, welche auf beiden perpendikulär steht.

IV) Wir dürfen jedoch bei dieser Gelegenheit nicht unterlaßen darauf hinzuweisen, daß derartige Gränzbestimmungen unter geeigneten Umständen in einer abgekürzten Form sich durchführen laßen, wenn man nicht, wie wir hier und im Vorhergehenden immer gethan haben, die reinen Variationen einführt, sondern unmittelbar mit den gemischten Variationen rechnet. Nehmen wir, um dieses zu zeigen, sogleich die noch etwas allgemeinere Aufgabe, zwischen zwei gegebenen Gränzcurven L_1 und L_2, nämlich

$$(8)\quad \begin{matrix} \ominus_1 = y_\alpha - \varphi_1(\alpha) = 0 \\ \ominus_2 = z_\alpha - \chi_1(\alpha) = 0 \end{matrix} \qquad (9)\quad \begin{matrix} \ominus_3 = y_\xi - \varphi_2(\xi) = 0 \\ \ominus_4 = z_\xi - \chi_2(\xi) = 0 \end{matrix}$$

die kürzeste Verbindungslinie zu finden. Es muß dann sein

$$(\ominus)\quad \begin{matrix} \delta y_\alpha - \frac{d\varphi_1(\alpha)}{d\alpha}\delta\alpha = 0 & \qquad \delta y_\xi - \frac{d\varphi_2(\xi)}{d\xi}\delta\xi = 0 \\ \delta z_\alpha - \frac{d\chi_1(\alpha)}{d\alpha}\delta\alpha = 0 & \qquad \delta z_\xi - \frac{d\chi_2(\xi)}{d\xi}\delta\xi = 0 \end{matrix}$$

Ferner erhalten wir aus $U = \int_\alpha^\xi V dx = \int_\alpha^\xi \sqrt{(1 + p^2 + \mathfrak{p}^2)} dx$ für die Variation $\delta U = V_\xi \delta\xi - V_\alpha \delta\alpha + \int_\alpha^\xi (\delta) V dx$ unter Benutzung der Formel (1) in §. 45, gerade wie vorhin, den Ausdruck

$$\delta U = V_\xi \delta\xi - V_\alpha \delta\alpha + \left[\frac{p}{V}\right]_\xi (\delta) y_\xi + \left[\frac{\mathfrak{p}}{V}\right]_\xi (\delta) z_\xi$$
$$- \left[\frac{p}{V}\right]_\alpha (\delta) y_\alpha - \left[\frac{\mathfrak{p}}{V}\right]_\alpha (\delta) z_\alpha$$

Die noch unter dem Integralzeichen befindlichen Bestandtheile von δU haben wir weggelaßen, weil durch die bereits gefundenen Gleichungen (6) ihre Summe gleich Null wird. — Führen wir nun hierin die gemischten Variationen ein, so daß z. B. $\delta y_\xi - p_\xi \delta\xi$ an die Stelle von $(\delta)y_\xi$ tritt, und setzen für V seinen Werth, so erhalten wir nach einer leichten Reduction $\delta U =$

$$\left[\frac{1}{V}\right]_\xi \delta\xi + \left[\frac{p}{V}\right]_\xi \delta y_\xi + \left[\frac{\mathfrak{p}}{V}\right]_\xi \delta z_\xi - \left[\frac{1}{V}\right]_\alpha \delta\alpha - \left[\frac{p}{V}\right]_\alpha \delta y_\alpha - \left[\frac{\mathfrak{p}}{V}\right]_\alpha \delta z_\alpha$$

Dieser Ausdruck, welchem man wegen $V = \frac{ds}{dx}$ auch die Form geben kann

$$\delta U = \left(\left[\frac{dx}{ds}\right]_\xi \delta\xi + \left[\frac{dy}{ds}\right]_\xi \delta y_\xi + \left[\frac{dz}{ds}\right]_\xi \delta z_\xi\right)$$

$$(10) \qquad - \left(\left[\frac{dx}{ds}\right]_\alpha \delta\alpha + \left[\frac{dy}{ds}\right]_\alpha \delta y_\alpha + \left[\frac{dz}{ds}\right]_\alpha \delta z_\alpha\right)$$

wobei ds_α, ds_ξ das erste beziehungsw. das letzte Element der gesuchten Linie AB bedeutet, muß nun verschwinden, mit dem Vorbehalte freilich, daß die darin vorkommenden sechs Variationen noch den obigen Bedingungsgleichungen (⏀) unterworfen werden. Durch jene Bedingungsgleichungen ist aber einerseits nur δy_ξ und δz_ξ von $\delta\xi$, andererseits δy_α, δz_α von $\delta\alpha$ abhängig, ohne daß eine Relation zwischen $\delta\xi$ und $\delta\alpha$ bestände. Deshalb muß in (10) sowohl der Minuendus wie der Subtrahendus für sich verschwinden. Dies vorausgeschickt, reicht es, ohne daß man aus (⏀) für δy_ξ und δz_ξ wirklich zu substituiren brauchte, zum Zwecke weiterer geometrischer Discussion schon hin sich zu denken, es seien $\xi + \delta\xi$, $y_\xi + \delta y_\xi$, $z_\xi + \delta z_\xi$ die Coordinaten eines dem Punkt B nächstanliegenden Punktes B_1 der Gränzcurve (9), so daß also zwei der genannten Größen von der dritten abhängen, oder anders ausgedrückt es seien $\delta\xi$, δy_ξ, δz_ξ die in Bezug auf die drei Coordinatenaxen genommenen Projectionen eines Elements BB_1 jener Gränzcurve. Bezeichnen wir dieses zur Unterscheidung von ds und um größerer Symmetrie willen durch $\delta\varsigma$, so sind $\frac{\delta\xi}{\delta\varsigma}$, $\frac{\delta y_\xi}{\delta\varsigma}$, $\frac{\delta z_\xi}{\delta\varsigma}$ die Cosinus der drei Winkel, welche die an die Gränzcurve L_2 im Punkte B zu ziehende Tangente mit den Coordinatenaxen einschließt, während $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Neigungsw. der Linie AB gegen die Coor-

dinatenaxen sind. Zufolge dem bekannten Satze, wonach man den Cosinus des Winkels zwischen zwei Geraden aus den sechs Cosinussen ihrer Neigungswinkel gegen die Coordinatenaxen berechnet, wird man jetzt aus der Gleichung

$$\left[\frac{dx}{ds}\right]_\xi \frac{\delta\xi}{\delta\varsigma} + \left[\frac{dy}{ds}\right]_\xi \frac{\delta y_\xi}{\delta\varsigma} + \left[\frac{dz}{ds}\right]_\xi \frac{\delta z_\xi}{\delta\varsigma} = 0$$

sofort erkennen, daß in B die gesuchte Linie AB auf der Gränzcurve L_2 senkrecht stehen müße. Und dieselbe Betrachtung auf den Subtrahendus in (10) bezogen führt zu dem gleichen Schluß in Beziehung auf die andere Gränzcurve.

Machen wir dagegen die Voraussetzung, anstatt einer Gränzcurve (8), worauf A gefunden werden sollte, wäre nur eine Fläche gegeben, nämlich $\Theta_1(\alpha, y_\alpha, z_\alpha) = 0$

so besteht auch zwischen $\delta\alpha$, δy_α, δz_α blos die einzige Bedingungsgleichung

$$\frac{d\Theta_1}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\Theta_1}{d.y_\alpha}\delta y_\alpha + \frac{d\Theta_1}{d.z_\alpha}\delta z_\alpha = 0$$

so daß zwei von den genannten Variationen willkührlich bleiben. Wenn man daher diese Gleichung mit einem Factor $\mathfrak{L}_1$ multiplicirt zu dem Subtrahendus der Differenz (10) addirt, alsdann die Coefficienten von $\delta\alpha$, δy_α, δz_α einzeln gleich Null und die drei Werthe von $\mathfrak{L}_1$ einander gleich setzt, so findet man das System der zwei Gleichungen

$$\frac{\left[\frac{dx}{ds}\right]_\alpha}{\frac{d\Theta_1}{d\alpha}} = \frac{\left[\frac{dy}{ds}\right]_\alpha}{\frac{d\Theta_1}{d.y_\alpha}} = \frac{\left[\frac{dz}{ds}\right]_\alpha}{\frac{d\Theta_1}{d.z_\alpha}}$$

Der gemeinsame Werth dieser drei Quotienten oder was dasselbe ist, von $-\mathfrak{L}_1$, wird augenscheinlich, wenn wir $\sqrt{\left[\left(\frac{d\Theta_1}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta_1}{d.y_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\Theta_1}{d.z_\alpha}\right)^2\right]} = D$

setzen und erwägen, daß die Quadratsumme der drei Zähler gleich der Einheit ist, durch $\frac{1}{D}$ angegeben; daher ist

$$(11) \qquad \left[\frac{dx}{ds}\right]_\alpha = \frac{1}{D}\frac{d\Theta_1}{d\alpha} \qquad \left[\frac{dy}{ds}\right]_\alpha = \frac{1}{D}\frac{d\Theta_1}{d.y_\alpha} \qquad \left[\frac{dz}{ds}\right]_\alpha = \frac{1}{D}\frac{d\Theta_1}{d.z_\alpha}$$

Allein die drei auf der rechten Seite dieser Gleichungen stehenden Brüche geben, wie man weiß, die Cosinus der Winkel an, unter welchen die im Punkte A auf die Fläche $\Theta_1 = 0$ zu errichtende Normallinie gegen die drei Coordinatenaxen geneigt ist. Daher haben wir aus (11) die Folge-

rung zu ziehen, daß die verlangte Linie **AB** auf der Gränzfläche $\Theta_1 = 0$ normal stehen müße.

Hiernach versteht es sich auch von selbst, daß man bei der Frage nach der kürzesten Linie zwischen zwei gegebenen Gränzflächen auf die Forderung stoßen werde, eine solche Gerade zu ziehen, die auf beiden Flächen normal steht.

V) Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung der Brachistochrone zwischen zwei beliebig im Raume verlaufenden Gränzcurven. Sehen wir einstweilen noch als unentschieden an, ob die gesuchte Curve eine ebene sei oder nicht, beziehen wir sie also auf drei rechtwinklige Coordinatenaxen und ziehen wieder die Axe der **X** vertikal abwärts, so wird die zum Durchlaufen des Bogens **AMB** erforderliche Zeit durch

$$\int \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}}{\sqrt{x-\alpha}} dx$$

angegeben, und wir können also nach Weglaßung des constanten Divisors $\sqrt{(2g)}$ ausgehen von

$$\mathbf{V} = \frac{\sqrt{(1+p^2+\mathfrak{p}^2)}}{\sqrt{(x-\alpha)}} \qquad \mathbf{U} = \int_a^{\xi} \frac{\sqrt{(1+p^2+\mathfrak{p}^2)}}{\sqrt{(x-\alpha)}} dx$$

Wir faßen die Aufgabe hier in dem Sinne, daß $v_a = 0$ sein solle. Da zwischen y und z keine Abhängigkeit Statt findet, so haben wir zufolge den Gleichungen (2) in §. 45, welche sich wegen $\partial_y \mathbf{V} = 0$, $\partial_z \mathbf{V} = 0$ sofort integriren laßen,

$$(12) \qquad \begin{aligned} \partial_p \mathbf{V} &= \frac{p}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}} = \mathbf{C}_1 \\ \partial_{\mathfrak{p}} \mathbf{V} &= \frac{\mathfrak{p}}{\sqrt{x-\alpha}\sqrt{1+p^2+\mathfrak{p}^2}} = \mathbf{C}_2 \end{aligned}$$

Hieraus fließt $\frac{p}{\mathfrak{p}} = \frac{dy}{dz} = \frac{\mathbf{C}_1}{\mathbf{C}_2}$, also $y = \frac{\mathbf{C}_1}{\mathbf{C}_2} z + \mathbf{C}_3$ und da dieses die Gleichung einer Ebene ist, die mit der Axe der **X** parallel läuft, so schließen wir sofort, daß die gesuchte Curve in einer vertikalen Ebene liege. Diese könnte man jetzt zur Erleichterung des weitern Calkuls als Ebene der **XY** annehmen, so daß für alle Punkte der gesuchten Curve $z = 0$ würde. Dieses ist aber genau der Standpunkt, den wir in §. 27 resp. §. 60 I) eingenommen hatten; wir würden also auf die dort gefundene Cykloidengleichung zurückgeführt, in welche übrigens, da jede der

Differentialgleichungen (12) zur ersten Ordnung gehört, nur noch eine Integrationsconstante C_4 eintreten würde.

Was alsdann die Gränzbestimmungen anbelangt, so wird, weil die beiden Gränzcurven als nicht in einer Ebene liegend vorausgesetzt werden, wieder nöthig mit drei Coordinaten zu rechnen. Zunächst hat man

$$\delta U = V_\xi \delta\xi - \left(V_\alpha - \int_a^\xi \frac{dV}{d\alpha} dx\right)\delta\alpha$$
$$+ [\partial_p V]_\xi (\delta) y_\xi - [\partial_p V]_\alpha (\delta) y_\alpha + [\partial_\mathfrak{p} V]_\xi (\delta) z_\xi - [\partial_\mathfrak{p} V]_\alpha (\delta) z_\alpha$$

Um für das hierin vorkommende Integral auf möglichst bequeme Weise den Werth zu finden, bemerke man, daß $\frac{dV}{d\alpha} dx = -\frac{dV}{dx} dx$ d. h.

$$-\frac{dV}{d\alpha} dx = dV - \partial_p V\, dp - \partial_\mathfrak{p} V\, d\mathfrak{p} = dV - C_1\, dp - C_2\, d\mathfrak{p}$$

ist. Daraus folgt durch Integration

$$(13) \qquad -\int \frac{dV}{d\alpha} dx = V_\xi - V_\alpha - C_1(p_\xi - p_\alpha) - C_2(\mathfrak{p}_\xi - \mathfrak{p}_\alpha)$$

Nach Substitution dieses Werths in die vorangehende Formel für δU werden sich jetzt unter Heranziehung der aus den Gleichungen der Gränzcurven abzuleitenden Bedingungen $\mathfrak{L}_1 \delta\ominus_1 = 0$, $\mathfrak{L}_2 \delta\ominus_2 = 0$ u. s. w. ohne die geringste Schwierigkeit gerade wie in III) bei (7) geschehen ist, die verlangten Bestimmungsgleichungen für ξ, α und die vier Integrationsconstanten C_1, C_2, C_3, C_4 aufstellen laßen. Es dürfte jedoch lehrreicher sein, wenn wir auch gegenwärtig die an den Gränzen Statt findenden Verhältnisse geradezu (anstatt die Coefficienten von $(\delta)y_\xi$, $(\delta)y_\alpha$ ꝛc. zu entwickeln) durch Rechnung mit den Variationen $\delta\xi$, $\delta\alpha$, δy_ξ, δy_α, δz_ξ, δz_α zu entdecken suchen. In dieser Absicht haben wir den obigen Ausdruck für δU (unter Zuziehung von (13)) umzugestalten in

$$\delta U = (V_\xi - C_1 p_\xi - C_2 \mathfrak{p}_\xi)\delta\xi - (V_\xi - C_1 p_\xi - C_2 \mathfrak{p}_\xi)\delta\alpha$$
$$+ C_1 \delta y_\xi + C_2 \delta z_\xi - C_1 \delta y_\alpha - C_2 \delta z_\alpha$$

Setzen wir die Werthe $\frac{1}{\sqrt{x-\alpha}}\frac{ds}{dx}$, $\frac{1}{\sqrt{\xi-\alpha}}\left[\frac{dy}{ds}\right]_\xi$, $\frac{1}{\sqrt{\xi-\alpha}}\left[\frac{dz}{ds}\right]_\xi$ an die Stelle von V, C_1, C_2, so erhalten wir ganz einfach

$$\delta U = \left(\left[\frac{dx}{ds}\right]_\xi \delta\xi + \left[\frac{dy}{ds}\right]_\xi \delta y_\xi + \left[\frac{dz}{ds}\right]_\xi \delta z_\xi\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{(\xi-\alpha)}}$$
$$- \left(\left[\frac{dx}{ds}\right]_\xi \delta\alpha + \left[\frac{dy}{ds}\right]_\xi \delta y_\alpha + \left[\frac{dz}{ds}\right]_\xi \delta z_\alpha\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{(\xi-\alpha)}}$$

Gerade wie in dem vorhergehenden Beispiele bei (10) und unter denselben Vorbehalten folgt hieraus

$$\left[\frac{dx}{ds}\right]_\xi \delta\xi + \left[\frac{dy}{ds}\right]_\xi \delta y_\xi + \left[\frac{dz}{ds}\right]_\xi \delta z_\xi = 0$$

$$\left[\frac{dx}{ds}\right]_\xi \delta\alpha + \left[\frac{dy}{ds}\right]_\xi \delta y_\alpha + \left[\frac{dz}{ds}\right]_\xi \delta z_\alpha = 0$$

Von diesen beiden Gleichungen sagt aber die erstere aus, daß die gesuchte Cykloide im Punkte B normal auf der Gränzcurve L_2 stehe, die zweite Gleichung dagegen fordert, daß die an die Cykloide im Punkte B zu construirende Tangente auch perpendikulär auf der im Punkte A an die Gränzcurve L_1 zu legenden Tangente stehe. Wenn also die in A, B an die beiden Gränzcurven zu ziehenden Tangenten in einer Ebene lägen, wie in §. 60 vorausgesetzt worden, so müßten sie parallel laufen.

§. 63.

Gehen wir nun, indem wir an Nr. II) des vor. §. wieder anknüpfen, zu dem Falle über, daß die beiden in V enthaltenen variirenden Functionen durch eine Bedingungsgleichung mit einander verbunden sind. So wie der im vorigen Paragraphen behandelte Fall dem in §. 45 I) behandelten entsprach, so schließt sich die jetzt vorzunehmende Untersuchung an §. 45 III) resp. §. 47 an.

I) Es sei gegeben eine endliche Gleichung

$$\Theta(x, y, z) = 0 \qquad (1)$$

Wie schon am Eingange des vor. §. bemerkt worden, finden wir den Ausdruck für $\delta U = V_\xi \delta\xi - V_\alpha \delta\alpha + \int_\alpha^\xi {}_{(\delta)} V dx$ gegenwärtig dadurch, daß wir in dem Aggregate, welches den linken Theil der Gl. (1) auf S. 197 bildet, statt δ überall $_{(\delta)}$ schreiben und noch die Differenz $V_\xi \delta\xi - V_\alpha \delta\alpha$ hinzufügen. Werden der Kürze wegen die beiden aus $\int {}_{(\delta)} V dx$ entspringenden Integrale durch $\int \mathfrak{W}_{y(\delta)} y dx$ und $\int \mathfrak{W}_{z(\delta)} z dx$ vorgestellt, wobei also

$$\mathfrak{W}_y = \partial_y V - \frac{1}{dx} d\partial_p V + \frac{1}{dx^2} d^2 \partial_q V - \cdots, \quad \mathfrak{W}_z = \partial_z V - \frac{1}{dx} d\partial_p V + \cdots$$

sein soll, so bestand die in §. 45 III) erklärte Ableitung der sogenannten Hauptgleichung für das Maximum oder Minimum von U darin, daß man aus der Summe

$$\int \mathfrak{W}_{y(\delta)} y dx + \int \mathfrak{W}_{z(\delta)} z dx = \int (\mathfrak{W}_{y(\delta)} y + \mathfrak{W}_{z(\delta)} z) dx$$

die Variation $(\delta)z$ durch $(\delta)y$ vermittelst der Relation

$$(2) \qquad \partial_y\Theta\,(\delta)y + \partial_z\Theta\,(\delta)z = 0$$

eliminirte, und hierauf den Coefficienten von $(\delta)y$ gleich Null setzte, nämlich

$$\mathfrak{W}_y.\partial_z\Theta - \mathfrak{W}_z.\partial_y\Theta = 0$$

Dieses war die Gleichung (5) in §. 45. Gegenwärtig folgt nun zwar, indem wir auch x als variirende Größe behandeln müßen, aus (1) zunächst

$$\partial_x\Theta\,\delta x + \partial_y\Theta\,\delta y + \partial_z\Theta\,\delta z = 0$$

Allein wenn wir die aus der Differentiation von $\Theta = 0$ entspringende Gleichung

$$\partial_x\Theta + \partial_y\Theta.p + \partial_z\Theta.\mathfrak{p} = 0$$

mit $-\delta x$ multipliciren und zur vorhergehenden addiren, so erhalten wir sofort die Bedingungsgleichung (2). Folglich muß auch die Hauptgleichung mit der schon erwähnten Gl. (5) des §. 45 identisch sein.

Unter Weglaßung der hier besprochenen, vom Integralzeichen nicht befreit gewesenen Bestandtheile von δU haben wir alsdann

$$(3) \qquad \delta U = V_\xi\,\delta\xi - V_\alpha\,\delta\alpha + N_\xi\,(\delta)y_\xi - N_\alpha\,(\delta)y_\alpha + P_\xi\,(\delta)p_\xi - \cdots$$
$$+ \mathfrak{N}_\xi\,(\delta)z_\xi - \mathfrak{N}_\alpha\,(\delta)z_\alpha + \mathfrak{P}_\xi\,(\delta)\mathfrak{p}_\xi - \cdots$$

wobei N, $\mathfrak{N}$, P, $\mathfrak{P}$, ... die bekannte, auf S. 197 angegebene Bedeutung haben.

II) Nehmen wir jetzt an, die Abhängigkeit zwischen y und z sei durch die Differentialgleichung

$$(4) \qquad \Theta(x, y, p, q, \ldots z, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \ldots) = 0$$

gegeben. Da sich in diesem Falle mittelst der Gleichung $(\delta)\Theta = 0$ d. h.

$$(5) \qquad \partial_y\Theta\,(\delta)y + \partial_p\Theta\,(\delta)p + \cdots + \partial_z\Theta\,(\delta)z + \partial_\mathfrak{p}\Theta\,(\delta)\mathfrak{p} + \cdots = 0$$

die Variation $(\delta)z$ nebst ihren Differentialquotienten $(\delta)\mathfrak{p}$, $(\delta)\mathfrak{q}$, ... im Allgemeinen nicht durch $(\delta)y$ ausdrücken ließ, so wurde bei der in §. 47 erklärten Ableitung der Hauptgleichung der Kunstgriff angewendet, daß man das Produkt $\lambda\Theta$ zu V oder, was dasselbe ist, die mit λdx multiplicirte Bedingungsgleichung (5) zu $\int(\delta)V dx$ unter dem Integralzeichen addirte, und dann nach der bekannten auf dem partiellen Integriren beruhenden Transformation von $\int((\delta)V + \lambda(\delta)\Theta)dx$, wobei wieder zwei Integrale von der Form $\int\mathfrak{W}_y(\delta)y dx$, $\int\mathfrak{W}_z(\delta)z dx$ zum Vorschein kamen, die unbestimmte Function λ der Bedingung $\mathfrak{W}_z = 0$ unterwarf, worauf wegen der Willkührlichkeit von $(\delta)y$ auch $\mathfrak{W}_y = 0$ sein mußte. Die Bedeutung von $\mathfrak{W}_y$, $\mathfrak{W}_z$ in diesem Falle ist auf Seite 221 nachzusehen. Da nun auf unserm jetzigen Standpunkte mit y und z in Θ zugleich x

variiren soll, so wird man die Frage erheben, ob hier die Bedingungsgl. (5) noch richtig sei? Unmittelbar folgt nämlich aus (4) die Bedingung $\delta\Theta = 0$ d. h.

$$\left.\begin{aligned}\partial_x\Theta\,\delta x + \partial_y\Theta\,\delta y + \partial_p\Theta\,\delta p + \cdots\\ + \partial_x\Theta\,\delta z + \partial_p\Theta\,\delta \mathfrak{p} + \cdots\end{aligned}\right\} = 0$$

Wenn man aber zum linken Theile dieser Gleichung das Aggregat

$$\partial_x\Theta + \partial_y\Theta\, p + \partial_p\Theta.q + \cdots + \partial_x\Theta.\mathfrak{p} + \partial_p\Theta.\mathfrak{q} + \cdots$$

welches so viel als $\frac{1}{dx}d\Theta$, also identisch Null ist, nachdem man dasselbe mit $-\delta x$ multiplicirt hat, noch hinzufügt; so ergiebt sich augenscheinlich

$$(6) \qquad (\delta)\Theta = 0$$

Da hiermit die eben aufgeworfene Frage bejaht ist, so sieht man, daß auch gegenwärtig gerade wie in allen vorhergehenden Fällen die sogenannten Hauptgleichungen dieselben sind wie früher, als die Variation der Independenten gleich Null angenommen wurde.

Nach Weglaßung der beiden Integrale $\int \mathfrak{W}_y(\delta)y\,dx$, $\int \mathfrak{W}_x(\delta)z\,dx$ hat man jetzt wieder für δU einen Ausdruck von derselben Form wie vorhin bei (3), darin bedeuten aber N, $\mathfrak{N}$, P, $\mathfrak{P}$, ... die in §. 47 II) (S. 222) angegebenen Größen.

III) Rücksichtlich des Verfahrens wie diese Formeln für δU zum Zwecke der Gränzbestimmungen mit den sonst noch vorliegenden Bedingungsgleichungen $\ominus_1 = 0$, $\ominus_2 = 0$ ꝛc. in Verbindung zu bringen sind, bedarf es nunmehr nach allem Vorhergehenden keiner weiteren Erläuterung. Wir werden sofort in den folgenden zwei Paragraphen die Anwendung auf die entsprechenden Aufgaben des §. 46 resp. §. 49 zeigen.

§. 64.

Erste Aufgabe: Man fragt nach der Lage der kürzesten Linie AB, welche sich auf der gegebenen Fläche $\Theta(x, y, z) = 0$ entweder zwischen zwei auf eben dieser Fläche liegenden Gränzcurven L_1, L_2 oder auch von einem festen Anfangspunkt A nach der Gränzcurve L_2 ziehen läßt.

Die in §. 46 gefundene Hauptgleichung war

$$(1) \quad \partial_x\Theta\, d\frac{p}{V} - \partial_y\Theta\, d\frac{\mathfrak{p}}{V} = 0 \quad \text{oder auch} \quad \partial_x\Theta\, d\frac{dy}{ds} - \partial_y\Theta\, d\frac{dz}{ds} = 0$$

Die Befriedigung dieser Gleichung vorausgesetzt, ergiebt sich dann nach der Formel (3) des vor. §.

$$\delta U = V_\xi \delta\xi - V_\alpha \delta\alpha + [N_{(\delta)y}]_{\xi-\alpha} + [\mathfrak{N}_{(\delta)z}]_{\xi-\alpha}$$

$$= V_\xi \delta\xi - V_\alpha \delta\alpha + \left[\frac{p}{V}\right]_\xi {}_{(\delta)}y_\xi - \left[\frac{p}{V}\right]_\alpha {}_{(\delta)}y_\alpha + \left[\frac{\mathfrak{p}}{V}\right]_\xi {}_{(\delta)}z_\xi - \left[\frac{\mathfrak{p}}{V}\right]_\alpha {}_{(\delta)}z_\alpha$$

Aus Gl. (2) des vor. §. folgt aber

$$(2) \qquad \begin{aligned} [\partial_y \Theta\, {}_{(\delta)}y]_\alpha + [\partial_z \Theta\, {}_{(\delta)}z]_\alpha &= 0 \\ [\partial_y \Theta\, {}_{(\delta)}y]_\xi + [\partial_z \Theta\, {}_{(\delta)}z]_\xi &= 0 \end{aligned}$$

Und wenn wir die zwei Gleichungen, welche zu $\Theta = 0$ noch hinzutreten müßen, damit die beiden Gränzcurven L_1, L_2 vollkommen bestimmt seien, durch

$$(3) \qquad \ominus_1(\alpha, y_\alpha, z_\alpha) = 0 \qquad \ominus_2(\xi, y_\xi, z_\xi) = 0$$

vorstellen, so fließen hieraus die Relationen

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{d\ominus_1}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\ominus_1}{d.y_\alpha}(p_\alpha \delta\alpha + {}_{(\delta)}y_\alpha) + \frac{d\ominus_1}{d.z_\alpha}(\mathfrak{p}_\alpha \delta\alpha + {}_{(\delta)}z_\alpha) &= 0 \\ \frac{d\ominus_2}{d\xi}\delta\xi + \frac{d\ominus_2}{d.y_\xi}(p_\xi \delta\xi + {}_{(\delta)}y_\xi) + \frac{d\ominus_2}{d.z_\xi}(\mathfrak{p}_\xi \delta\xi + {}_{(\delta)}z_\xi) &= 0 \end{aligned}$$

Indem wir jetzt für die vier Bedingungsgleichungen (2) und (4) nach der Reihe die vier unbestimmten Multiplikatoren λ_1, λ_2, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ anwenden und die Produkte zum obigen Ausdrucke für δU addiren, zuletzt aber die sechs mit den Gränzvariationen $\delta\xi$, $\delta\alpha$, ${}_{(\delta)}y_\xi$ ꝛc. behafteten Glieder einzeln gleich Null setzen, erhalten wir das System der Gränzgleichungen:

$$(5) \qquad \begin{aligned} \left(V_\xi + \mathfrak{L}_2 \frac{d\ominus_2}{d\xi} + \mathfrak{L}_2 \frac{d\ominus_2}{d.y_\xi} p_\xi + \mathfrak{L}_2 \frac{d\ominus_2}{d.z_\xi} \mathfrak{p}_\xi\right)\delta\xi &= 0 \\ \left(V_\alpha - \mathfrak{L}_1 \frac{d\ominus_1}{d\alpha} - \mathfrak{L}_1 \frac{d\ominus_1}{d.y_\alpha} p_\alpha - \mathfrak{L}_1 \frac{d\ominus_1}{d.z_\alpha} \mathfrak{p}_\alpha\right)\delta\alpha &= 0 \\ \left(\left[\frac{p}{V}\right]_\xi + \lambda_2 \left[\frac{d\Theta}{dy}\right]_\xi + \mathfrak{L}_2 \frac{d\ominus_2}{d.y_\xi}\right) {}_{(\delta)}y_\xi &= 0 \\ \left(\left[\frac{p}{V}\right]_\alpha - \lambda_1 \left[\frac{d\Theta}{dy}\right]_\alpha - \mathfrak{L}_1 \frac{d\ominus_1}{d.y_\alpha}\right) {}_{(\delta)}y_\alpha &= 0 \\ \left(\left[\frac{\mathfrak{p}}{V}\right]_\xi + \lambda_2 \left[\frac{d\Theta}{dz}\right]_\xi + \mathfrak{L}_2 \frac{d\ominus_2}{d.z_\xi}\right) {}_{(\delta)}z_\xi &= 0 \\ \left(\left[\frac{\mathfrak{p}}{V}\right]_\alpha - \lambda_1 \left[\frac{d\Theta}{dz}\right]_\alpha - \mathfrak{L}_1 \frac{d\ominus_1}{d.z_\alpha}\right) {}_{(\delta)}z_\alpha &= 0 \end{aligned}$$

Insofern also die Gränzpunkte A, B beide als variirend gedacht werden sollen, müßen die sechs in Parentheſen geschloßenen Coefficienten gleich Null sein. Durch Elimination der Factoren λ_1, λ_2, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ entspringen

hieraus zwei Gleichungen, aus welchen in Verbindung mit (3) die beiden in das Integral der Gl. (1) eintretenden Constanten C_1, C_2 nebst ξ und α zu bestimmen sind. Was die acht Größen y_ξ, y_α, p_ξ, p_α, z_ξ, z_α, $\mathfrak{p}_\xi$, $\mathfrak{p}_\alpha$ betrifft, so würden sie, wenn wir die durch Integration von (1) zu erhaltende Gleichung allgemein durch $f(x, y, z, C_1, C_2) = 0$ vorstellen, durch die acht Gleichungen

$$\Theta_\xi = 0 \qquad \Theta_\alpha = 0 \qquad \left[\frac{d\Theta}{dx}\right]_\xi = 0 \qquad \left[\frac{d\Theta}{dx}\right]_\alpha = 0$$

$$f_\xi = 0 \qquad f_\alpha = 0 \qquad \left[\frac{df}{dx}\right]_\xi = 0 \qquad \left[\frac{df}{dx}\right]_\alpha = 0$$

in ξ, α, C_1, C_2 auszudrücken sein.

Um die Rechnungen zu vereinfachen, obwohl die Symmetrie dadurch gestört wird, kann man die Gleichungen der beiden Gränzcurven L_1 und L_2 unter der Form

$$\Theta_1 = z_\alpha - \chi_1(\alpha) = 0 \qquad \Theta_2 = z_\xi - \chi_2(\xi) = 0$$

voraussetzen. Alsdann ist

$$\frac{d\Theta_2}{d\xi} = -\chi_2'(\xi) \qquad \frac{d\Theta_2}{d.y_\xi} = 0 \qquad \frac{d\Theta_2}{d.z_\xi} = 1$$

$$\frac{d\Theta_1}{d\alpha} = -\chi_1'(\alpha) \qquad \frac{d\Theta_1}{d.y_\alpha} = 0 \qquad \frac{d\Theta_1}{d.z_\alpha} = 1$$

und unsere sechs Gränzgleichungen gewinnen die einfachere Gestalt

$$V_\xi - \mathfrak{L}_2(\chi_2'(\xi) - \mathfrak{p}_\xi) = 0 \qquad V_\alpha + \mathfrak{L}_1(\chi_1'(\alpha) - \mathfrak{p}_\alpha) = 0$$

$$(6) \qquad \left[\frac{p}{V}\right]_\xi + \lambda_2[\partial_y\Theta]_\xi = 0 \qquad \left[\frac{p}{V}\right]_\alpha - \lambda_1[\partial_y\Theta]_\alpha = 0$$

$$\left[\frac{\mathfrak{p}}{V}\right]_\xi + \lambda_2[\partial_x\Theta]_\xi = -\mathfrak{L}_2 \qquad \left[\frac{\mathfrak{p}}{V}\right]_\alpha - \lambda_1[\partial_x\Theta]_\alpha = \mathfrak{L}_1$$

Aus der ersten Gruppe folgt

$$\mathfrak{L}_2 = \frac{V_\xi}{\chi_2'(\xi) - \mathfrak{p}_\xi} = \left[\frac{\partial_x\Theta.p - \partial_y\Theta.\mathfrak{p}}{V\,\partial_y\Theta}\right]_\xi$$

was sich, wenn wir die Nenner fortschaffen und die Relation $\partial_y\Theta.p + \partial_x\Theta.\mathfrak{p} = -\partial_x\Theta$ berücksichtigen und außerdem zur Abkürzung die partiellen Differentialquotienten von Θ nach x, y, z oder vielmehr ihre Werthe am Punkte B durch X, Y, Z bezeichnen, in

$$(7) \qquad Y - (X + Z\chi_2'(\xi)).p_\xi + Y\chi_2'(\xi).\mathfrak{p}_\xi = 0$$

zusammenzieht. Nach bekannten Regeln der analytischen Geometrie findet man für die Cosinus der drei Neigungswinkel, unter welcher die in B an

die Gränzcurve L_2 zu conſtruirende Tangente gegen die Coordinatenaxen geneigt iſt, da dieſe Gerade ſowohl in der tangirenden Ebene der Fläche $\Theta = 0$ d. h. in der Ebene

$$X(x' - \xi) + Y(y' - y_\xi) + Z(z' - z_\xi) = 0$$

als auch in der Ebene

$$z' - z_\xi = \chi_2'(\xi).(x' - \xi)$$

liegt, ohne Mühe die Ausdrücke

$$\frac{Y}{D}, \qquad -\frac{X + Z\chi_2'(\xi)}{D}, \qquad \frac{Y\chi'_2(\xi)}{D}$$

wobei D die Wurzel aus der Quadratſumme der drei durch D dividirten Größen vorſtellt. Andererſeits werden die Coſinus der Winkel, welche die in B an die verlangte Minimumscurve zu ziehende Tangente mit den Axen bildet, bekanntlich durch

$$\left[\frac{dx}{ds}\right]_\xi = \frac{1}{V_\xi} \qquad \left[\frac{dy}{ds}\right]_\xi = \frac{p_\xi}{V_\xi} \qquad \left[\frac{dz}{ds}\right]_\xi = \frac{q_\xi}{V_\xi}$$

angegeben. Bezeichnen wir dieſe drei Winkel durch l, m, n und die unmittelbar vorher gedachten durch λ, μ, ν, ſo wird die gefundene Gleichung (7), ſobald man ſie durch $D.V_\xi$ dividirt, ganz einerlei mit

$$\text{Cos}\,\lambda\,\text{Cos}\,l + \text{Cos}\,\mu\,\text{Cos}\,m + \text{Cos}\,\nu\,\text{Cos}\,n = 0$$

woraus zu ſchließen iſt, daß die erwähnten zwei Tangenten perpendikulär auf einander ſtehen.

In derſelben Weiſe würde man aus der zweiten Gruppe der obigen Gleichungen (6), indem man nur α, χ_1, $-\lambda_1$, $-\mathfrak{L}_1$ dahin zu ſetzen hat, wo in der eben durchgeführten Rechnung ξ, χ_2, λ_2, $\mathfrak{L}_2$ ſtand, eine von λ_1 und $\mathfrak{L}_1$ befreite Gleichung herleiten, welche ausſagt, daß die geſuchte Minimumscurve auch mit der Gränzcurve L_1 ſich unter rechten Winkeln ſchneiden müße. Wenn dagegen der Anfangspunkt A feſt gegeben iſt, ſo fallen die zweite, vierte und ſechſte Gleichung in (5) alſo auch die zweite Gruppe in (6) ganz weg und es bleibt die vorige Bedingung (7) allein zu erfüllen übrig, reicht aber in Verbindung mit (3) zur Beſtimmung von C_1, C_2 und ξ gerade aus.

Hätte es blos der Feſtſtellung dieſer Lageverhältniſſe bedurft, ſo würde man gerade wie in §. 62 IV) durch den Gebrauch der gemiſchten Variationen noch leichter zum Ziele gelangt ſein. Denn der urſprüngliche Ausdruck für δU verwandelt ſich dann in

$$\left.\begin{array}{l}[\mathrm{V}-\mathrm{N}p-\mathfrak{N}\mathfrak{p}]_\xi\,\delta\xi-[\mathrm{V}-\mathrm{N}p-\mathfrak{N}\mathfrak{p}]_\alpha\,\delta\alpha\\ \quad+\mathrm{N}_\xi\,\delta y_\xi+\mathfrak{N}_\xi\,\delta z_\xi\qquad-\mathrm{N}_\alpha\,\delta y_\alpha-\mathfrak{N}_\alpha\,\delta z_\alpha\end{array}\right\}$$

was sich mittelst der Werthe von V, N, $\mathfrak{N}$ in

$$\frac{1}{\mathrm{V}_\xi}(\delta\xi+p_\xi\,\delta y_\xi+\mathfrak{p}_\xi\,\delta z_\xi)-\frac{1}{\mathrm{V}_\alpha}(\delta\alpha+p_\alpha\,\delta y_\alpha+\mathfrak{p}_\alpha\,\delta z_\alpha)$$

zusammenzieht. Weil nun auch dieser Ausdruck für $\delta\mathrm{U}$ gleich Null werden muß und weil die dabei zu beobachtenden Bedingungsgleichungen (2) und (4) nur Relationen einerseits zwischen $\delta\xi$, δy_ξ, δz_ξ, andererseits zwischen $\delta\alpha$, δy_α, δz_α liefern, ohne daß hierdurch die drei Glieder der ersten Gruppe zu denen der anderen Gruppe in irgend eine Abhängigkeit gebracht würden; so muß sowohl der Minuendus als der Subtrahendus für sich gleich Null sein, — kurz es verhält sich hier genau wie in §. 62 von Gl. (10) an.

§. 65.

Zweite Aufgabe: Man verlangt für das in §. 49 aufgelöste Problem der Brachistochrone im widerstehenden Mittel die Gränzbestimmungen, wenn in der vertikalen Ebene, worin die Bewegung vorausgesetzt worden ist, zwei Gränzcurven L_1, L_2 gegeben sind.

Die Gleichungen dieser beiden Gränzcurven mögen wie in der analogen Aufgabe des §. 60 durch

$$\beta=\varphi(x)\qquad\qquad\eta=\chi(x)$$

vorgestellt werden. — Wir haben jetzt, da y und v die gesuchten Functionen von x sind, gemäß §. 63 II) auszugehen von der allgemeinen Formel

$$\delta\mathrm{U}=\mathrm{V}_\xi\,\delta\xi-\mathrm{V}_\alpha\,\delta\alpha+\mathrm{N}_\xi\,(\delta)y_\xi-\mathrm{N}_\alpha\,(\delta)y_\alpha+\mathfrak{N}_\xi\,(\delta)v_\xi-\mathfrak{N}_\alpha\,(\delta)v_\alpha$$

worin $\mathrm{N}=\partial_\mathfrak{p}(\mathrm{V}+\lambda\Theta)$, $\mathfrak{N}=\partial_\mathfrak{p}(\mathrm{V}+\lambda\Theta)$ ist. Da in der vorliegenden Aufgabe (s. Seite 237)

$$\mathrm{V}=\frac{\sqrt{1+p^2}}{v}\qquad\Theta=v\mathfrak{p}-g+gf(v)\sqrt{1+p^2}\qquad\mathfrak{p}=\frac{dv}{dx}$$

ist, so finden wir unmittelbar

$$\mathrm{N}=\Big(\frac{1}{v}+\lambda gf(v)\Big)\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}\qquad\qquad\mathfrak{N}=\lambda v$$

Zufolge unserer Hauptgleichung (5) auf S. 237 besitzt aber der Ausdruck für N den constanten Werth C_1; daher ist

$$\delta U = \quad V_\xi . \delta\xi - V_\alpha . \delta\alpha$$
$$+ C_1 {}_{(\delta)}y_\xi - C_1 {}_{(\delta)}y_\alpha + [\lambda v]_\xi {}_{(\delta)}v_\xi - [\lambda v]_\alpha {}_{(\delta)}v_\alpha$$

Zuvörderſt beſtehen nun die zwei Bedingungsgleichungen·

$$(1) \qquad \delta\ominus_1 = {}_{(\delta)}y_\alpha - (\varphi'(\alpha) - p_\alpha)\delta\alpha = 0$$
$$(2) \qquad \delta\ominus_2 = {}_{(\delta)}y_\xi - (\chi'(\xi) - p_\xi)\delta\xi = 0$$

Ferner haben wir, inſofern $v_\alpha = \Gamma(\alpha, \beta)$ als gegeben vorauszuſetzen iſt (Vgl. §. 49 III)

$$\delta v_\alpha = \frac{d\Gamma}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\Gamma}{d\beta}\delta\beta = \left(\frac{d\Gamma}{d\alpha} + \frac{d\Gamma}{d\beta}p_\alpha\right)\delta\alpha + \frac{d\Gamma}{d\beta}{}_{(\delta)}y_\alpha$$

und daraus entſpringt, weil δv_α zugleich mit $\mathfrak{p}_\alpha\delta\alpha + {}_{(\delta)}v_\alpha$ identiſch iſt zwiſchen $\delta\alpha$, ${}_{(\delta)}y_\alpha$, ${}_{(\delta)}v_\alpha$ folgende Relation:

$$(3) \qquad \delta\ominus_3 = \left(\mathfrak{p}_\alpha - \frac{d\Gamma}{d\alpha} - \frac{d\Gamma}{d\beta}p_\alpha\right)\delta\alpha - \frac{d\Gamma}{d\beta}{}_{(\delta)}y_\alpha + {}_{(\delta)}v_\alpha = 0$$

Indem wir nun die drei Bedingungsgleichungen (1) bis (3) mit unbeſtimmten Factoren $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$ multiplicirt zu $\delta U = 0$ hinzufügen und dann die Coefficienten der Gränzvariationen einzeln gleich Null ſetzen, gelangen wir zu dem Syſteme folgender Gränzgleichungen:

$$(4) \qquad V_\xi - \mathfrak{L}_2(\chi'(\xi) - p_\xi) = 0$$
$$(5) \qquad -V_\alpha - \mathfrak{L}_1(\varphi'(\alpha) - p_\alpha) + \mathfrak{L}_3\left(\mathfrak{p}_\alpha - \frac{d\Gamma}{d\alpha} - \frac{d\Gamma}{d\beta}p_\alpha\right) = 0$$
$$(6) \qquad C_1 + \mathfrak{L}_2 = 0$$
$$(7) \qquad -C_1 + \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_3\frac{d\Gamma}{d\beta} = 0$$
$$(8) \qquad -[\lambda v]_\alpha + \mathfrak{L}_3 = 0$$

Die Gleichung $[\lambda v]_\xi = 0$, welche zu der ſchon früher (§. 49 III) beſprochenen Forderung $\lambda_\xi = 0$ führt, haben wir hier weggelaßen. — Vermittelſt der Elimination von $\mathfrak{L}_2$ und durch Subſtitution des Werths $\frac{1}{v_\xi} = \frac{C_1}{p_\xi}\sqrt{1+p_\xi^2}$, welcher wegen $\lambda_\xi = 0$ aus der ſchon erwähnten Hauptgl. (5) des §. 49 folgt und wodurch $V_\xi = C_1\left(\frac{1}{p_\xi} + p_\xi\right)$ wird, erhalten wir aus (4) und (6) ſofort

$$(9) \qquad 1 + p_\xi\chi'(\xi) = 0$$

Dieſe Gleichung läßt erkennen, daß die geſuchte Curve im Punkte B ſenkrecht auf der Gränzcurve L_2 ſtehen müße.

Wegen $\lambda_\xi = (C_2 + \frac{C_1}{p_\xi})\frac{1}{g} = 0$ d. h. $p_\xi = -\frac{C_1}{C_2}$ kann man übrigens ſtatt (9) auch ſchreiben

$$(10) \qquad C_2 - C_1\chi'(\xi) = 0$$

Durch Elimination von $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_3$ aus (5) (7) (8) findet man

$$[\lambda v\mathfrak{p} - \frac{\sqrt{1+p^2}}{v} + C_1 p]_\alpha - C_1\varphi'(\alpha) - [\lambda v]_\alpha\left(\frac{d\Gamma}{d\alpha} + \frac{d\Gamma}{d\beta}\varphi'(\alpha)\right) = 0$$

Wenn man jedoch, um zunächſt den Differentialquotienten $\mathfrak{p}$ hieraus fortzuſchaffen, aus der am Anfange von §. 49 aufgeſtellten Bedingungsgleichung $\Theta = 0$ den Werth

$$\lambda v\mathfrak{p} = \lambda v\frac{dv}{dx} = \lambda g - \lambda g f(v)\sqrt{1+p^2}$$

herbeiholt und berückſichtigt, daß zufolge der ſchon oben gebrauchten Hauptgleichung (5) deſſelben Paragraphen

$$\lambda g f(v)\sqrt{1+p^2} = C_1(\frac{1}{p} + p) - \frac{\sqrt{1+p^2}}{v}$$

alſo

$$\lambda v\mathfrak{p} = \lambda g - \frac{C_1}{p} - C_1 p + \frac{\sqrt{1+p^2}}{v}$$

iſt, ſo ſieht man, daß die vorige Gleichung einerlei iſt mit

$$[g\lambda - \frac{C_1}{p}]_\alpha - C_1\varphi'(\alpha) - \lambda_\alpha v_\alpha\left(\frac{d\Gamma}{d\alpha} + \frac{d\Gamma}{d\beta}\varphi'(\alpha)\right) = 0$$

oder endlich, wenn noch für λ und v_α die Werthe $\frac{1}{g}(C_2 + \frac{C_1}{p})$, $\Gamma(\alpha, \beta)$ ſubſtituirt werden,

$$(11) \qquad C_2 - C_1\varphi'(\alpha) - (C_2 + \frac{C_1}{p_\alpha})\frac{\Gamma(\alpha,\beta)}{g}\left(\frac{d\Gamma}{d\alpha} + \frac{d\Gamma}{d\beta}\varphi'(\alpha)\right) = 0$$

Durch die beiden Gränzgleichungen (9) (oder (10)) und (11) und die beiden Gleichungen $y_\alpha = \varphi(\alpha)$, $y_\xi = \chi(\xi)$ in Verbindung mit der ſchon erwähnten, in §. 49 mit (13) numerirten Bedingung $g\lambda_\xi = C_2 + \frac{C_1}{p_\xi} = 0$ und endlich mit dem gegebenen Werthe $v_\alpha = \Gamma(\alpha, \beta) = \Gamma(\alpha, y_\alpha)$ würden die ſechs Unbekannten, nämlich ξ, α und die vier in $y = f(x)$, $s = \mathfrak{f}(x)$ verwebten Integrationsconſtanten zu beſtimmen ſein. — Wenn wir nun hier, gerade wie in §. 60 II) bei der Brachiſtochrone im leeren Raume, zuvörderſt die Vorausſetzung in Betracht ziehen, daß v_α einen unveränderlichen Werth beſitzen ſolle, gleichviel was die Coordinaten des geſuchten

Anfangspunkts A sein mögen; so sind in der ganzen vorangehenden Rechnung die Differentialquotienten $\frac{d\Gamma}{d\alpha}$ und $\frac{d\Gamma}{d\beta}$ beide gleich Null, unsere Bedingungsgl. (3), nämlich $\delta\ominus_3 = 0$, zieht sich zusammen in $\mathfrak{p}_\alpha \delta\alpha + (\delta)v_\alpha = \delta v_\alpha = 0$ und statt (11) ergiebt sich die einfache Relation

$$C_2 - C_1\varphi'(\alpha) = 0$$

Die Vergleichung derselben mit (10) zeigt, daß in diesem Falle $\varphi'(\alpha) = \chi'(\xi)$ sein d. h. daß die beiden in A und B an die Gränzcurven gezogenen Tangenten parallel mit einander laufen müßen. Daß überdies in dem speciellen Falle, wenn $v_\alpha = 0$ sein soll, auch p_α gleich Null sei, d. h. daß die an die Brachistochrone zu ziehende Tangente in A lothrecht stehen müße, haben wir bereits in §. 49 III) nachgewiesen.

Würde dagegen verlangt, daß v_α mit dem Punkte A variirend etwa wie in §. 60 IV) gleich derjenigen Geschwindigkeit sei, welche der bewegliche Körper erlangt haben würde, sobald er von einem festen Punkte C im leeren Raume auf irgend einer untergelegten Bahn CA gefallen wäre; so würde, wenn wir die gegebene Abscisse des Punktes C durch $x = c$ bezeichnen,

$$v_\alpha = \sqrt{2g(\alpha - c)}$$

sein. Die Gleichung (11) giebt jetzt

$$C_2 - C_1\varphi'(\alpha) - \frac{1}{g}\left(C_2 + \frac{C_1}{p_\alpha}\right)v_\alpha \cdot \frac{\sqrt{2g}}{2\sqrt{(\alpha - c)}} = 0$$

was sich nach Substitution des Werths von v_α sofort in

$$1 + p_\alpha\varphi'(\alpha) = 0$$

reducirt und mit Gl. (18) in §. 60 identisch wird. In dem einen wie in dem andern Falle sind also die Gränzbestimmungen für die Brachistochrone im widerstehenden Mittel dieselben wie im leeren Raume.

§. 66.

Was die Beantwortung der nach Bestimmung der gesuchten Maximums- oder Minimumscurve so wie der Gränzwerthe ξ, α noch übrig bleibenden Frage anbelangt, ob man wirklich ein Maximum von $U = \int V dx$ oder ein Minimum oder keines von beiden gefunden habe, so kann man diese Untersuchung auch hier auf den zweiten Variationsquotienten gründen, muß indessen auf etwas mühsamere Rechnungen gefaßt sein.

Man findet aus $\delta U = V_\xi \delta\xi - V_\alpha \delta\alpha + \int_\alpha^\xi (\delta) V\, dx$ durch nochmaliges Variiren und mit Rückſicht darauf, daß die Variation des letzten Integrals zu Folge derſelben eben benutzten Formel ſo viel als

$$[(\delta) V]_\xi \delta\xi - [(\delta) V]_\alpha \delta\alpha + \int_\alpha^\xi (\delta)^2 V\, dx$$

iſt, für $\delta^2 U$ unmittelbar den Ausdruck

$$\begin{aligned}\delta^2 U = \quad & [\delta V]_\xi \delta\xi - [\delta V]_\alpha \delta\alpha + V_\xi \delta^2\xi - V_\alpha \delta^2\alpha \\ & + [(\delta) V]_\xi \delta\xi - [(\delta) V]_\alpha \delta\alpha + \int_\alpha^\xi (\delta)^2 V\, dx\end{aligned}$$

Setzt man hierin nun den Werth $\delta V = \frac{dV}{dx}\delta x + (\delta) V$ und dividirt die ganze Gleichung durch die zweite Potenz des Differentials des Variationsarguments, ſo hat man die allgemeine Formel

$$\begin{aligned}\delta^2 U = \quad & V_\xi \delta^2\xi + \left[\frac{dV}{dx}\right]_\xi \delta\xi^2 + 2[(\delta) V]_\xi \delta\xi \\ & - V_\alpha \delta^2\alpha - \left[\frac{dV}{dx}\right]_\alpha \delta\alpha^2 - 2[(\delta) V]_\alpha \delta\alpha + \int_\alpha^\xi (\delta)^2 V\, dx\end{aligned} \tag{1}$$

Verſtehen wir unter τ wieder, wie in §. 9, einen ſehr wenig von Null verſchiedenen Werth von t, und multipliciren vorſtehende Gleichung mit $\frac{1}{2}\tau^2$, ſo giebt der letzte Beſtandtheil $\int (\delta)^2 V dx \cdot \frac{1}{2}\tau^2$, den wir auch durch $(\delta)^2 U \cdot \frac{1}{2}\tau^2$ vorſtellen könnten (§. 10), diejenige Aenderung von U an, welche entſteht wenn man den in V enthaltenen Functionen von x die reinen Variationen

$(\mathcal{V})y = (\delta) y.\tau + (\delta)^2 y.\frac{1}{2}\tau^2$, $\quad (\mathcal{V})p = (\delta) p.\tau + (\delta)^2 p.\frac{1}{2}\tau^2$, u. ſ. w. zuſchreibt; die Summe der dem letzten Beſtandtheile vorangehenden Glieder dagegen lehrt, wie viel noch zu jener Aenderung von U hinzuzufügen iſt, wenn man auch die Indepenente x und das Differential dx als eine mit t veränderliche Größe behandelt d. h. für x überall den durch die Formel (6) in §. 54 dargebotenen Werth einſetzt.

Nehmen wir nun den einfachſten Fall an, daß in V außer x und y nur $p = \frac{dy}{dx}$ enthalten iſt, ſo wird

$$(\delta) V = \partial_y V\, (\delta) y + \partial_p V (\delta) p$$

und nach der Formel (2) in §. 38

$$\int_a^\xi (\delta)^2 V\,dx = [\partial_{yy}^2 V (\delta) y^2]_{\xi \dots a} + [\partial_{yp}^2 V (\delta) y (\delta) p]_{\xi \dots a}$$
$$+ N_\xi (\delta)^2 y_\xi - N_a (\delta)^2 y_a + \int_a^\xi (\delta) \mathfrak{W} (\delta) y\,dx$$

Die beiden Glieder $[N(\delta)^2 y]_\xi$, $[N(\delta)^2 y]_a$, worin $N = \partial_p V$ ist, sind in der citirten Formel aus den dort angegebenen Gründen (S. 156) weggelaßen worden, aber in den unserer jetzigen Betrachtung zu Grunde liegenden Gränzgleichungen (S. 294) ist weder N_ξ noch N_a gleich Null vorauszusetzen. — Im Ganzen wird also jetzt

$$\delta^2 U = V_\xi \delta^2 \xi + \left[\frac{dV}{dx}\right]_\xi \delta^2 \xi^2 + 2[\partial_y V]_\xi \delta \xi (\delta) y_\xi + 2[\partial_p V]_\xi \delta \xi (\delta) p_\xi$$
$$+ [\partial_p V]_\xi (\delta)^2 y_\xi + [\partial_{yp}^2 V]_\xi (\delta) y_\xi^2 + [\partial_{pp}^2 V]_\xi (\delta) y_\xi (\delta) p_\xi$$
(2) — denselben sieben Gliedern mit α statt ξ
$$+ \int_a^\xi (\delta) \mathfrak{W} (\delta) y\,dx$$

Das letzte Integral, worin $\mathfrak{W}$ wie früher (in §. 37 und anderwärts) den ersten Theil der Hauptgleichung, also im gegenwärtigen Falle die Differenz $\partial_y V - \frac{1}{dx} d\partial_p V$ bedeutet, kann nach den Regeln des §. 38 weiter behandelt werden.

Ebenso könnten wir auch für die Fälle, daß noch $q, r, \dots$ in V enthalten wären, oder daß darin einige der Größen ξ, α, $y_\xi, \dots$ explicit vorkommen sollten, die betreffenden Formeln leicht bilden. Dieselben werden aber freilich, wenn man sie in völliger Allgemeinheit herzustellen sucht, sehr umfangreich, während sie im concreten Falle, je nach der Beschaffenheit der Function V, mehr oder weniger einfach sich gestalten können.

§. 67.

Um nun die Anwendung dieser allgemeinen Formeln einigermaßen zu erläutern, wollen wir zu der in §. 59 III) behandelten Aufgabe:

„die kürzeste Linie vom gegebenen Punkt $A \begin{vmatrix} x = \alpha \\ y = \beta \end{vmatrix}$ nach der Curve $L_2 B B_1$ $[\eta = \chi(x)]$ zu ziehen"

zurückkehren.

Es war in dieser Aufgabe $V = \sqrt{(1 + p^2)}$ und wir hatten für

die gesuchte Linie die Gleichung

$$y = C_1 x + C_2$$

mit den drei Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} C_1\alpha + C_2 - \beta &= 0 \\ C_1\xi + C_2 - \chi(\xi) &= 0 \\ C_1\chi'(\xi) + 1 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

für C_1, C_2, ξ gefunden: Zuvörderst haben wir daher in die Formel (2) des vor. §. die Werthe einzuführen

$$V = \sqrt{(1 + C_1^2)} \qquad \frac{dV}{dx} = \frac{pq}{\sqrt{(1+p^2)}} = 0$$

$$\partial_y V = 0 \qquad \partial_p V = \frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}} = \frac{C_1}{\sqrt{(1+C_1^2)}}$$

Weiter folgt, weil $\partial^2_{yy} V = \partial^2_{yp} V = 0$, $\partial^2_{pp} V = \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{1}{2}}}$ ist, nach §. 38 III) für $\int_\alpha^\xi {}_{(\delta)}\mathfrak{W}_{(\delta)} y\,dx$ der Ausdruck

$$\frac{1}{(1+C_1^2)^{\frac{1}{2}}}\left([u^2\omega\omega']_\alpha - [u^2\omega\omega']_\xi\right) + \frac{1}{(1+C_1^2)^{\frac{1}{2}}}\int_\alpha^\xi (u\omega')^2 dx$$

worin u ein beliebiges partikuläres Integral der Gleichung

$$d\left[\partial^2_{pp} V \frac{du}{dx}\right] = \frac{1}{(1+C_1^2)^{\frac{1}{2}}} d\frac{du}{dx} = 0$$

bedeutet, und $\omega = \frac{{}_{(\delta)}y}{u}$, $\omega' = \frac{u\,{}_{(\delta)}p - u'\,{}_{(\delta)}y}{uu}$ ist. Offenbar ist es uns hier gestattet $u = \mu$ anzunehmen, unter μ eine beliebige Constante verstehend. Dabei wird $u' = 0$ also

$$\omega = \frac{{}_{(\delta)}y}{\mu} \qquad \omega' = \frac{{}_{(\delta)}p}{\mu} \qquad \omega\omega' = \frac{1}{\mu^2}\,{}_{(\delta)}y\,{}_{(\delta)}p$$

und mit Rücksicht auf ${}_{(\delta)}y_\alpha = 0$ haben wir

$$\int_\alpha^\xi {}_{(\delta)}\mathfrak{W}_{(\delta)} y\,dx = \frac{-1}{(1+C_1^2)^{\frac{1}{2}}}\,{}_{(\delta)}y_\xi\,{}_{(\delta)}p_\xi + \frac{1}{(1+C_1^2)^{\frac{1}{2}}}\int_\alpha^\xi {}_{(\delta)}p^2 dx$$

Zugleich erinnern wir, daß die im angeführten §. 38 III) vorbehaltene Bedingung, daß $\partial^2_{pp} V.u^2$ innerhalb des Integrationsintervalls nicht unendlich werde, hier erfüllt ist. Wir erhalten daher, da $\delta\alpha = 0$, $\delta^2\alpha = 0$, ${}_{(\delta)}y_\alpha = 0$, ${}_{(\delta)}{}^2y_\alpha = 0$ sein soll, im Ganzen

$$\delta^2 U = \sqrt{1+C_1^2}\,\delta^2\xi + 2\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}\delta^1\xi(\delta^1)p_\xi$$

$$+\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}(\delta^1)^2 y_\xi + \frac{1}{(1+C_1^2)^{\frac{1}{2}}}\int_a^\xi (\delta^1)p^2 dx \tag{2}$$

Da das am Ende dieses Ausdrucks stehende Integral jedenfalls einen positiven Werth besitzt, so kommt es nur auf das Vorzeichen an, welches die Summe der übrigen Glieder erhalten wird. Dabei müßen wir jedoch auf die aus der Gleichung der Gränzcurve hervorgehenden Relationen zwischen $\delta\xi$, $\delta^2\xi$, $(\delta)y_\xi$, $(\delta)^2 y_\xi$ Rücksicht nehmen.

Aus $\nu y_\xi = \chi'(\xi)\nu\xi + \cdots$ folgt nun (§. 18 II, §. 43 IV) außer

$$\delta^1 y_\xi = \chi'(\xi)\delta^1\xi \tag{3}$$

zunächst die weitere Bedingung

$$\delta^2 y_\xi = \chi''(\xi)\delta^1\xi^2 + \chi'(\xi)\delta^2\xi \tag{4}$$

Weil aber in unserer obigen Formel für $\delta^2 U$ nur reine Variationsquotienten vorkommen, so substituiren wir die Werthe

$$\delta^1 y = p\delta^1 x + (\delta^1)y$$
$$\delta^2 y = p\delta^2 x + (\delta^1)^2 y + 2(\delta^1)p\delta^1 x + q\delta^1 x^2$$

(§. 56 Gl. (5)) wodurch sich, weil gegenwärtig $p = C_1$, $q = 0$ und zufolge (1) $\chi'(\xi) = -\frac{1}{C_1}$ ist, die vorangehenden Bedingungsgleichungen (3) und (4) in

$$\frac{1+C_1^2}{C_1}\delta^1\xi + (\delta^1)y_\xi = 0 \tag{5}$$

$$\frac{1+C_1^2}{C_1}\delta^2\xi - \chi''(\xi)\delta^1\xi^2 + (\delta^1)^2 y_\xi + 2\delta^1\xi(\delta^1)p_\xi = 0 \tag{6}$$

verwandeln. Die erste dieser Bedingungsgleichungen würde nun zu benutzen sein, um in (2) die eine der Gränzvariationen $\delta\xi$, $(\delta)y_\xi$ durch die andere auszudrücken, kann aber, da zufällig aus (2) die Größe $(\delta^1)y_\xi$ ganz ausgefallen ist, diesmal nicht gebraucht werden. Die Gl. (6) dagegen dient uns dazu die Variationsquotienten zweiter Ordnung, nämlich $\delta^2\xi$ und $(\delta^1)^2 y_\xi$ beide zugleich aus (2) fortzuschaffen. Zu diesem Zwecke brauchen wir nur die Gl. (6) mit einem Factor $\mathfrak{L}$ zu multipliciren, das Produkt zu (2) zu addiren und für $\mathfrak{L}$ denselben Werth anzunehmen, welchen dieser Multiplikator bei Entwickelung der Gränzgleichungen in §. 59 erhalten hatte. Es verhält sich in dieser Beziehung hier gerade

so wie in dem analogen Falle des §. 43 IV). In der That, stellen wir gerade wie in §. 59 III) die Gleichung $y_\xi - \chi(\xi) = 0$ durch

$$\Theta_2(\xi, y_\xi) = 0$$

vor, so sind die Gleichungen (3) und (4) gleichbedeutend mit

$$\frac{d\Theta_2}{d\xi}\delta^{\prime}\xi + \frac{d\Theta_2}{d.y_\xi}\delta^{\prime}y_\xi = 0$$

$$\frac{d\Theta_2}{d\xi}\delta^{\prime 2}\xi + \frac{d\Theta_2}{d.y_\xi}\delta^{\prime 2}y_\xi + \frac{d^2\Theta_2}{d\xi^2}\delta^{\prime}\xi^2 + 2\frac{d^2\Theta_2}{d\xi d.y_\xi}\delta^{\prime}\xi\delta^{\prime}y_\xi + \cdots = 0$$

also wird (bei dem Uebergange zu den reinen Variationsquotienten) Gleichung (6) so viel als

$$\left(\frac{d\Theta_2}{d\xi} + \frac{d\Theta_2}{d.y_\xi}p_\xi\right)\delta^{\prime 2}\xi + \frac{d\Theta_2}{d.y_\xi}(\delta^{\prime})^2 y_\xi + \cdots = 0$$

oder unter Anwendung der in §. 59 bei (3) festgestellten Bezeichnung einerlei mit

$$\frac{d\Theta_2}{d\xi}\delta^{\prime 2}\xi + \frac{d\Theta_2}{d.y_\xi}(\delta^{\prime})^2 y_\xi + \cdots = 0$$

Wird aber diese Gleichung, nachdem sie mit dem früher benutzten $\mathfrak{L}$ (oder $\mathfrak{L}_2$) multiplicirt worden, zu $\delta^{\prime 2}U$ addirt, so erhält

$\delta^{\prime 2}\xi$ den Coefficienten $\quad V_\xi + \mathfrak{L}_2\frac{d\Theta_2}{d\xi}$

$(\delta^{\prime})^2 y_\xi$ den Coefficienten $[\mathfrak{d}_p V]_\xi + \mathfrak{L}_2\frac{d\Theta_2}{d.y_\xi}$

und dies waren gerade die linken Theile unserer Gränzgleichungen (7) und (8) in §. 59. — Zu gleichem Ergebnis wird man offenbar auch in solchen Fällen gelangen, wenn mehrere Bedingungsgleichungen $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = 0, \ldots$ zu berücksichtigen sind.

In unserer vorliegenden Aufgabe besaß nun vermöge Gl. (10) in §. 59 $\mathfrak{L}$ (oder $\mathfrak{L}_2$) den Werth

$$-\frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}}$$

und wenn wir die mit dieser Zahl multiplicirte Gleichung (6) zu (2) hinzufügen, so erhalten wir

$$\delta^{\prime 2}U = \frac{C_1}{\sqrt{1 + C_1^2}}\chi''(\xi)\delta^{\prime}\xi^2 + J$$

wobei J das Integral vorstellen möge, welches den letzten Bestandtheil der Formel (2) bildet.

Aus vorstehendem Werthe von $\delta^2 U$ ziehen wir den Schluß, daß unsere Auflösung zuverläßig ein Minimum für $U = AB$ geliefert habe, wenn das Produkt $C_1 . \chi''(\xi)$ einen positiven Werth erhält. — Nennen wir diejenige Seite der Figurenebene, nach welcher die positiven y wachsen, die obere, so können wir sagen, $C_1 = \frac{\eta - \beta}{\xi - \alpha}$ besitze einen $\left|\begin{matrix}\text{positiven}\\ \text{negativen}\end{matrix}\right|$ Werth je nachdem der Gränzpunkt A $[y = \beta]$ $\left|\begin{matrix}\text{tiefer}\\ \text{höher}\end{matrix}\right|$ als B $[y = \eta]$ liegt, $\chi''(\xi)$ aber sei eine $\left|\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}\right|$ Größe je nachdem die Gränzcurve L_2 im Punkte B ihre Convexität nach $\left|\begin{matrix}\text{unten}\\ \text{oben}\end{matrix}\right|$ kehrt. Die Forderung, daß C_1 und $\chi''(\xi)$ einerlei Vorzeichen haben sollen, hat also die geometrische Bedeutung, daß der Bogen $L_2 B B_1$ dem Punkte A seine Convexität zukehren müße. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so kann man sich nicht von einem Minimum der Linie AB überzeugt halten. In der That würde man auf der Curve L_2, wenn sie nach A hin ihre Concavität wendete, in der Nachbarschaft von B solche Punkte B_1 annehmen können, daß $AB_1 < AB$ wäre; wenigstens in allen den Fällen liegt die Möglichkeit hiervon klar vor Augen, wenn das von A auf die genannte Curve gefällte Perpendikel AB größer ist als der demselben Punkte B zugehörige Krümmungshalbmeßer.

Anhang
zum dritten, vierten und fünften Capitel.

Ueber gewiße andere Betrachtungsweisen, auf welche man manchmal die Bestimmung des Maximum oder Minimum von $\int V dx$ gegründet hat.

§. 68.

Sobald man erwägt, daß die Bildung eines Variationsquotienten immer auf eine oder einige Differentiationen hinaus läuft, die nur nach besondern Gesichtspunkten auszuführen sind, so wird man es begreiflich

finden, daß einzelne von den Aufgaben, mit deren methodischer Behandlung wir uns in den drei vorhergehenden Capiteln beschäftigt haben, auch blos durch einen verständigen Gebrauch der Differentialrechnung, ohne andere Hülfsmittel, aufgelöst werden können und schon in älteren Zeiten, alsbald nach Erfindung des Infinitesimalcalculs, aufgelöst worden sind, wie wir bereits in der Anmerkung zu §. 8 angezeigt haben. Diese Erscheinung wird man sich um so leichter erklären, wenn man die Ueberlegung hinzutreten läßt, daß die Einführung eines neuen Symbols, wie δ oder (δ), den zu Grunde liegenden und leitenden Ideen gegenüber nichts Wesentliches sei, daß überdies aus den Differentialgleichungen, von welchen die Bestimmung des Maximum oder Minimum des Integrals $\int V dx$ abhängt, die willkührlichen Functionen δy, δs, ꝛc. gänzlich herausfallen. Eine genauere Nachweisung hierüber dürfte indessen manchem unserer Leser willkommen sein.

Als eine Grundlage, worauf die gedachten, von den gegenwärtig benutzten Methoden mehr oder weniger abweichenden Auflösungen sich stützen, glauben wir mit Recht den Gedanken zu bezeichnen, daß man sich, wenn eine Curve AMM'NB zwischen zwei Gränzordinaten HA, KB einen gegebenen, von der Gestalt der Curve abhängigen Ausdruck zu einem Maximum oder Minimum machen soll, zunächst als Ziel vorsetzt die Beschaffenheit eines unendlich-kleinen Bogens MN dieser Curve so zu bestimmen, daß in Beziehung auf die unendlich nahe an einander gerückten Gränzordinaten PM, QN dieselbe Eigenschaft des Maximums oder Minimums erfüllt wird, welche dem ganzen Bogen AMNB in Beziehung auf die Gränzordinaten HA, KB zukommen soll. Denn indem man dann noch einen oder einige auf der Curve zwischen M und N gelegene Punkte M', M'', .. in die Betrachtung hereinzieht, also die unendlich kleine Strecke PQ in zwei oder drei ꝛc. Theile zerlegt, wird man statt einer variirenden Curve blos eine aus mehreren geradlinigen Stücken (Bogendifferentialien) bestehende gebrochene Linie zu untersuchen haben; und man gelangt auf diese Weise zu einer Relation zwischen den in Betrachtung zu ziehenden Differentialien dx, dy, d^2y, ds, ... manchmal, je nach Beschaffenheit der Aufgabe, mit so viel Bequemlichkeit als man nur wünschen kann. Es wird um so mehr gerechtfertigt sein in einige Details hierüber einzugehen, als es sich nicht blos um ein bedeutendes historisches Interesse dabei handelt, sondern da auch neuerdings wieder ein

ähnliches Verfahren in Anwendung gebracht worden ist.*) Nehmen wir zunächst eines der einfachsten isoperimetrischen Probleme vor:

unter allen gleichlangen Curven AB diejenige zu bestimmen, durch welche $U = \int_a^\xi V dx$ zu einem Maximum oder Minimum gemacht wird, wenn

$$V = F(y)$$

gegeben ist.

Gesetzt in Fig. 21 wäre AMNB die verlangte Curve $y = f(x)$ und $\alpha\mu\nu\beta$ stellte das Wachsthum der Function $F(f(x))$ vor, so daß der Flächenraum $\alpha HK\beta$ den Werth von U angiebt. Wenn jetzt MM', M'M'', M''N drei unmittelbar auf einander folgende Elemente der gesuchten Curve sind, wobei der Punkt M beliebig angenommen worden, so muß auch der unendlich kleine Theil von U, welcher zwischen den Ordinaten $P\mu$, $Q\nu$ eingeschlossen ist, ein Maximum beziehgsw. Minimum sein in Vergleich mit allen Flächen $\mu PQ\nu$, bei denen die Gränzpunkte μ, ν fix beibehalten würden, aber die zwischen $P\mu$ und $Q\nu$ liegenden Ordinaten vermöge der Variationen von y geänderte Werthe erhielten. Denn gesetzt, es handele sich um ein Maximum und man könnte zwischen M und N eine Curve $M\tau_1\tau_2N$ ausfindig machen, welche gleiche Länge mit MM'M''N besäße, durch welche aber, indem man ihre Ordinaten der Berechnung von $V = F(y)$ zu Grunde legte, dem entsprechenden Flächentheil $\mu PQ\nu$ ein größerer Inhalt als vorher verschafft würde; so würde auch das der ganzen Curve $AM\tau_1\tau_2NB$ entsprechende U größer als das zur Curve AMM'M''NB gehörige ausfallen, diese letztere könnte also, der Voraussetzung widersprechend, keine Maximumscurve sein. Dieser Schluß beruht, wie man sieht, darauf, daß die durch $\alpha HP\mu$ und $\beta KQ\nu$ vorgestellten Bestandtheile von U ungeänderte Werthe behalten, so lange man die Bogen AM und BN nicht variirt, und er findet überhaupt dann Statt, wenn V unter der allgemeinen Form

$$V = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots\right)$$

steht. Er würde nur dann nicht mehr zulässig sein, wenn man durch die Natur der Aufgabe gezwungen wäre auch diejenigen Ordinaten der Curve

*) Schellbach Probleme der Variationsr. in Crelle's Journ. Bd. XLI p. 293. Man wird darunter auch einige neue und mit großer Eleganz aufgelöste Aufgaben finden.

$\alpha\mu\nu\beta$, welche außerhalb des Intervalls $M\mu Nv$ liegen, bei dem Uebergang von der Curve $MM'M''N$ zur Nachbarcurve $M\tau_1\tau_2N$ als variirende Größen zu denken, wenn also z. B. wie in §. 50 außer x, y und den Differentialquotienten von y in V selbst noch ein Integral eingeschloßen wäre, dessen Betrag von der Gestalt des ganzen Bogens $AMM'M''NB$ abhängig wäre.

Wenn wir nun

$$OP = x_n \qquad PM = y_n$$
$$OP' = x_n + dx_n = x_{n+1} \qquad P'M' = y_n + dy_n = y_{n+1}$$
$$OP'' = x_{n+1} + dx_{n+1} = x_{n+2} \qquad P''M'' = y_{n+1} + dy_{n+1} = y_{n+2}$$
$$OQ = x_{n+2} + dx_{n+2} = x_{n+3} \qquad QN = y_{n+2} + dy_{n+2} = y_{n+3}$$

ferner $MM' = ds_n$, $M'M'' = ds_{n+1}$, $M''N = ds_{n+2}$ setzen; so hat die zu einem Maximum oder Minimum zu machende Fläche $u = \mu PQv$ den Inhalt

$$\tfrac{1}{2}\big[F(y_n) + F(y_{n+1})\big]dx_n + \tfrac{1}{2}\big[F(y_{n+1}) + F(y_{n+2})\big]dx_{n+1} + \tfrac{1}{2}\big[F(y_{n+2}) + F(y_{n+3})\big]dx_{n+2}$$

oder wenn wir $dx_n = dx_{n+1} = dx_{n+2}$ constant $= dx$ annehmen,

$$(1) \qquad u = \big[\tfrac{1}{2}F(y_n) + F(y_{n+1}) + F(y_{n+2}) + \tfrac{1}{2}F(y_{n+3})\big]dx$$

Da hierin y_{n+1} und y_{n+2} die sich um die verschwindenden Größen δy_{n+1} resp. δy_{n+2} ändernden Variablen sind, so gelangt man, damit u ein Maximum (oder Minimum) werde, zur Bedingungsgleichung

$$(2) \qquad F'(y_{n+1})\delta y_{n+1} + F'(y_{n+2})\delta y_{n+2} = 0$$

Allein zwischen δy_{n+1} und δy_{n+2} besteht noch eine bestimmte Relation, welche aus der Bedingung

$$S = ds_n + ds_{n+1} + ds_{n+2} = \text{Const.}$$

folgt, nämlich $\dfrac{dS}{dy_{n+1}}\delta y_{n+1} + \dfrac{dS}{dy_{n+2}}\delta y_{n+2} = 0$. Da

$$ds_n = \sqrt{\big((y_{n+1} - y_n)^2 + (x_{n+1} - x_n)^2\big)}$$
$$ds_{n+1} = \sqrt{\big((y_{n+2} - y_{n+1})^2 + (x_{n+2} - x_{n+1})^2\big)}$$
$$ds_{n+2} = \sqrt{\big((y_{n+3} - y_{n+2})^2 + (x_{n+3} - x_{n+2})^2\big)}$$

ist, so erhalten wir

$$\frac{dS}{d.y_{n+1}} = \frac{y_{n+1} - y_n}{ds_n} - \frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{ds_{n+1}} = \frac{dy_n}{ds_n} - \frac{dy_{n+1}}{ds_{n+1}}$$
$$\frac{dS}{d.y_{n+2}} = \frac{y_{n+2} - y_{n+1}}{ds_{n+1}} - \frac{y_{n+3} - y_{n+2}}{ds_{n+2}} = \frac{dy_{n+1}}{ds_{n+1}} - \frac{dy_{n+2}}{ds_{n+2}}$$

also muß sein

$$(3) \qquad \left[\frac{dy_n}{ds_n} - \frac{dy_{n+1}}{ds_{n+1}}\right]\delta y_{n+1} + \left[\frac{dy_{n+1}}{ds_{n+1}} - \frac{dy_{n+2}}{ds_{n+2}}\right]\delta y_{n+2} = 0$$

Hieraus in Verbindung mit (2) ergiebt sich nun

$$\frac{1}{F'(y_{n+1})}\left[\frac{dy_{n+1}}{ds_{n+1}} - \frac{dy_n}{ds_n}\right] = \frac{1}{F'(y_{n+2})}\left[\frac{dy_{n+2}}{ds_{n+2}} - \frac{dy_{n+1}}{ds_{n+1}}\right]$$

oder einfacher

$$\frac{1}{F'(y_n)}d.\left[\frac{dy}{ds}\right]_n = \frac{1}{F'(y_{n+1})}d.\left[\frac{dy}{ds}\right]_{n+1}$$

Statt $F'(y_{n+1})$ in dem ersten Theile dieser Gleichung konnten wir uns erlauben $F'(y_n)$ zu substituiren, weil der Unterschied $F'(y_{n+1}) - F'(y_n) = F''(y_n)dy_n$ ein Unendlich-kleines gegen $F'(y_n)$ ist; und aus demselben Grunde haben wir im zweiten Theile $F'(y_{n+1})$ statt $F'(y_{n+2})$ geschrieben. Da aber M $[x_n, y_n]$ einen beliebigen Punkt der gesuchten Curve bezeichnet, so gilt vorstehende Gleichung für alle Punkte d. h. die Differentialgröße

$$\frac{1}{F'(y)}d\frac{dy}{ds}$$

muß längs der verlangten Curve AMB einen constanten Werth besitzen, so daß wir, unter λ eine unbestimmte Constante verstehend und berücksichtigend daß $dx = \text{Const.}$ angenommen wurde,

$$(4) \qquad \frac{1}{F'(y)}d\frac{dy}{ds} = \frac{dx}{\lambda}$$

setzen dürfen. Dieses ist genau die Gleichung, auf welche schon Joh. Bernoulli die Auflösung der vorliegenden Aufgabe gegründet hat.*) Er giebt zu ihrer Herleitung für die Gleichung (3) einen Beweis mittelst geometrischer Constructionen, zur Entwickelung der Gl. (2) aber gebraucht er, von dem Unterschiede in der Bezeichnung abgesehen, dieselben Schlüße wie wir sie hier vorgetragen haben.

Uebrigens konnten wir den Calkul auch nach der im Vorhergehenden so vielfältig von uns angewendeten Methode der unbestimmten Factoren auf die Art einrichten, daß wir die beiden Differentialquotienten

$$\frac{d(ds_n + ds_{n+1} + ds_{n+2})}{dy_{n+1}} \quad \text{und} \quad \frac{d(ds_n + ds_{n+1} + ds_{n+2})}{dy_{n+2}}$$

mit einer unbestimmten Constanten λ multiplicirt (und durch dx dividirt) zu den ebenfalls nach y_{n+1} und y_{n+2} genommenen Differentialquotienten

*) Remarques sur les Isopérimètres in Acta Eruditor. Lips. ab anno 1718 oder in Joh. Bernoulli Opera T. II p. 244. Es ist dies, so viel wir wißen, des genannten großen Mathematikers letzte Abhandlung über jene isoperimetrischen Probleme, welche ihn und seinen Bruder Jacob Bernoulli so vielfältig beschäftigt, leider auch in so bedauerliche Zwistigkeiten verwickelt hatten.

von u, nämlich

$$\frac{du}{dy_{n+1}} = F'(y_{n+1}) \qquad \text{und} \qquad \frac{du}{dy_{n+2}} = F'(y_{n+2})$$

addirten und jede Summe für sich gleich Null setzten. Dadurch entsteht

$$(5) \qquad \begin{aligned} F'(y_{n+1}) - \frac{\lambda}{dx} d\frac{dy_n}{ds_n} &= 0 \\ F'(y_{n+2}) - \frac{\lambda}{dx} d\frac{dy_{n+1}}{ds_{n+1}} &= 0 \end{aligned}$$

was mit (4) gleichbedeutend ist; und man hat jetzt bei dieser Herleitung der Differentialgleichung der fraglichen Curve weder das Zeichen $\int$ noch das Zeichen δ anzuwenden nöthig gehabt.

Wenn $F(y) = y$ sein soll, so daß $U = \int y dx$ ist, so erhält man

$$dx - \lambda d\frac{dy}{ds} = 0$$

als Differentialgleichung der Curve.*) Sie stimmt genau überein mit unserer Gl. (1) in §. 40 und führt, wie wir wißen, nach der zweiten Integration zu der Gleichung eines Kreises mit dem Radius $\pm\lambda$. Um aber für eine beliebige Form von $F(y)$ die Integration auszuführen, bemerke man, daß

$$d\frac{dy}{ds} = \frac{ds d^2y - dy d^2s}{ds^2} = \frac{ds^2 - dy^2}{dy}\frac{d^2s}{ds^2}$$

ist, weil nämlich unter der hier gemachten Annahme von $dx = \text{Const.}$ aus $ds^2 = dx^2 + dy^2$ durch Differentiation $d^2y = \frac{ds d^2s}{dy}$ folgt. Wir können daher auch schreiben

$$d\frac{dy}{ds} = \frac{dx^2}{dy}\frac{d^2s}{ds^2} = -\frac{dx}{dy} d\frac{dx}{ds}$$

Mittelst dieses letzten Werths verwandelt sich Gl. (4) in

$$\lambda d\frac{dx}{ds} + F'(y)dy = 0$$

also integrirt

$$\lambda\frac{dx}{ds} + F(y) = C$$

Setzt man hierin wieder $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ für ds und quadrirt, so laßen sich die Variablen absondern, und man gelangt zu der von Bernoulli aufgestellten Gleichung

*) Vgl. die citirte Abhandlung von Schellbach p. 297.

$$(6) \qquad x - A = \pm \int \frac{F(y) - C}{\sqrt{\lambda^2 - (F(y) - C)^2}} dy$$

Für $F(y) = \pi y^2$ hat man die in §. 53 II) gedachte Aufgabe vor sich; indem man $C = \pi B$, $\lambda = \pi C$ setzt, verwandelt sich (6) in die dort angeführte Gleichung der elastischen Curve.

Um den Gegenstand noch durch ein zweites Beispiel aufzuklären, wählen wir die geodätische Linie auf einer Rotationsoberfläche. Wenn M einen beliebigen Punkt der Curve, φ seine von einem ersten Meridian an gezählte Länge, r den Radius des Parallelkreises bedeutet, so besteht, wie wir in §. 46 unter II) und III) gesehen haben, als allgemeines erstes Integral der Differentialgleichung der fraglichen Curve die Gleichung

$$r^2 \frac{d\varphi}{ds} = C$$

Diese Gleichung, welche ebenfalls schon Joh. Bernoulli (1728) gefunden hat*), jedoch mit theilweiser Hülfe von geometrischen Constructionen, die dem heutigen Geschmacke wenig zusagen würden, scheint Clairaut, welcher sich kurze Zeit darnach mit demselben Gegenstande beschäftigte**), zuerst mittelst einer Analyse hergeleitet zu haben, die unter den vorhin festgehaltenen Gesichtspunkt fällt. Wir können, indem wir unsere obige Bezeichnung möglichst beizubehalten suchen, die Sache etwa in folgender Weise darstellen. Es werde der vom Pole E (Fig. 15) gerechnete Meridianbogen als Independente angenommen und durch x vorgestellt, so daß wir

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{Mp} \\ \mathrm{M'h} \end{matrix}\right\} = \frac{\mathrm{pp'}}{\mathrm{M''h'}} \left.\vphantom{\begin{matrix} \mathrm{Mp} \\ \mathrm{M'h} \end{matrix}}\right\} = dx = \mathrm{Const.}$$

setzen. Für den Punkt M sei $\mathrm{EM} = x_n$, ferner die vom ersten Meridian an gezählte (geogr.) Länge $= \varphi_n$, der Radius des durch M laufenden Parallelkreises r_n, endlich $\mathrm{MM'} = ds_n$. Dieselben Zeichen, mit den Indices $n+1$, $n+2$ versehen, beziehen wir auf die Punkte M', M''. Dann haben wir

$$\mathrm{Mh} = [r d\varphi]_n = r_n(\varphi_{n+1} - \varphi_n) \qquad \mathrm{M'h'} = r_{n+1}(\varphi_{n+2} - \varphi_{n+1})$$

also

$$ds_n = \sqrt{[dx^2 + r_n^2(\varphi_{n+1} - \varphi_n)^2]}$$

$$ds_{n+1} = \sqrt{[dx^2 + r_{n+1}^2(\varphi_{n+2} - \varphi_{n+1})^2]}$$

Die Frage ist jetzt: wo muß, indem man sich M und M'' als bereits ge-

*) Opera T. IV p. 121.

**) Mém. de l'Acad. des Sciences de Paris, 1733.

funden und fixirt denkt, der zwischen beiden liegende und auf dem Parallelkreise pM'h' noch verschiebbare Punkt M' angenommen werden d. h. wie groß muß φ_{n+1} sein, damit die Summe $S = ds_n + ds_{n+1}$ ein Minimum werde? Und um die zur Beantwortung dienliche Gleichung zu bilden, braucht man nur den nach φ_{n+1} genommenen Differentialquotienten von S gleich Null zu setzen.

Wir erhalten

$$\frac{dS}{d.\varphi_{n+1}} = \frac{r_n^2(\varphi_{n+1} - \varphi_n)}{ds_n} - \frac{r_{n+1}^2(\varphi_{n+2} - \varphi_{n+1})}{ds_{n+1}}$$

$$= r_n^2 \frac{d\varphi_n}{ds_n} - r_{n+1}^2 \frac{d\varphi_{n+1}}{ds_{n+1}} = \left[r^2 \frac{d\varphi}{ds}\right]_n - \left[r^2 \frac{d\varphi}{ds}\right]_{n+1}$$

$$= -d.\left[r^2 \frac{d\varphi}{ds}\right]_n$$

Die verlangte Gleichung ist also

$$d.r^2 \frac{d\varphi}{ds} = 0 \qquad r^2 \frac{d\varphi}{ds} = \text{Const.}$$

§. 69.

In Betreff des in der angeführten Abhandlung von Schellbach angewendeten Verfahrens muß jedoch noch bemerkt werden, daß man nach der Absicht des Verfassers, während man sich der Factoren λ so bedient, wie wir es bei Herleitung der Gleichungen (5) im vor. §. gethan haben, doch nicht mehr an die isolirte Betrachtung eines unendlich kleinen Theiles von $U = \int V dx$ gefesselt sein soll. Man kann nämlich die gesuchte Curve AB gleich anfangs in ihrer Totalität als ein Polygon auffaßen, kann den unzähligen Eckpunkten entsprechend die Abscissenaxe in unendlich viele Stücke von verschwindender Größe zerlegen, so daß

$$HK = dx_0 + dx_1 + \cdots + dx_n + dx_{n+1} + dx_{n+2} + \cdots$$

ist, und nun alle Ordinaten entweder mit Einschluß der beiden äußersten HA und KB, oder, wenn diese gegeben sind, die zwischen liegenden sämmtlich als unbekannte Größen ansehen, welche so zu bestimmen seien, daß U ein Maximum oder ein Minimum werde. Zu diesem Zwecke muß man, da U jetzt einen von diesen unzähligen und beliebig variirenden Ordinaten abhängigen Ausdruck, eine aus unendlich vielen Summanden bestehende Summe vorstellt, nach den Regeln der Differentialrechnung jeden einzelnen der in Beziehung auf eine beliebige jener Ordinaten genommenen

partiellen Differentialquotienten gleich Null setzen. Man würde auf diese Weise unzählig viele Gleichungen erhalten, die jedoch alle einerlei Form haben und sich blos durch die Größe der Indices an x und y unterscheiden, so daß sich aus einer, z. B. derjenigen, welche aus dem nach y_n genommenen Differentialquotienten entspringt, die übrigen bilden laßen. Gehörte aber die Aufgabe zu den im vorhergehenden fünften Capitel behandelten, zu deren Auflösung wir uns der gemischten Variationen bedienten, so hätte man auch noch $x_0 = \alpha$, $x_1 = x_0 + dx_0$, $x_2 = x_1 + dx_1$, u. s. w. als gesuchte Größen anzusehen, also auch die partiellen Differentialquotienten von U nach x_0, x_1, ... x_n, x_{n+1}, ... einzeln gleich Null zu setzen. Insofern jedoch zwischen den Aenderungen der zu bestimmenden Größen Bedingungsgleichungen von der Form

$$\Theta(x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots x_n, y_n, x_{n+1}, \ldots) = 0$$

zu erfüllen sind, wie es bei der im vorigen Paragraphen erklärten Auflösung der isoperimetrischen Probleme vermöge der Gleichung

$$ds_0 + ds_1 + ds_2 + \cdots + ds_n + ds_{n+1} + \cdots = \text{Const.}$$

der Fall war, wird man den nach y_n oder x_n genommenen Differentialquotienten von Θ mit einem unbestimmten Factor λ multipliciren, das Produkt zu dem nach derselben Variablen genommenen partiellen Differentialquotienten von U addiren und diese Summe gleich Null setzen, wie wir es im vor. §. bei Aufstellung der Gleichungen (5) erläutert haben. Wäre noch eine zweite Bedingungsgleichung

$$\Theta_1(x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots x_n, y_n, x_{n+1}, y_{n+1}, \ldots) = 0$$

oder auch eine blos auf die Gränzcoordinaten $x_0 = \alpha$, $y_0 = y_\alpha$, $\left[\frac{dy}{dx}\right]_0 = p_\alpha$, ... $\xi = x_m$, $y_\xi = y_m$, $p_\xi = \left[\frac{dy}{dx}\right]_m$, ... bezügliche, etwa (wie in §. 59 II)

$$\Theta\left(x_0, y_0, \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \xi, y_m, \frac{y_m - y_{m-1}}{\xi - x_{m-1}}\right) = 0$$

zu erfüllen, so würde man für die hieraus abzuleitenden partiellen Differentialquotienten einen zweiten Multiplikator anwenden u. s. w. — Schließlich erinnern wir noch, daß wenn wir so eben mehrmals sagten, es solle U resp. Θ nach y_n oder x_n partiell differentiirt werden, dieses in der Weise zu verstehen ist, daß man vor allen Dingen das Integral $U = \int V dx$ als die Summe der unzähligen, blos x und y enthaltenden und sich durch den successiv wachsenden Index n von einander unterscheidenden Elemente

darstelle, daß man also z. B. wenn in V der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ vorkommt, für diesen successiv die Brüche

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \ldots \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, \frac{y_{n+1} - y_n}{x_{n+1} - x_n}, \ldots$$

setze, wobei unter der Annahme eines constanten dx die Nenner alle einander gleich werden; daß man ferner für $\frac{d^2y}{dx^2}$ unter der Annahme eines constanten dx successiv setze

$$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{dx^2}, \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{dx^2}, \ldots \frac{y_n - 2y_{n-1} + y_{n-2}}{dx^2}, \ldots$$

daß man ferner an die Stelle von ds successiv diejenigen Ausdrücke für $ds_0, ds_1, \ldots ds_n, ds_{n+1}, \ldots$ einsetze, deren wir uns bereits im vorigen Paragraphen bedient haben; — u. s. w.

Ebenso ist bei isoperimetrischen Problemen mit jedem Integrale $\int W dx$ zu verfahren, welches einen unveränderlichen Werth behalten soll; erst nach dieser Umgestaltung ist man zu einer Bedingungsgleichung von der vorhin vorausgesetzten Form

$$\Theta(x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots . x_n, y_n, x_{n+1}, y_{n+1}, \ldots .) = 0$$

gelangt.

Bei der Anwendung des Verfahrens besteht in den hier angedeuteten vorläufigen Transformationen, die freilich unter Umständen recht beschwerlich erscheinen mögen, das erste Hauptgeschäft. Uebrigens gelangt man, sobald man dasselbe allgemein durchzuführen versucht, auf die nämlichen Differentialgleichungen, welche wir als die sogenannten „Hauptgleichungen" in Cap. III und IV kennen gelernt haben. Nehmen wir z. B. an, im gegebenen V und W seien außer x und y noch die Differentialquotienten $\frac{dy}{dx} = p$ und $\frac{d^2y}{dx^2} = q$ enthalten, und man habe, indem man α durch x_0 vorstellt und $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots . = dx$ constant behandelt, die Summe $\ddot{U} = \int V dx + \lambda \int W dx$ nach der erklärten Regel umgestaltet, nämlich dadurch daß man in

$$V + \lambda W = F(x, y, p, q)$$

die oben angegebenen, mit wachsenden Indices versehenen Ausdrücke einsetzte; so hat man eine Summe von unzähligen Elementen vor sich, von denen einige unmittelbar auf einander folgende durch

$$\begin{array}{l}
\cdot\cdot \qquad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \qquad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \\
+\mathrm{F}\left(y_{n-2},\ \dfrac{y_{n-1}-y_{n-2}}{dx},\ \dfrac{y_n \quad -2y_{n-1}+y_{n-2}}{dx^2}\right)dx \\
+\mathrm{F}\left(y_{n-1},\ \dfrac{y_n \quad -y_{n-1}}{dx},\ \dfrac{y_{n+1}-2y_n \quad +y_{n-1}}{dx^2}\right)dx \\
+\mathrm{F}\left(y_n \quad ,\ \dfrac{y_{n+1}-y_n}{dx},\ \dfrac{y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n}{dx^2}\right)dx \\
\cdot\cdot \qquad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \qquad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot
\end{array}$$

oder in kürzerer Bezeichnung durch

$$\mathrm{F}(n-2)dx+\mathrm{F}(n-1)dx+\mathrm{F}(n)dx$$

angedeutet werden können. Man sieht, daß y_n außer diesen drei Gliedern in der ganzen Summe $\ddot{\mathrm{U}}$ nirgends vorkommt. Indem man daher den nach y_n genommenen Differentialquotienten des ganzen Aggregats bildet, nach ausgeführter Differentiation aber unter dem Functionszeichen F in Gedanken wieder $\frac{dy_n}{dx}=p_n$ und $\frac{d^2y_n}{dx^2}=q_n$ an die Stelle von

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{dx} \qquad \text{resp.} \qquad \frac{y_{n+2}-2y_{n+1}+y_n}{dx^2}$$

einsetzt, erhält man

$$\frac{d\ddot{\mathrm{U}}}{d.y_n}=\left\{\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{1}{dx^2}\partial_q\mathrm{F}(n-2) \\
\qquad\qquad +\dfrac{1}{dx}\partial_p\mathrm{F}(n-1)-\dfrac{2}{dx^2}\partial_q\mathrm{F}(n-1) \\
+\partial_y\mathrm{F}(n)-\dfrac{1}{dx}\partial_p\mathrm{F}(n) \qquad +\dfrac{1}{dx^2}\partial_q\mathrm{F}(n)
\end{array}\right\}.dx$$

Allein $\partial_p\mathrm{F}(n)-\partial_p\mathrm{F}(n-1)$ ist offenbar gleichbedeutend mit $d\partial_p\mathrm{F}(n-1)$, ferner

$$\begin{aligned}
&\partial_q\mathrm{F}(n)-2\partial_q\mathrm{F}(n-1)+\partial_q\mathrm{F}(n-2) \\
&\qquad =[\partial_q\mathrm{F}(n)-\partial_q\mathrm{F}(n-1)]-[\partial_q\mathrm{F}(n-1)-\partial_q\mathrm{F}(n-2)] \\
&\qquad =d\partial_q\mathrm{F}(n-1)-d\partial_q\mathrm{F}(n-2) \\
&\qquad =d^2\partial_q\mathrm{F}(n-2)
\end{aligned}$$

Daher ist der für $\frac{d\ddot{\mathrm{U}}}{d.y_n}$ gefundene Ausdruck so viel als

$$\left(\partial_y\mathrm{F}(n)-\frac{1}{dx}d\partial_p\mathrm{F}(n-1)+\frac{1}{dx^2}d^2\partial_q\mathrm{F}(n-2)\right)dx$$

Die an den Functionszeichen $\partial_y\mathrm{F}$, $\partial_p\mathrm{F}$, $\partial_q\mathrm{F}$ haftenden Argumente n, $n-1$, $n-2$, die wir auch als Indices an $[\partial_y\mathrm{F}]$, $[\partial_p\mathrm{F}]$, $[\partial_q\mathrm{F}]$ hätten

anhängen können, zeigen an, daß man für x in der ersten der genannten drei Functionen den Werth x_n, in der zweiten $x_{n-1} = x_n - dx$, in der dritten $x_{n-2} = x_n - 2dx$, und für y jedesmal die zugehörige Ordinate einsetzen solle. Da hiernach der Unterschied zwischen $\partial_p F(n-1)$ und $\partial_p F(n)$ ein Unendlich-kleines in Beziehung auf $\partial_p F(n)$, nämlich $\frac{d\partial_p F}{dx} dx$ ist, so kann man statt der einen dieser beiden Größen auch die andere, d. h. $d\partial_p F(n)$ anstatt $d\partial_p F(n-1)$ nehmen. Desgleichen verschwindet der Unterschied zwischen $d^2\partial_q F(n-2)$ und $d^2\partial_q F(n)$. Weil nun der in Beziehung auf y_n genommene Differentialquotient von $\bar{U}$ gleich Null gesetzt werden muß, die dadurch entstehende Differentialgleichung aber für jeden Werth von n d. h. für jeden Punkt der Curve gelten soll (indem wir hier von den an den Gränzpunkten A, B durch Gränzgleichungen $\ominus_1 = 0$ ꝛc. bedingten Modificationen absehen); so haben wir endlich

$$\partial_y F - \frac{1}{dx} d\partial_p F + \frac{1}{dx^2} d^2\partial_q F = 0$$

Wegen $F(x, y, p, q) = V + \lambda W$ ist dies mit der in §. 39 entwickelten Gl. (5) wirklich identisch.

Sechstes Capitel.

Von den Variationen der Functionen von zwei Independenten.

§. 70.

Aehnliche Betrachtungen, wie sie in den vorhergehenden Capiteln in Betreff der variirenden Functionen von einer einzigen, mit x bezeichneten Independenten durchgeführt worden sind, laßen sich auch über die Functionen von mehreren independenten Variablen anstellen. Wir wollen uns jedoch, um nicht allzu complicirte Formeln aufstellen zu müßen, welche schließlich doch kaum eine praktische Anwendung finden würden, auf die Voraussetzung von zwei Independenten x, y beschränken.

I) Es sei also $s = f(x, y)$ die in den Zustand des Variirens zu versetzende Function. Wie auch immer $f(x, y)$ beschaffen sein mag, man

kann sich die vorstehende Gleichung durch eine auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem bezogene Fläche veranschaulichen, so daß z die zu den Abscissen x, y gehörige Ordinate vorstellt. Aus diesem Grunde werden wir im Folgenden uns häufig des Ausdrucks „variirende Fläche" statt „variirende Function" bedienen, auch von „nächstanliegenden Nachbarflächen" reden. Gleichungen für diese Nachbarflächen laßen sich nach den in §. 2 gegebenen Andeutungen durch Einführung eines Variationsarguments t auf unzählige Arten bilden. Sei $\Phi(x, y, t)$ ein solcher Ausdruck, welcher für $t = 0$ sich auf $f(x, y)$ reducirt, so würde

$$(1) \qquad \left[\frac{d\Phi(x, y, t)}{dt}\right]_0 dt = \Omega(x, y)dt$$

wobei $\Omega(x, y)$ eine willkührliche Function bedeutet, die Variation von z angeben, insofern die Independenten x, y während dieser Aenderung von z ihren ursprünglichen Werth ungeändert beibehalten sollen, d. h. wir werden den durch die Formel (1) angedeuteten Zuwachs von z in allen solchen Aufgaben, mit deren Natur es sich verträgt $\delta x = 0$, $\delta y = 0$ anzunehmen, gleich δz setzen (§. 2); dieselbe Größe wird dagegen die reine Variation von z genannt und durch $(\delta)z$ bezeichnet werden, so oft es nöthig erscheint bei der Berechnung der (gemischten) Variation δz auch auf die Aenderungen δx, δy Rücksicht zu nehmen (§. 56). Das erstere wird Statt finden, wenn z. B. vier Gränzebenen $x = \alpha$, $x = \xi$, $y = \beta$, $y = \eta$, nämlich ein zur Ebene YZ, ein anderes zur Ebene XZ paralleles Paar, gegeben sind und wenn eine Größe U, welche von dem zwischen diesen Gränzebenen eingeschloßenen Stücke der gesuchten Fläche abhängt, z. B. das Doppelintegral $\int_\alpha^\xi \int_\beta^\eta F(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy})dydx$ ein Maximum oder Minimum werden soll. Eine Aufgabe der anderen Art dagegen wird man vor sich haben, wenn die Größe U von dem durch eine geschloßene Curve ABCD begränzten Stücke der gesuchten Fläche abhängt und wenn dabei diese Gränzcurve nicht selbst, sondern etwa nur eine krumme Fläche $\Theta(x, y, z) = 0$ gegeben ist, worauf sie liegen soll. In diesem Falle ist mit der gesuchten Fläche zugleich auch die Gränzcurve ABCD als variirend anzusehen, so daß sie continuirlich in die unendlich wenig geänderten, auf der Fläche $\Theta = 0$ gelegenen Nachbarcurven $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, ... übergeht. Wir stellen uns hierbei vor, daß dem Punkte A der Punkt A_1 entspreche, dem Punkte B der Punkt B_1, u. s. w. ohne

daß die nähere Bestimmung eines Gesetzes nöthig wäre, nach welchem man zu jedem Punkte der Fläche **ABCDM** ... den entsprechenden Punkt der Fläche $A_1B_1C_1D_1M_1$ ... zu finden habe, worüber sich ganz ähnliche Betrachtungen würden anstellen laßen wie am Anfange des fünften Capitels. Wenn nun α, β, γ die Coordinaten des Punktes **A** sind, so werden die Coordinaten von A_1 durch $\alpha+\delta\alpha$, $\beta+\delta\beta$, $\gamma+\delta\gamma$ angegeben; dabei ist eine jede der drei Variationen $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ als Produkt einer willkührlichen Größe in das Differential des Variationsarguments zu denken, so jedoch, daß die Bedingungsgleichung

$$\partial_x\Theta\,\delta\alpha+\partial_y\Theta\,\delta\beta+\partial_z\Theta\,\delta\gamma=0$$

erfüllt wird, sobald man darin α, β, γ an die Stelle von x, y, z setzt. Aber auch die Coordinaten jedes andern, nicht in der Gränzcurve gelegenen Punktes der in Untersuchung stehenden Fläche sind bei dieser Betrachtung als gleichzeitig variirende Größen anzusehen, so daß wir, wenn x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punkts **M** der ursprünglichen Fläche **ABCDM** sind und wenn M_1 der entsprechende Punkt auf der variirenden Fläche ist, die Coordinaten von M_1 durch $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$ vorzustellen haben. Zwischen diesen Variationen δx, δy, δz findet unmittelbar gar keine Relation Statt, dieselben können bei dem Fortschreiten vom Punkte **M** zu andern Punkten der Fläche **ABCD** nach einem beliebigen Gesetze sich ändern, also als unbestimmte (mit dt multiplicirte) Functionen der beiden Independenten x, y aufgefaßt werden; wenn wir jedoch die reine Variation $(\delta)z$ in den Calkul hereinziehen, so gelangen wir durch dieselben Schlüße, die in dem analogen Falle des §. 56 angewendet worden, zu einer wichtigen Formel, welche δz durch δx, δy, $(\delta)z$ ausdrückt.

Aus $z=\Phi(x, y, t)$ folgt nämlich, wenn man t in $t+dt$ und gleichzeitig x in $x+\delta x$, y in $y+\delta y$ übergehen läßt,

$$\delta z=\frac{d\Phi}{dt}dt+\frac{d\Phi}{dx}\delta x+\frac{d\Phi}{dy}\delta y$$

also, wenn man hierin $t=0$ macht und berücksichtigt, daß $\Phi(x, y, 0)=f(x, y)$ die für z ursprünglich gedachte Function von x und y sein soll, daß also $\frac{d\Phi}{dx}$ und $\frac{d\Phi}{dy}$ für $t=0$ gleichbedeutend mit den partiellen Differentialquotienten $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ werden,

$$(2) \qquad \delta z = {}_{(\delta)}z + \frac{dz}{dx}\delta x + \frac{dz}{dy}\delta y$$

Dabei ſtellt ${}_{(\delta)}z$, übereinſtimmend mit unſerm obigen $\Omega(x, y)dt$, das Produkt des Factors dt in eine unbeſtimmte Function der beiden Independenten x, y vor, welche ſo lange, als nicht aus der Natur der Aufgabe etwa einzelne nähere Beſchränkungen hervorgehen, gänzlich willkührlich bleibt.

II) Wir werden im Folgenden die partiellen Differentialquotienten von z zur erſten und zweiten Ordnung öfters, ſo lange keine Verwechſelung zu beſorgen iſt, durch die bei ähnlichen Rechnungen zu demſelben Zwecke häufig angewendeten Buchſtaben p, q, r, s, t bezeichnen, ſo daß

$$(3) \quad \frac{dz}{dx} = p \qquad \frac{dz}{dy} = q \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = r \qquad \frac{d^2z}{dxdy} = s \qquad \frac{d^2z}{dy^2} = t$$

ſein ſoll. Wenn nun, indem man die Fläche $z = f(x, y)$ in den Zuſtand des Variirens verſetzt, aber die Werthe von x und y ungeändert läßt, die Ordinate z in

$$z + {}_{(\delta)}z = z + \left[\frac{d\Phi(x, y, t)}{dt}\right]_0 dt$$

übergeht, ſo wird gleichzeitig p in $p + {}_{(\delta)}p$, q in $q + {}_{(\delta)}q$, r in $r + {}_{(\delta)}r$, u. ſ. w. übergehen. Dabei iſt offenbar

$$(4) \quad \begin{aligned} {}_{(\delta)}p &= \frac{d_{(\delta)}z}{dx}, \qquad {}_{(\delta)}q = \frac{d_{(\delta)}z}{dy} \\ {}_{(\delta)}r &= \frac{d^2{}_{(\delta)}z}{dx^2}, \qquad {}_{(\delta)}s = \frac{d^2{}_{(\delta)}z}{dxdy} \qquad {}_{(\delta)}t = \frac{d^2{}_{(\delta)}z}{dy^2} \end{aligned}$$

Denn man würde z. B. den Werth von ${}_{(\delta)}p$ dadurch finden, daß man den nach x genommenen Differentialquotienten von $\Phi(x, y, t)$ nach t differentiirte und dann $t = 0$ machte, — den Werth von $\frac{d_{(\delta)}z}{dx}$ aber dadurch, daß man eben dieſelben zwei Differentiationen in umgekehrter Folge ausführte, was auf die Beſchaffenheit des Reſultats keinen Einfluß ausübt. Dieſelbe Schlußfolge läßt ſich offenbar in Betreff der übrigen bei (4) zuſammengeſtellten Gleichungen wiederholen.

III) In denjenigen Entwickelungen, bei denen keine Aenderungen des Werths der Independenten in Betracht kommen, ſo daß im Verlaufe der ganzen Rechnung $\delta x = 0$, $\delta y = 0$ gedacht werden darf, können wir größerer Bequemlichkeit wegen in den vorſtehenden Gleichungen (4) ſtatt ${}_{(\delta)}$ das einfachere Zeichen δ ſetzen, ohne daraus erwachſende Irrungen

besorgen zu müßen. Dann ist also

$$(5) \qquad \delta p = \delta\frac{dz}{dx} = \frac{d\delta z}{dx} \qquad \delta q = \frac{d\delta z}{dy} \qquad \delta r = \frac{d^2\delta z}{dx^2} \quad \text{u. s. w.}$$

Wenn dagegen die Variationen δx, δy in Betracht gezogen werden müßen, dann findet man die Ausdrücke für δp, δq, δr, ... auf folgende Weise. Da die Gleichung (2) zu Folge ihrer Herleitung gültig bleibt, gleichviel was für eine Function von x und y man unter z denken mag und da p ebenfalls eine Function von x und y ist, so giebt uns die genannte Formel sogleich

$$\delta p = {}_{(\delta)}p + \frac{dp}{dx}\delta x + \frac{dp}{dy}\delta y$$

d. h.

$$\delta p = \frac{d_{(\delta)}z}{dx} + \frac{d^2z}{dx^2}\delta x + \frac{d^2z}{dxdy}\delta y$$

Ebenso findet man

$$\delta q = \frac{d_{(\delta)}z}{dy} + \frac{d^2z}{dxdy}\delta x + \frac{d^2z}{dy^2}\delta y$$

Wir können diese Formeln auch in folgender Gestalt schreiben:

$$(6) \qquad \begin{aligned} \delta p &= \partial_x{}_{(\delta)}z + r\delta x + s\delta y \\ \delta q &= \partial_y{}_{(\delta)}z + s\delta x + t\delta y \end{aligned}$$

Ganz auf gleiche Weise findet man

$$(7) \qquad \begin{aligned} \delta r &= \delta\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2{}_{(\delta)}z}{dx^2} + \frac{d^3z}{dx^3}\delta x + \frac{d^3z}{dx^2dy}\delta y \\ \delta s &= \delta\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2{}_{(\delta)}z}{dxdy} + \frac{d^3z}{dx^2dy}\delta x + \frac{d^3z}{dxdy^2}\delta y \\ \delta t &= \delta\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d^2{}_{(\delta)}z}{dy^2} + \frac{d^3z}{dxdy^2}\delta x + \frac{d^3z}{dy^3}\delta y \end{aligned}$$

u. s. w.

IV) Wenn nun U ein gegebener, die Variablen x, y, z, p, q, r, ... enthaltender Ausdruck ist, worin z eine variirende Function der Independenten x, y vorstellt, während p, q, r, ... die eben festgesetzte Bedeutung haben sollen, so besteht für die Variation von U die Formel

$$(8) \qquad \delta U = \partial_z U\,\delta z + \partial_p U\,\delta p + \partial_q U\,\delta q + \partial_r U\,\delta r + \cdots$$

Wir haben hierbei x und y als Größen behandelt, welche bei dem Uebergange von der Fläche $z = f(x, y)$ zur variirenden Nachbarfläche ungeänderte Werthe behalten, so daß δz die reine Variation von z bedeutet und die oben mit (5) numerirten Formeln für δp, δq, ... Gültigkeit haben. Müßten wir dagegen auch den beiden Independenten x, y Variationen zuschreiben, so würde zu dem vorigen Ausdruck für δU noch

das Binom

$$\partial_x U\,\delta x + \partial_y U\,\delta y$$

hinzuzufügen sein. Für δz, δp, δq, δr, .. hat man dann die bei (2) (6) und (7) entwickelten Ausdrücke einzusetzen, und wird dadurch erhalten

$$\delta U = \partial_x U\,(\delta)z + \partial_p U\,(\delta)p + \partial_q U\,(\delta)q + \partial_r U\,(\delta)r + \cdot\cdot$$
$$+ \left(\partial_x U + \partial_z U\frac{dz}{dx} + \partial_p U\frac{dp}{dx} + \partial_q U\frac{dq}{dx} + \partial_r U\frac{dr}{dx} + \cdot\cdot\right)\delta x$$
$$+ \left(\partial_y U + \partial_z U\frac{dz}{dy} + \partial_p U\frac{dp}{dy} + \partial_q U\frac{dq}{dy} + \partial_r U\frac{dr}{dy} + \cdot\cdot\right)\delta y$$

was kürzer durch

$$\delta U = (\delta)U + \frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y$$

vorzustellen ist. Die hierin vorkommende Größe $(\delta)U$, nämlich die reine Variation von U, ist mit der unmittelbar vorher bei (8) berechneten identisch, insofern unter der dort gemachten Voraussetzung das Operationszeichen δ mit dem gegenwärtig gebrauchten (δ) einerlei Sinn hat. Vgl. auch §. 57 I).

§. 71.

So wie nun im zweiten Capitel, in §. 8 und den Aufgaben des §. 12 fgg. wenn $U = F(x, y, p, q, \ldots)$ gegeben war und y so bestimmt werden sollte, daß U ein Maximum oder Minimum wurde, die Bedingung $\delta U = 0$ zu den einzelnen Gleichungen $\partial_y U = 0$, $\partial_p U = 0$, $\partial_q U = 0$ ꝛc. führte, so daß das Verfahren kein anderes war, als wenn man die Werthe der von einander unabhängig variirenden Argumente $y, p, q, \ldots$ zu bestimmen hätte, welche für einen gegebenen Werth von x dem Ausdrucke U den größten oder kleinsten Werth verschafften; ebenso wird man nun auch verfahren, wenn ein Ausdruck von der Form

$$U = F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots\right) = F(x, y, z, p, q, r, \ldots)$$

vorliegt und diejenige Function $z = f(x, y)$ gesucht werden soll, durch welche, bei beliebig angenommenen Werthen von x und y, U ein Maximum oder Minimum werde. Man wird nämlich die Bedingung $\delta U = 0$, wobei δU den Ausdruck (8) des vor. §. bedeutet, durch das gleichzeitige Stattfinden der Gleichungen

(1) $\partial_z U = 0 \quad \partial_p U = 0 \quad \partial_q U = 0 \quad \partial_r U = 0 \ \ldots$

zu befriedigen haben. Denn in Betreff der Unabhängigkeit der Variationen $\delta z, \delta p, \delta q, \ldots$ laßen sich hier ähnliche Betrachtungen anstellen, wie in §. 13. So wird man sich z. B. davon, daß δp und δq als zwei in gar keiner bestimmten Beziehung zu einander stehende Functionen von x und y zu denken sind, sehr leicht durch die Annahme

$$\delta z = \omega(x, y) + \psi(x) + \varphi(y) + C$$

überzeugen; offenbar findet sich alsdann

in $\delta p = \frac{d\delta z}{dx} = \frac{d\omega(x, y)}{dx} + \psi'(x)$ keine Spur von der Function φ

in $\delta q = \frac{d\delta z}{dy} = \frac{d\omega(x, y)}{dy} + \varphi'(y)$ " " " " " ψ

und in beiden keine Spur von C, also vermag man aus dem Werthe, welchen δp für bestimmte Werthe von x und y annimmt, ganz und gar keinen Schluß auf den zugehörigen Werth von δq zu machen, und man sieht zugleich, daß wenn δp und δq beide gegeben wären, der Werth von δz wegen der willkührlichen Constanten C immer noch unbestimmt bliebe.

Wir haben hier vorausgesetzt, daß das Variiren der Functionen $z, p, q, \ldots$ durch keine Nebenbedingungen beschränkt sei. Wenn diese Voraussetzung nicht vollkommen erfüllt ist, entweder weil Beschränkungen von der in §. 16 besprochenen Art in die Aufgabe aufgenommen sind, oder weil wie in §. 18 II) eine oder mehrere Bedingungen von der Form

$$\Theta(x, y, z, p, q, r, \ldots) = \text{Const.}$$

zu beobachten sind, so wird man die Gleichungen, in welche die Bedingungsgleichung $\delta U = 0$ alsdann zu zertheilen ist, genau auf dieselbe Weise bilden, wie es in den eben angeführten Paragraphen früher geschehen ist. Der wesentliche Unterschied findet nur Statt, daß man es in den Untersuchungen des gegenwärtigen Capitels mit partiellen Differentialgleichungen zu thun haben wird, in deren allgemeine Integrale also, je nach Beschaffenheit des Falls, ganz willkührliche Functionen verwebt sein können. — Dies Alles werden wir sofort an einer speciellen Aufgabe erläutern.

§. 72.

Aufgabe: Eine Fläche von der Eigenschaft zu bestimmen, daß wenn man in einem beliebig auf ihr angenommenen Punkte M die

tangirende Ebene construirt, welche auf den drei Coordinatenaxen OX, OY, OZ die Stücke OA, OB, OC abschneiden möge, die Quadratsumme

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2$$

ein Minimum werde, nämlich kleiner als wenn man durch denselben Punkt eine andere Fläche gehen laßen wollte.

In den letzten Worten wird eine Bedingung angefügt, welche der in §. 16 II) allgemein besprochenen und durch das Beispiel in §. 17 erläuterten ganz analog ist und uns nöthigt, $\delta' s = 0$ zu setzen, während wir unter $\delta' p$ und $\delta' q$ beliebige Functionen von x und y zu denken haben.

Die im Punkte M $[x, y, s]$ construirte Berührungsebene, deren Gleichung bekanntlich

$$(1) \qquad p(x' - x) + q(y' - y) - (s' - s) = 0$$

ist, schneidet die Axe OX $[y' = 0, s' = 0]$ in einem Punkte, dem der Werth $(x' - x) = \frac{yq}{p} - \frac{s}{p}$ zugehört. Daher ist

$$OA = x + \frac{yq}{p} - \frac{s}{p} = \frac{1}{p}(xp + yq - s)$$

Ebenso findet man

$$OB = \frac{1}{q}(xp + yq - s) \qquad OC = -(xp + yq - s)$$

demnach haben wir für die zu einem Minimum zu machende Größe den Ausdruck

$$U = \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + 1\right)(xp + yq - s)^2$$

Hieraus fließt

$$\partial_p U = 2(xp + yq - s)\left(\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + 1\right)x - \frac{xp + yq - s}{p^3}\right)$$

$$\partial_q U = 2(xp + yq - s)\left(\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + 1\right)y - \frac{xp + yq - s}{q^3}\right)$$

Man könnte jetzt die Bedingungsgleichungen $\partial_p U = 0$, $\partial_q U = 0$ erstlich dadurch befriedigen, daß man

$$(2) \qquad xp + yq - s = 0$$

setzte. Dann reduciren sich die Werthe von OA, OB, OC, so wie U selbst, ebenfalls auf Null. Die Gleichung (1) aber wird

$$px' + qy' - s' = 0$$

und zeigt an, daß die einem beliebigen Punkt M zugehörige Berührungsebene durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehen müße, wodurch die gesuchte Fläche als eine Kegelfläche charakterisirt wird, die ihren

Scheitel im Coordinatenursprung hat, im Uebrigen, so lange nicht noch anderweite Bedingungen in die Aufgabe aufgenommen werden, ganz unbestimmt bleibt. Dieses stimmt damit zusammen, daß das allgemeine Integral der Gl. (2), welches man nach der bekannten Methode leicht finden wird, nämlich

$$\frac{z}{x} = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

eine willkührliche Function ψ in sich enthält. — Da U keiner negativen Werthe fähig ist, so muß $U = 0$ allerdings für ein Minimum gelten.

Zweitens aber kann man den Bedingungen $\partial_x U = 0$, $\partial_y U = 0$ vermittelst des Systems der beiden Gleichungen

$$(3) \qquad \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + 1\right)x - \frac{xp + yq - z}{p^3} = 0$$

$$(4) \qquad \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} + 1\right)y - \frac{xp + yq - z}{q^3} = 0$$

Genüge zu leisten suchen. Es folgt hieraus $xp^3 = yq^3$, und wenn man mittelst dieser Relation aus (3) oder (4) den Differentialquotienten q eliminirt, so findet man

$$xp^3 + z = 0 \qquad \text{d. h.} \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{z}}\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

durch Elimination von p aber

$$yq^3 + z = 0 \qquad \text{d. h.} \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{z}}\frac{dz}{dy} = -\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$$

Die Integration dieser letzten Gleichungen giebt

$$z^{\frac{1}{3}} = -x^{\frac{1}{3}} + \varphi(y) \qquad z^{\frac{1}{3}} = \psi(x) - y^{\frac{1}{3}}$$

also muß sein

$$z^{\frac{1}{3}} = C - x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}$$

worin C eine willkührliche Constante anzeigt; oder auch

$$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}$$

Die durch diese Gleichung vorgestellte Fläche ist eine geschloßene, mit einem im Ursprung der Coordinaten befindlichen Mittelpunkt, und besteht aus acht dreieckigen Lappen, welche die von den Coordinatenebenen gebildeten Octanten zuschließen, dem Mittelpunkte ihre Convexität zukehrend. Die drei Axenstücke OA, OB, OC erhalten, wegen

$$p = -\frac{z^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} \qquad q = -\frac{z^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} \qquad xp + yq - z = -a^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$$

die Längen $OA = a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}$, $OB = a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}$, $OC = a^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}$, deren Quadratsumme $a^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}}) = a^2$

ist. Es besitzt also jetzt U den constanten Werth a^2, gleichviel wo man den Punkt M angenommen hat. Wenn man dagegen

$$p + \nabla p = -\frac{z^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} + \nabla p \qquad q + \nabla q = -\frac{z^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} + \nabla q$$

an die Stelle von p und q (bei ungeändertem x, y, z) einsetzt und die Entwickelungen

$$\frac{1}{(p+\nabla p)^2} = \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^3}\nabla p + \frac{3}{p^4}\nabla p^2 - \cdots = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{3}}} + 2\frac{x}{z}\nabla p + 3\frac{x^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{3}}}\nabla p^2 \cdots$$

$$\frac{1}{(q+\nabla q)^2} = \frac{1}{q^2} - \frac{2}{q^3}\nabla q + \frac{3}{q^4}\nabla q^2 - \cdots = \frac{y^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{3}}} + 2\frac{y}{z}\nabla q + 3\frac{y^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{3}}}\nabla q^2 \cdots$$

benutzt, so findet man

$$\begin{aligned} U + \nabla U &= \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{z}(x\nabla p + y\nabla q) + \frac{3}{z^{\frac{1}{3}}}(x^{\frac{1}{3}}\nabla p^2 + y^{\frac{1}{3}}\nabla q^2)\right) \\ &\qquad \times \left(a^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}}z^{\frac{1}{3}}(x\nabla p + y\nabla q) + (x\nabla p + y\nabla q)^2\right) \\ &= a^2 + 3\frac{a^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{3}}}\left(a^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{1}{3}}\nabla p^2 + y^{\frac{1}{3}}\nabla q^2) - (x\nabla p + y\nabla q)^2\right) \\ &= a^2 + 3a^{\frac{1}{3}}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}}{z^{\frac{1}{3}}}(x^{\frac{1}{3}}\nabla p - y^{\frac{1}{3}}\nabla q)^2 + x^{\frac{1}{3}}\nabla p^2 + y^{\frac{1}{3}}\nabla q^2\right) \end{aligned}$$

Diese letzte Formel zeigt, daß ∇U jedenfalls eine positive Größe ist.

§. 73.

Es erübrigt uns jetzt noch die Variation δU für die Fälle zu entwickeln, wenn U das Integral eines von den beiden Independenten x und y abhängigen Differentialausdrucks ist, und ihre Anwendung zur Bestimmung des Maximums oder Minimums eines solchen Integrals zu erläutern. Es sei also in dem Doppelintegrale

$$U = \int_{\alpha}^{\xi}\int_{\beta}^{\eta} V dy dx$$

worin sich die Gränzen α und ξ auf die Independente x, und die Gränzwerthe β und η auf y beziehen,

$$V = F(x, y, z, p, q, r, s, t, \ldots)$$

eine gegebene Function von x, y, z und den partiellen Differentialquo-

tienten $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$, $\frac{d^2z}{dx^2}=r$, $\frac{d^2z}{dxdy}=s$, $\frac{d^2z}{dy^2}=t$, ꝛc. Indem wir zunächſt vorausſetzen, daß es nicht nöthig ſei, auch den Independenten x, y Variationen zuzuſchreiben, indem wir alſo unter δz die reine Variation (§. 70 I) verſtehen, haben wir den Werth

$$\delta V=\partial_z V\delta z+\partial_p V\delta p+\partial_q V\delta q+\partial_r V\delta r+\partial_s V\delta s+\partial_t V\delta t+\cdots$$

in $\delta U=\int\int\delta V dydx$ einzuſetzen. Dadurch ergiebt ſich

$$(1)\qquad \delta U=\int_\alpha^\xi\int_\beta^\eta\left\{\partial_z V\delta z+\partial_p V\frac{d\delta z}{dx}+\partial_r V\frac{d^2\delta z}{dx^2}+\cdots+\partial_q V\frac{d\delta z}{dy}+\partial_s V\frac{d^2\delta z}{dxdy}+\cdots+\partial_t V\frac{d^2\delta z}{dy^2}+\cdots\right\}dydx$$

Da es uns in den folgenden Paragraphen darauf ankommen wird, behufs der Beſtimmung des Maximum oder Minimum von U die Bedingung $\delta U=0$ zu befriedigen, und da wir aus den in §. 23 I) auseinander geſetzten Gründen auch hier den vorgeſetzten Zweck (im Allgemeinen) nicht etwa durch die Annahme $\delta V=0$ zu erreichen hoffen dürfen, ſo werden wir jetzt ſuchen, mittelſt partieller Integrationen die Formel (1) ſo umzugeſtalten, daß ſich unter dem doppelten Integralzeichen kein Differentialquotient von δz, ſondern nur δz ſelbſt vorfindet. Dabei legen wir rückſichtlich der Integrationsgränzen die Vorausſetzung zu Grunde, daß wenn die erſte Integration nach y ausgeführt wird, η und β gegebene Functionen von x, etwa

$$\beta=\chi_1(x)\qquad \eta=\chi_2(x)$$

oder auch gegebene Conſtanten ſeien. — Zur Abkürzung mögen übrigens im Verlaufe der Rechnung die partiellen Differentialquotienten von V nach p, q, r, ... durch die entſprechenden Buchſtaben des großen Alphabets vorgeſtellt werden, ſo daß

$$P=\partial_p V\qquad Q=\partial_q V\qquad R=\partial_r V\qquad S=\partial_s V\qquad T=\partial_t V$$

ſein ſoll.

I) Wenn wir nun, um die Transformation mit dem Doppelintegrale $\int\int\partial_q V\frac{d\delta z}{dy}dydx$ anzufangen, die erſte Integration wirklich ausführen, in Berückſichtigung, daß $\frac{d\delta z}{dy}dy$ in Beziehung auf y das vollſtändige

Differential von $\delta' z$ ist, daß also, indem man bei der nach y auszuführenden Integration x als eine Constante behandelt,

$$\int_\beta^\eta Q \frac{d\delta' z}{dy} dy = [Q\delta' z]_\eta - [Q\delta' z]_\beta - \int_\beta^\eta \frac{dQ}{dy} \delta' z dy$$

wird; so erhalten wir ohne Weiteres

$$(2) \quad \int_\alpha^\xi \int_\beta^\eta \partial_q V \frac{d\delta' z}{dy} dy dx = - \int_\alpha^\xi \int_\beta^\eta \frac{d\partial_q V}{dy} \delta' z dy dx + \int_\alpha^\xi [\partial_q V \delta' z]_\eta dx - \int_\alpha^\xi [\partial_q V \delta' z]_\beta dx$$

Dabei wird durch $\frac{dQ}{dy} = \frac{d\partial_q V}{dy}$ angezeigt, daß zwar das in $\partial_q V$ enthaltene x als constant bei der Differentiation behandelt werden, andererseits aber nicht etwa blos nach dem explicit vorhandenen y differentiirt werden solle (in welchem Falle wir $\partial'_{y,q} V$ geschrieben haben würden), sondern daß auch auf das in z, p, q, ... implicirte y zu achten sei.

Ferner ist

$$\partial_p V \frac{d\delta' z}{dx} = P \frac{d\delta' z}{dx} = \frac{d.P\delta' z}{dx} - \frac{dP}{dx} \delta' z$$

also

$$(C) \quad \iint P \frac{d\delta' z}{dx} dy dx = - \iint \frac{dP}{dx} \delta' z dy dx + \int dx \int \frac{d.P\delta' z}{dx} dy$$

und hier sind die Differentialquotienten $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{d.P\delta' z}{dx}$ so zu verstehen, daß zwar y als constant zu behandeln sei, dagegen nicht blos nach dem explicit vorkommenden, sondern auch nach dem in z, p, q, r, ... implicirten x zu differentiiren sei. Dieselbe Erinnerung gilt auch für die folgenden Entwickelungen. — Das zweite Integral im zweiten Theile der Gleichung (C) ist jedoch noch nicht hinreichend transformirt, denn es läßt sich auf einfache Integrale reduciren. Da nämlich bei der Quadratur $\int_\beta^\eta \frac{d.P\delta' z}{dx} dy$ die Variable x sich wie eine Constante verhält, so dürfte man die nach x auszuführende Differentiation auch nach vorausgegangener Integration vornehmen, d. h. an die Stelle jenes Integrals den Diffe-

rentialquotienten $\frac{d}{dx}\int_\beta^\eta P\delta^n z dy$ setzen, wenn η und β constant wären. Insofern wir aber, größerer Allgemeinheit wegen, $\eta = \chi_2(x)$, $\beta = \chi_1(x)$ als Functionen von x auffaßen, haben wir nach dem bekannten Lehrsatz über die Differentialquotienten der bestimmten Integrale

$$\frac{d}{dx}\int_\beta^\eta P\delta^n z dy = \int_\beta^\eta \frac{d.P\delta^n z}{dx} dy + [P\delta^n z]_\eta \frac{d\eta}{dx} - [P\delta^n z]_\beta \frac{d\beta}{dx}$$

Hieraus folgt, wenn wir am Integralzeichen die sich von selbst verstehenden Gränzen β und η einstweilen weglaßen,

$$\int \frac{d.P\delta^n z}{dx} dy = \frac{d}{dx}\int P\delta^n z dy - P_\eta \frac{d\eta}{dx}\delta^n z_\eta + P_\beta \frac{d\beta}{dx}\delta^n z_\beta$$

Es ist dieses eine identische Gleichung, die auch bei den folgenden Rechnungen sehr nützliche Dienste leisten wird. — Wir haben den vorstehenden Ausdruck für $\int \frac{d.P\delta^n z}{dx} dy$ jetzt mit dx zu multiplicitren, und innerhalb der Gränzen $x = \alpha$ bis $x = \xi$ zu integriren, um das Resultat in (C) zu substituiren. Auf diese Weise ergiebt sich

$$(3)\quad \int_\alpha^\xi\int_\beta^\eta P\frac{d\delta^n z}{dx} dy dx = -\int_\alpha^\xi\int_\beta^\eta \frac{dP}{dx}\delta^n z dy dx + \int_{\beta_\xi}^{\eta_\xi} P_\xi \delta^n z_\xi dy - \int_{\beta_\alpha}^{\eta_\alpha} P_\alpha \delta^n z_\alpha dy - \int_\alpha^\xi \left(P_\eta \frac{d\eta}{dx}\delta^n z_\eta - P_\beta \frac{d\beta}{dx}\delta^n z_\beta\right) dx$$

In Betreff des zweiten und dritten Gliedes auf der rechten Seite dieser Gleichung ist vielleicht die Erinnerung nicht überflüßig, daß dieselben zusammen genommen nur in anderer Schreibart das zwischen den Gränzen $x = \alpha$ bis $x = \xi$ genommene Integral von $\frac{d}{dx}\int_\beta^\eta P\delta^n z dy$ darstellen, d. h. einerlei mit

$$\left[\int_\beta^\eta P\delta^n z dy\right]_\xi - \left[\int_\beta^\eta P\delta^n z dy\right]_\alpha$$

sind. Denn um den Minuendus dieser Differenz zu bilden, muß man, sobald das unbestimmte Integral $\int P\delta^n z dy$ berechnet worden, ξ an die

Stelle des darin vorkommenden x setzen und $\eta_\xi = \chi_2(\xi)$, $\beta_\xi = \chi_1(\xi)$ als Integrationsgränzen von y anwenden. Da aber bei der nach y auszuführenden Integration die Variable x die Rolle einer Constanten spielt, so ist es erlaubt schon gleich anfangs in $P\delta^2 s$ den Werth ξ für x einzuführen. Ebenso verhält es sich mit dem Subtrahendus; und somit gelangt man zu der in (3) benutzten Form.

II) Schreiten wir nun fort zu den drei Gliedern von $\delta^2 U$, welche die Differentialquotienten zweiter Ordnung von $\delta^2 s$ enthalten. Zunächst ist

$$T\frac{d^2\delta^2 s}{dy^2} = \frac{d.T\frac{d\delta^2 s}{dy}}{dy} - \frac{dT}{dy}\frac{d\delta^2 s}{dy} = \frac{d.T\frac{d\delta^2 s}{dy}}{dy} - \frac{d.\frac{dT}{dy}}{dy}\delta^2 s + \frac{d^2T}{dy^2}\delta^2 s$$

also $$\int T\frac{d^2\delta^2 s}{dy^2}dy = T\frac{d\delta^2 s}{dy} - \frac{dT}{dy}\delta^2 s + \int \frac{d^2T}{dy^2}\delta^2 s dy$$

Wird dieses allgemeine Integral innerhalb der Gränzen $y=\beta$, $y=\eta$ genommen, alsdann mit dx multiplicirt und nach x integrirt, so entsteht

$$\iint T\frac{d^2\delta^2 s}{dy^2}dydx = \iint \frac{d^2T}{dy^2}\delta^2 s dydx - \int_\alpha^\xi \left(\left[\frac{dT}{dy}\delta^2 s\right]_\eta - \left[\frac{dT}{dy}\delta^2 s\right]_\beta \right) dx$$

$$(4) \qquad + \int_\alpha^\xi \left(\left[T\frac{d\delta^2 s}{dy}\right]_\eta - \left[T\frac{d\delta^2 s}{dy}\right]_\beta \right) dx$$

Ferner ist

$$S\frac{d^2\delta^2 s}{dxdy} = \frac{d.S\frac{d\delta^2 s}{dy}}{dx} - \frac{dS}{dx}\frac{d\delta^2 s}{dy} = \frac{d.S\frac{d\delta^2 s}{dy}}{dx} - \frac{d.\frac{dS}{dx}}{dy}\delta^2 s + \frac{d^2S}{dxdy}\delta^2 s$$

also $$\int S\frac{d^2\delta^2 s}{dxdy}dy = \int \frac{d.S\frac{d\delta^2 s}{dy}}{dx}dy - \frac{dS}{dx}\delta^2 s + \int \frac{d^2S}{dxdy}\delta^2 s dy$$

Geht man hier zur bestimmten Integration zwischen den Gränzen $y=\beta$ bis $y=\eta$ über und bemerkt, daß der schon in I) gebrauchten Formel zu Folge

$$\int_\beta^\eta \frac{d.S\frac{d\delta^2 s}{dy}}{dx}dy = \frac{d}{dx}\int_\beta^\eta S\frac{d\delta^2 s}{dy}dy - \left[S\frac{d\delta^2 s}{dy}\right]_\eta \frac{d\eta}{dx} + \left[S\frac{d\delta^2 s}{dy}\right]_\beta \frac{d\beta}{dx}$$

$$= \frac{d}{dx}\left([S\delta^2 s]_{\eta-\beta} - \int_\beta^\eta \frac{dS}{dy}\delta^2 s dy \right) - \left[S\frac{d\delta^2 s}{dy}\right]_\eta \frac{d\eta}{dx} + \left[S\frac{d\delta^2 s}{dy}\right]_\beta \frac{d\beta}{dx}$$

ist; so erhält man, wenn man jetzt mit dx multiplicirt und von $x = a$ bis $x = \xi$ integrirt,

$$\int_a^\xi\int_\beta^\eta S\frac{d^2\delta' s}{dxdy}dydx = \int_a^\xi\int_\beta^\eta \frac{d^2S}{dxdy}\delta' s dydx$$

$$(5)\qquad -\int_{\beta_\xi}^{\eta_\xi}\left[\frac{dS}{dy}\delta' s\right]_\xi dy + \int_{\beta_a}^{\eta_a}\left[\frac{dS}{dy}\delta' s\right]_a dy$$

$$-\int_a^\xi\left(\left[\frac{dS}{dx}\delta' s\right]_\eta - \left[\frac{dS}{dx}\delta' s\right]_\beta + \left[S\frac{d\delta' s}{dy}\right]_\eta\frac{d\eta}{dx} - \left[S\frac{d\delta' s}{dy}\right]_\beta\frac{d\beta}{dx}\right)dx$$

$$+[S\delta' s]_{\eta,\xi} - [S\delta' s]_{\eta,a} - [S\delta' s]_{\beta,\xi} + [S\delta' s]_{\beta,a}$$

Endlich, um den von $R = \partial_r V$ abhängigen Bestandtheil von $\delta' U$ zu transformiren, gehen wir aus von

$$R\frac{d^2\delta' s}{dx^2} = \frac{d.R\frac{d\delta' s}{dx}}{dx} - \frac{d.\frac{dR}{dx}\delta' s}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2}\delta' s$$

Es folgt hieraus

$$\int_\beta^\eta R\frac{d^2\delta' s}{dx^2}dy = \int_\beta^\eta\frac{d^2R}{dx^2}\delta' s dy$$

$$+\frac{d}{dx}\int_\beta^\eta R\frac{d\delta' s}{dx}dy - \left[R\frac{d\delta' s}{dx}\right]_\eta\frac{d\eta}{dx} + \left[R\frac{d\delta' s}{dx}\right]_\beta\frac{d\beta}{dx}$$

$$-\frac{d}{dx}\int_\beta^\eta\frac{dR}{dx}\delta' s dy + \left[\frac{dR}{dx}\delta' s\right]_\eta\frac{d\eta}{dx} - \left[\frac{dR}{dx}\delta' s\right]_\beta\frac{d\beta}{dx}$$

Wird dieses mit dx multiplicirt und innerhalb der vorgeschriebenen Gränzen integrirt, so entsteht

$$\iint R\frac{d^2\delta' s}{dx^2}dydx = \iint\frac{d^2R}{dx^2}\delta' s dydx - \left[\int\left(\frac{dR}{dx}\delta' s - R\frac{d\delta' s}{dx}\right)dy\right]_{\xi,a}$$

$$(\oplus)\qquad +\int\left(\left[\frac{dR}{dx}\delta' s\right]_\eta\frac{d\eta}{dx} - \left[\frac{dR}{dx}\delta' s\right]_\beta\frac{d\beta}{dx}\right)dx$$

$$-\int\left[R\frac{d\delta' s}{dx}\right]_\eta\frac{d\eta}{dx}dx + \int\left[R\frac{d\delta' s}{dx}\right]_\beta\frac{d\beta}{dx}dx$$

Da sich jedoch unter den beiden letzten Integralzeichen der nach x genommene Differentialquotient von $\delta^{\prime}s$ vorfindet, während die angezeigte Integration ebenfalls in Beziehung auf x ausgeführt werden soll, so dürfen wir jene zwei Integralien noch nicht für hinreichend reducirt erklären. Denn um den vorgesetzten Zweck zu erreichen, welcher darin besteht die Differentialquotienten höherer Ordnung von $\delta^{\prime}s$ so viel als nur immer möglich auf Differentialquotienten niedrigerer Ordnung zurückzuführen, darf man unter einem Integralzeichen, durch welches eine nach x auszuführende Integration angezeigt wird, keinen der Differentialquotienten $\frac{d\delta^{\prime}s}{dx}$, $\frac{d^2\delta^{\prime}s}{dxdy}$, $\frac{d^2\delta^{\prime}s}{dx^2}$, ꝛc. sondern nur $\frac{d\delta^{\prime}s}{dy}$, $\frac{d^2\delta^{\prime}s}{dy^2}$, ... stehen laßen, und umgekehrt, unter einem $\int$, durch welches eine nach y auszuführende Integration angezeigt wird, darf schließlich kein nach eben dieser Variablen genommener Differentialquotient von $\delta^{\prime}s$ mehr vorkommen. Die in dem ersten der genannten zwei Integrale enthaltene Größe $\left[\frac{d\delta^{\prime}s}{dx}\right]_\eta$ bedeutet nun diejenige Function von x, welche aus dem allgemeinen Ausdrucke für $\vartheta_x\delta^{\prime}s$ entspringt, sobald man für y die Function $\chi_2(x)$ einsetzt. Denkt man sich aber diese Substitution für y gleich anfangs in $\delta^{\prime}s$ gemacht und dann die Differentiation nach x ausgeführt, so hat man offenbar die identische Gleichung

$$\frac{d.\delta^{\prime}s_\eta}{dx} = \left[\frac{d\delta^{\prime}s}{dx}\right]_\eta + \left[\frac{d\delta^{\prime}s}{dy}\right]_\eta \frac{d\eta}{dx}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_\eta \frac{d\eta}{dx}\left[\frac{d\delta^{\prime}s}{dx}\right]_\eta &= \mathrm{R}_\eta \frac{d\eta}{dx}\frac{d.\delta^{\prime}s_\eta}{dx} - \left[\mathrm{R}\frac{d\delta^{\prime}s}{dy}\right]_\eta \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2 \\ &= \frac{d}{dx}\left(\mathrm{R}_\eta \frac{d\eta}{dx}\delta^{\prime}s_\eta\right) - \frac{d}{dx}\left(\mathrm{R}_\eta \frac{d\eta}{dx}\right)\delta^{\prime}s_\eta - \mathrm{R}_\eta \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\left[\frac{d\delta^{\prime}s}{dy}\right]_\eta \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \int \mathrm{R}_\eta \left[\frac{d\delta^{\prime}s}{dx}\right]_\eta \frac{d\eta}{dx}dx = \left[\mathrm{R}_\eta \frac{d\eta}{dx}\delta^{\prime}s_\eta\right]_{\xi\ldots\alpha} &- \int \frac{d}{dx}\left(\mathrm{R}_\eta \frac{d\eta}{dx}\right)\delta^{\prime}s_\eta dx \\ &- \int \mathrm{R}_\eta \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2\left[\frac{d\delta^{\prime}s}{dy}\right]_\eta dx \end{aligned}$$

Durch Vertauschung von η mit β erhält man hieraus zugleich die Umformung des letzten in $(\oplus)$ vorkommenden Integrals. Im Ganzen wird daher

$$(6)\quad \int_\alpha^\xi\int_\beta^\eta \mathrm{R}\frac{d^2\delta\mathfrak{x}}{dx^2}\,dydx = \int_\alpha^\xi\int_\beta^\eta \frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2}\delta\mathfrak{x}dydx$$
$$-\int_{\beta_\xi}^{\eta_\xi}\Big[\frac{d\mathrm{R}}{dx}\delta\mathfrak{x}-\mathrm{R}\frac{d\delta\mathfrak{x}}{dx}\Big]_\xi dy \qquad +\int_{\beta_\alpha}^{\eta_\alpha}\Big[\frac{d\mathrm{R}}{dx}\delta\mathfrak{x}-\mathrm{R}\frac{d\delta\mathfrak{x}}{dx}\Big]_\alpha dy$$
$$+\int_\alpha^\xi\Big(\Big(\Big[\frac{d\mathrm{R}}{dx}\Big]_\eta\frac{d\eta}{dx}+\frac{d.\mathrm{R}_\eta\frac{d\eta}{dx}}{dx}\Big)\delta\mathfrak{x}_\eta+\mathrm{R}_\eta\Big(\frac{d\eta}{dx}\Big)^2\Big[\frac{d\delta\mathfrak{x}}{dy}\Big]_\eta\Big)dx$$
$$-\int_\alpha^\xi\Big(\Big(\Big[\frac{d\mathrm{R}}{dx}\Big]_\beta\frac{d\beta}{dx}+\frac{d.\mathrm{R}_\beta\frac{d\beta}{dx}}{dx}\Big)\delta\mathfrak{x}_\beta+\mathrm{R}_\beta\Big(\frac{d\beta}{dx}\Big)^2\Big[\frac{d\delta\mathfrak{x}}{dy}\Big]_\beta\Big)dx$$
$$-\Big[\mathrm{R}_\eta\frac{d\eta}{dx}\delta\mathfrak{x}_\eta\Big]_\xi+\Big[\mathrm{R}_\eta\frac{d\eta}{dx}\delta\mathfrak{x}_\eta\Big]_\alpha+\Big[\mathrm{R}_\beta\frac{d\beta}{dx}\delta\mathfrak{x}_\beta\Big]_\xi-\Big[\mathrm{R}_\beta\frac{d\beta}{dx}\delta\mathfrak{x}_\beta\Big]_\alpha$$

III) Auf dem hier betretenen Wege könnte man nun, indem man voraussetzte, daß in V auch noch Differentialquotienten der dritten Ordnung, als $\frac{d^3\mathfrak{x}}{dx^3}$, $\frac{d^3\mathfrak{x}}{dx^2dy}$, ꝛc. vorhanden wären, weiter fortschreiten. Im Hinblicke auf die möglicher Weise zu machenden Nutzanwendungen dürfen wir jedoch bei den in Betrachtung gezogenen Gliedern stehen bleiben, es würde fast schon hingereicht haben, in dem Ausdrucke (1) blos die drei ersten Glieder

$$\int\int(\partial_x\mathrm{V}\,\delta\mathfrak{x}+\partial_y\mathrm{V}\,\delta p+\partial_q\mathrm{V}\,\delta q)dydx$$

vorauszusetzen.

Führt man nun die bei (2) bis (6) entwickelten Ausdrücke in (1) ein, so ergiebt sich für $\delta\mathrm{U}$ ein Aggregat von der Form

$$\delta\mathrm{U}=\int_\alpha^\xi\int_\beta^\eta\mathfrak{W}\delta\mathfrak{x}dydx+\int_{\beta_\xi}^{\eta_\xi}\mathfrak{H}_\xi\delta\mathfrak{x}_\xi dy+\int_{\beta_\xi}^{\eta_\xi}\mathrm{R}_\xi\Big[\frac{d\delta\mathfrak{x}}{dx}\Big]_\xi dy$$
$$-\int_{\beta_\alpha}^{\eta_\alpha}\mathfrak{H}_\alpha\delta\mathfrak{x}_\alpha dy-\int_{\beta_\alpha}^{\eta_\alpha}\mathrm{R}_\alpha\Big[\frac{d\delta\mathfrak{x}}{dx}\Big]_\alpha dy$$
$$(7)$$

$$(7)\qquad +\int_\alpha^\xi \mathfrak{K}_\eta \delta' z_\eta dx + \int_\alpha^\xi \mathfrak{L}_\eta \left[\frac{d\delta' z}{dy}\right]_\eta dx$$
$$-\int_\alpha^\xi \mathfrak{K}_\beta \delta' z_\beta dx - \int_\alpha^\xi \mathfrak{L}_\beta \left[\frac{d\delta' z}{dy}\right]_\beta dx$$
$$+\left[S_\eta - R_\eta \frac{d\eta}{dx}\right]_\xi \delta' z_{\eta,\xi} - \left[S_\eta - R_\eta \frac{d\eta}{dx}\right]_\alpha \delta' z_{\eta,\alpha}$$
$$-\left[S_\beta - R_\beta \frac{d\beta}{dx}\right]_\xi \delta' z_{\beta,\xi} + \left[S_\beta - R_\beta \frac{d\beta}{dx}\right]_\alpha \delta' z_{\beta,\alpha}$$

worin

$$(8)\qquad \mathfrak{W} = \partial_z V - \frac{d\partial_p V}{dx} - \frac{d\partial_q V}{dy} + \frac{d^2\partial_r V}{dx^2} + \frac{d^2\partial_s V}{dxdy} + \frac{d^2\partial_t V}{dy^2}$$

ist, und worin, wie man ohne Mühe finden wird, $\mathfrak{H}_\xi$, $\mathfrak{H}_\alpha$ je aus drei Gliedern, $\mathfrak{K}_\eta$, $\mathfrak{K}_\beta$ je aus sechs Gliedern, und $\mathfrak{L}_\eta$, $\mathfrak{L}_\beta$ wieder je aus drei Gliedern bestehen. Wir dürfen uns die Weitläufigkeit, alle diese Glieder hier nochmals vollständig zusammenzustellen, um so mehr ersparen, als die fragliche Formel in ihrer Totalität anzuwenden wohl niemals nöthig sein wird.

Für den einfachern Fall, daß η und β constant sein sollen, hat man $\frac{d\eta}{dx} = 0$, $\frac{d\beta}{dx} = 0$ und $\eta_\xi = \eta_\alpha = \eta$, $\beta_\xi = \beta_\alpha = \beta$ zu setzen. Dabei wird

$$(9)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{H} &= P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy} = \partial_p V - \frac{d\partial_r V}{dx} - \frac{d\partial_s V}{dy} \\ \mathfrak{K} &= Q - \frac{dS}{dx} - \frac{dT}{dy} = \partial_q V - \frac{d\partial_s V}{dx} - \frac{d\partial_t V}{dy} \\ \mathfrak{L} &= T = \partial_t V \end{aligned}$$

Wenn dagegen η und β zwar Functionen von x sind, aber in V blos z und die Differentialquotienten erster Ordnung, p und q, vorkommen, so findet man

$$\delta' U = \int_\alpha^\xi \int_\beta^\eta \left(\partial_z V - \frac{d\partial_p V}{dx} - \frac{d\partial_q V}{dy}\right)\delta' z dy dx$$

$$(10)\qquad +\int_{\beta_\xi}^{\eta_\xi} [\partial_p V]_\xi \delta' z_\xi dy \qquad -\int_{\beta_\alpha}^{\eta_\alpha} [\partial_p V]_\alpha \delta' z_\alpha dy$$
$$+\int_\alpha^\xi \left([\partial_q V]_\eta - [\partial_p V]_\eta \frac{d\eta}{dx}\right)\delta' z_\eta dx - \int_\alpha^\xi \left([\partial_q V]_\beta - [\partial_p V]_\beta \frac{d\beta}{dx}\right)\delta' z_\beta dx$$

§. 74.

Bei der Bestimmung des Maximums oder Minimums des Doppel-Integrals $U = \int\int V dx dy$ kommt es nun darauf an, daß der im vor. §. entwickelte Ausdruck (7) bezgsw. (10) gleich Null werde. Hierzu ist erforderlich daß, wofern nicht zwischen den dreizehn unbestimmten Größen $\delta' z$, $\delta' z_{\xi, y}$, $\delta' z_{\alpha, y}$, $\left[\frac{d\delta' z}{dx}\right]_{\xi, y}$, ... $\delta' z_{\beta, \alpha}$ besondere Relationen in der Aufgabe selbst ausdrücklich festgesetzt werden, alle dreizehn Glieder einzeln verschwinden, daß also entweder die betreffende Variation oder, wenn diese willkührlich sein soll, ihr Coefficient gleich Null sei. Es läßt sich hierüber eine ähnliche Betrachtung anstellen, wie sie in §. 19 und §. 24 vollständig durchgeführt wurde. Man hat nur, während die Beweisführung in §. 24 aus zwei Theilen bestand, gegenwärtig drei Theile zu unterscheiden. Zuvörderst nämlich läßt sich auch hier durch passende Annahmen von anfangs unbestimmten (und in hinreichender Anzahl vorausgesetzten) Constanten in $\delta' z$ bewirken, daß alle in (7) vorkommenden Integrale, oder auch nur ihre Summe, gleich Null werde, daß aber die Größen $\delta' z_{\xi, \eta}$, $\delta' z_{\xi, \beta}$, $\delta' z_{\alpha, \eta}$, $\delta' z_{\alpha, \beta}$, welche in den vom Integralzeichen befreiten Gliedern vorkommen, beliebige Werthe erhalten. Dann folgt, gerade wie früher, daß die Coefficienten eben dieser Größen einzeln gleich Null sein müßen. Indem also diese Glieder jetzt aus der Betrachtung gänzlich herausfallen, kann man zweitens für $\delta' z$ eine solche Annahme machen, daß das zwischen den bestimmten Gränzen ausgedehnte Doppelintegral $\int\int W \delta' z dy dx$ verschwindet, während gleichzeitig die unter den acht einfachen Integralzeichen stehenden Variationen $\delta' z_{\xi, y}$, $\delta' z_{\alpha, y}$, ꝛc. als ganz beliebige und von einander unabhängige Functionen gedacht werden dürfen. Bei diesem Sachverhältnis, welches wir sogleich noch näher nachzuweisen beabsichtigen, wird man dann aus demselben Grunde, welcher in §. 25 zu der einen Bedingungsgl. (6) (S. 92) und in §. 45 zu den zwei Bedingungsgleichungen (2) (S. 197) geführt hat, den Schluß machen, daß die acht Bedingungsgleichungen

$$
(1) \qquad
\begin{array}{ll}
\mathfrak{H}_{\xi, y} \delta' z_{\xi, y} = 0 & \mathfrak{H}_{\alpha, y} \delta' z_{\alpha, y} = 0 \\
R_{\xi, y} \left[\frac{d\delta' z}{dx}\right]_{\xi, y} = 0 & R_{\alpha, y} \left[\frac{d\delta' z}{dx}\right]_{\alpha, y} = 0 \\
\mathfrak{K}_{x, \eta} \delta' z_{x, \eta} = 0 & \mathfrak{K}_{x, \beta} \delta' z_{x, \beta} = 0 \\
\mathfrak{L}_{x, \eta} \left[\frac{d\delta' z}{dy}\right]_{x, \eta} = 0 & \mathfrak{L}_{x, \beta} \left[\frac{d\delta' z}{dy}\right]_{x, \beta} = 0
\end{array}
$$

erfüllt werden müßen. Hiernach bleibt von $\delta^{(1)}U$ nur der einzige Beſtandtheil $\int\int \mathfrak{W}\delta^{(1)}s\,dy\,dx$ übrig; und weil dieſer nun auch für jede andere, mit der Natur der Aufgabe nicht unverträgliche Beſchaffenheit von $\delta^{(1)}s$ verſchwinden muß, ſo wird man drittens auf die Bedingung

$$\mathfrak{W} = 0$$

geführt.

Um ſich von der im zweiten Theile dieſes Beweiſes ausgeſprochenen Behauptung vollſtändig zu überzeugen, nehme man für $\delta^{(1)}s$ etwa die folgende Function an:

$$\begin{aligned}
&(x-\alpha)^2(x-\xi)^2(y-\beta_1)^2(y-\eta_1)^2 f_0(x,y)\\
&\quad+(x-\alpha)^2(y-\beta_1)^2(y-\eta_1)^2\big(f_1(x,y)+(x-\xi).\mathfrak{f}_2(y)\big)\\
&\quad+(x-\xi)^2(y-\beta_1)^2(y-\eta_1)^2\big(f_2(x,y)+(x-\alpha).\mathfrak{f}_1(y)\big)\\
&\quad+(x-\alpha)^2(x-\xi)^2(y-\beta_1)^2\big(f_3(x,y)+(y-\eta_1)F_2(x)\big)\\
&\quad+(x-\alpha)^2(x-\xi)^2(y-\eta_1)^2\big(f_4(x,y)+(y-\beta_1)F_1(x)\big)
\end{aligned}$$

worin wir durch β_1, η_1 die gegebenen Functionen $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$ vorgeſtellt haben, und worin f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 ſo wie $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, F_1, F_2 noch beliebige Functionen bedeuten ſollen, die jedoch innerhalb des Integrationsintervalls nicht discontinuirlich und für die Gränzwerthe $x=\alpha$, $x=\xi$, $y=\beta_\xi$, $y=\eta_\xi$ weder Null noch unendlich werden. Es kommt jetzt, wie man auf der Stelle findet, f_0 nur in $\int\int \mathfrak{W}\delta^{(1)}s\,dy\,dx$, nicht in einem der übrigen acht Integrale vor, und läßt ſich ſo wählen, daß das beſagte Doppelintegral Null werde, gleichviel was für Werthe die übrigen acht Integrale erhalten. Ferner kommt die Function $F_1(x)$ in $\left[\frac{d\delta^{(1)}s}{dy}\right]_\beta$, aber in keinem der übrigen Variationsquotienten vor, ſo daß man, mögen die Werthe der übrigen ſieben Integrale nun Null oder was immer für endliche Größen ſein, dem letzten Integrale vermittelſt verſchiedener Annahmen für $F_1(x)$ jeden beliebigen Werth verſchaffen kann (woraus eben $\mathfrak{f}_\beta = 0$ folgt, indem man auf die eine oder andere Art bewirkt, daß die Summe der übrigen Beſtandtheile von $\delta^{(1)}U$ Null ſei). Genau daſſelbe, was hier von $F_1(x)$ in Beziehung auf $\left[\frac{d\delta^{(1)}s}{dy}\right]_\beta$ geſagt worden, gilt aber nach der Reihe von den Functionen F_2, $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ in Beziehung auf die Glieder $\left[\mathfrak{f}\frac{d\delta^{(1)}s}{dy}\right]_\eta$, $\left[\mathrm{R}\frac{d\delta^{(1)}s}{dx}\right]_\alpha$, $\left[\mathrm{R}\frac{d\delta^{(1)}s}{dx}\right]_\xi$. Was endlich die jetzt noch übrig gebliebenen, von $\delta^{(1)}s_{\xi,\gamma}$, $\delta^{(1)}s_{\alpha,\gamma}$, $\delta^{(1)}s_\eta$, $\delta^{(1)}s_\beta$

abhängigen Integrale anbelangt, so kommt die Function f_4 offenbar in $\delta^{\prime\prime} z_\beta$, aber nicht in den drei erstgenannten Größen vor; deshalb ist $\int \mathfrak{K}_\beta \delta^{\prime\prime} z_\beta dx$ als von den übrigen drei Integralien durchaus unabhängig anzusehen, woraus $\mathfrak{K}_\beta \delta^{\prime\prime} z_\beta = 0$ folgt. Und genau dasselbe, was hier von f_4 in Beziehung auf $\mathfrak{K}_\beta \delta^{\prime\prime} z_\beta$ gesagt ist, gilt nach der Reihe von f_3, f_2, f_1 in Beziehung auf $\mathfrak{K}_\eta \delta^{\prime\prime} z_\eta$, $\mathfrak{H}_\alpha \delta^{\prime\prime} z_\alpha$, $\mathfrak{H}_\xi \delta^{\prime\prime} z_\xi$. —

Die allgemeine Beschaffenheit der gesuchten Function $z = f(x, y)$ lernt man demnach durch Behandlung der Gleichung $\mathfrak{W} = 0$ kennen, welche deshalb die Hauptgleichung genannt wird; sie ist im Allgemeinen eine partielle Differentialgleichung von der zweiten oder von der vierten Ordnung, je nachdem in V nur die Differentialquotienten p und q, oder auch r, s, t vorkommen. Die übrigen Gleichungen dagegen, nämlich die in (1) zusammengestellten so wie die folgenden:

$$(2) \qquad \left[S_\eta - R_\eta \frac{d\eta}{dx}\right]_\xi \delta^{\prime\prime} z_{\eta,\xi} = 0 \qquad \left[S_\eta - R_\eta \frac{d\eta}{dx}\right]_\alpha \delta^{\prime\prime} z_{\eta,\alpha} = 0 \quad \text{ꝛc.}$$

sind die Gränzgleichungen. Insofern die ersteren nicht etwa dadurch befriedigt werden, daß der Natur der Aufgabe gemäß $\delta^{\prime\prime} z_{\xi,y} = 0$, $\delta^{\prime\prime} z_{\alpha,y} = 0$ u. s. w. zu setzen ist, sind sie zur Bestimmung der in $f(x, y)$ verwebten willkührlichen Functionen zu benutzen. Diejenigen von den Gleichungen (2) dagegen, welche nicht gleichfalls wegen der als Factoren der linken Theile vorkommenden Variationen wegfallen, liefern dann noch gewiße Relationen zwischen den eingetretenen Integrationsconstanten.

Die Form einer willkührlichen Function, die in der Gleichung einer gesuchten Fläche vorkommt, ist überhaupt dadurch zu bestimmen, daß eine Curve gegeben wird, durch welche die Fläche hindurchgehen solle. So würde die Gleichung $\frac{z}{x} = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, welche wir als erste Auflösung der in §. 72 behandelten Aufgabe gefunden hatten, sofort eine bestimmte Form gewonnen haben, wenn eine Curve als Basis (Conductrix) vorgeschrieben gewesen wäre, längs welcher sich die Erzeugungslinie der Kegelfläche fortbewegen müßte. Für den Calkul wird aber eine Curve durch das System zweier Gleichungen zwischen x, y, z gegeben, daher ist zur Bestimmung der fraglichen willkührlichen Function ein System zweier solcher Gleichungen hinreichend. Nehmen wir nun z. B. an, daß in V außer x, y, z blos p und q vorkommen, so muß den vier Gränzgleichungen

$$(3)\quad \begin{array}{ll} [\partial_p V]_{\xi,y}\,\delta z_{\xi,y} = 0 & \left([\partial_q V]_\eta - [\partial_p V]_\eta \dfrac{d\eta}{dx}\right)\delta z_{x,\eta} = 0 \\ [\partial_p V]_{\alpha,y}\,\delta z_{\alpha,y} = 0 & \left([\partial_q V]_\beta - [\partial_p V]_\beta \dfrac{d\beta}{dx}\right)\delta z_{x,\beta} = 0 \end{array}$$

Genüge geleistet werden (§. 73 Gl. (10)), während das allgemeine Integral der Hauptgleichung, wenn dasselbe überhaupt in endlicher Form zu finden ist, zwei willkührliche Functionen φ, ψ enthalten kann. Wenn nun über die Begränzungen der gesuchten Fläche gar nichts in der Aufgabe festgesetzt ist, wenn also namentlich auch nicht gefordert wird, daß alle variirenden Flächen durch eine und dieselbe, in der Gränzebene $x = \alpha$ (resp. $x = \xi$) liegende, übrigens vielleicht unbekannte Curve gehen sollen; so muß erstens $[\partial_p V]_{\alpha,y} = 0$ sein, woraus in Verbindung mit $x = \alpha$, während y variabel bleibt, die Form einer im allgemeinen Integral $z = f(x, y)$ vorkommenden willkührlichen Function von y, etwa $\varphi(y)$, sich wird ermitteln laßen. Ebenso könnte die andere willkührliche Function, falls sie nur x enthielte, also $\psi(x)$, aus dem Systeme

$$[\partial_q V]_\beta - [\partial_p V]_\beta \frac{d\beta}{dx} = 0 \qquad y = \beta = \chi_1(x)$$

bestimmt werden. Die beiden anderen aus (3) fließenden Bedingungsgleichungen wären alsdann in Rücksicht auf die Formbestimmung der gedachten zwei willkührlichen Functionen überflüßig und würden, falls sie nicht mit den eben besprochenen ganz identisch ausfielen, nur dazu dienen, gewiße Relationen zwischen den in die Formeln eingetretenen unbestimmten Constanten festzustellen, vermittelst deren die fragliche Identität herbeigeführt wird. Würde hierbei ein Widerspruch entdeckt, so müßte man die Auflösung für unmöglich erklären, so lange nicht die Gränzbedingungen abgeändert werden. — Allein so einfach verhält sich die Sache nur selten. In der Regel werden in dem Integral der Gl. $\mathfrak{W} = 0$ willkührliche Functionen vorkommen, deren Argumente aus x, y, z zusammengesetzte Ausdrücke sind, etwa $\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, $\varphi(y - ax)$ u. dgl. Wenn nun in $\partial_p V$ und $\partial_q V$ die Differentialquotienten p und q noch vorkommen, so muß man ihre Werthe aus der allgemeinen Integralgleichung durch partielles Differentiiren herleiten. Dadurch werden aber auch die Derivirten φ' und ψ' in $\partial_p V$, $\partial_q V$ eingeführt; und unter solchen Umständen wird es nicht allein nöthig bei der Bestimmung von φ und ψ die obigen Gleichungen alle vier zu Rathe zu ziehen, sondern es können sich ihrer Auflösung, da

ſie ein Syſtem von Differentialgleichungen in Beziehung auf die unbekannten Functionen φ, ψ bilden, unüberſteigliche Schwierigkeiten entgegenſtellen. Anders verhält es ſich dagegen, wenn man die Aufgabe in dem Sinne faßt, daß die Gränzvariationen $\delta z_{\xi,y}$, $\delta z_{\alpha,y}$, $\delta z_{x,\eta}$, $\delta z_{x,\beta}$ ſelbſt Null ſein ſollen. Wird z. B. eine in der Ebene $x=\xi$ liegende Curve gegeben, durch welche die Fläche gehen ſoll, ſo iſt $\delta z_{\xi,y}$ für jeden Werth von y gleich Null, alſo fällt die erſte der Gränzgleichungen (3) hinweg; u. dgl. m.

Uebrigens verdient hier ſchon bemerkt zu werden, was durch ſpätere Betrachtungen (§. 79 und §. 80) noch genauer nachgewieſen werden wird, daß die einem gegebenen V entſprechende Hauptgleichung immer die nämliche bleibt, gleichviel was für Bedingungen rückſichtlich der Begränzungslinien der geſuchten Fläche in die Aufgabe aufgenommen werden.

§. 75.

Zur Erläuterung dieſer allgemeinen Lehren diene uns zunächſt ein ganz einfaches Beiſpiel, an welchem ſich für verſchiedene Fälle die Gränzbeſtimmungen durchführen laßen*): man fragt nach dem Minimum von

$$U=\int_{\alpha}^{\xi}\int_{\beta}^{\eta}\left(z+x\frac{dz}{dx}+y\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right)dydx$$

wobei β, η ſo wie α, ξ als gegebene Conſtanten angeſehen werden ſollen.

Als Hauptgleichung erhält man hier

$$1-\frac{d\partial_p V}{dx}=1-\frac{d(x+2yp)}{dx}=2y\frac{dp}{dx}=0$$

d. h. (1) $$\frac{dp}{dx}=\frac{d^2z}{dx^2}=0$$

Die erſte Integration liefert $p=\varphi(y)$, worin φ willkührlich iſt; und durch nochmaliges Integriren ergiebt ſich

(2) $$z=x\varphi(y)+\psi(y)$$

I) Wenn nun rückſichtlich der Begränzungen des zwiſchen den vier Ebenen $x=\alpha$, $x=\xi$, $y=\beta$, $y=\eta$ liegenden Flächenſtücks gar keine nähere Bedingung gemacht würde, ſo reducirte ſich, weil $\partial_q V$ ohnehin gleich Null

*) Strauch Var.-Calc. T. II p. 379.

ist, das im vor. §. mit (3) numerirte System auf die zwei Gränzgleichungen:

$$(3) \qquad \begin{aligned} [\partial_p V]_\xi &= \xi + [2yp]_\xi = 0 \\ [\partial_p V]_\alpha &= \alpha + [2yp]_\alpha = 0 \end{aligned}$$

Aus (2) folgt nun

$$p = \varphi(y)$$

Die Beschaffenheit von p ist hier insofern sehr günstig, als außer φ selbst nicht noch eine Derivation von φ oder ψ darin vorkommt, so daß die im vor. §. erwähnte Schwierigkeit nicht obwaltet. Durch Substitution jenes Werths von p verwandeln sich die Gleichungen (3) in

$$(4) \qquad \xi + 2y\varphi(y) = 0 \qquad \text{d. h.} \qquad \varphi(y) = -\frac{\xi}{2y}$$

$$(5) \qquad \alpha + 2y\varphi(y) = 0 \qquad \text{d. h.} \qquad \varphi(y) = -\frac{\alpha}{2y}$$

Allein die Form von $\varphi(y)$ ist, wie man hieraus ersieht, eine andere für $x = \xi$ als für $x = \alpha$. Hätte man eine Function beider Variablen x, y zu bestimmen, welche vorstehenden Bedingungen Genüge leistete, dann würde man freilich $-\frac{x}{2y}$ dafür annehmen; da aber $\varphi(y)$ von x ganz frei sein soll, so enthalten vorstehende Bedingungsgleichungen einen Widerspruch in sich. Die Aufgabe läßt daher, wofern sie nicht engeren Beschränkungen unterworfen wird, keine Auflösung zu.

II) Nehmen wir jetzt an, es sei in der Gränzebene $x = \alpha$ eine Curve

$$z = f_1(y)$$

gegeben, durch welche sowohl die gesuchte Fläche als alle mit ihr in Vergleichung zu ziehenden, variirenden Nachbarflächen gehen sollen. Weil alsdann $\delta z_{\alpha,\gamma}$ Null ist, so ist die Gränzgleichung $[\partial_p V]_\alpha \delta z_\alpha = 0$ von selbst erfüllt, und die zweite der Gleichungen (3) fällt hinweg, an ihre Stelle tritt aber

$$(6) \qquad z_{\alpha,\gamma} = \alpha\varphi(y) + \psi(y) = f_1(y)$$

Ferner giebt die erste der Gleichungen (3), gerade wie vorhin,

$$(7) \qquad \xi + 2y\varphi(y) = 0$$

Gegenwärtig sind φ und ψ durch (6) und (7) vollkommen bestimmt. Man erhält

$$\varphi(y) = -\frac{\xi}{2y} \qquad \psi(y) = f_1(y) + \frac{\alpha\xi}{2y}$$

also definitiv

ist; so erhält man, wenn man jetzt mit dx multiplicirt und von $x = \alpha$ bis $x = \xi$ integrirt,

$$\int_\alpha^\xi\int_\beta^\eta S\frac{d^2\delta' z}{dxdy}dydx = \int_\alpha^\xi\int_\beta^\eta \frac{d^2S}{dxdy}\delta' z dydx$$

$$- \int_{\beta_\xi}^{\eta_\xi}\left[\frac{dS}{dy}\delta' z\right]_\xi dy + \int_{\beta_\alpha}^{\eta_\alpha}\left[\frac{dS}{dy}\delta' z\right]_\alpha dy \tag{5}$$

$$- \int_\alpha^\xi\left(\left[\frac{dS}{dx}\delta' z\right]_\eta - \left[\frac{dS}{dx}\delta' z\right]_\beta + \left[S\frac{d\delta' z}{dy}\right]_\eta\frac{d\eta}{dx} - \left[S\frac{d\delta' z}{dy}\right]_\beta\frac{d\beta}{dx}\right)dx$$

$$+ [S\delta' z]_{\eta,\xi} - [S\delta' z]_{\eta,\alpha} - [S\delta' z]_{\beta,\xi} + [S\delta' z]_{\beta,\alpha}$$

Endlich, um den von $R = \partial_r V$ abhängigen Bestandtheil von $\delta' U$ zu transformiren, gehen wir aus von

$$R\frac{d^2\delta' z}{dx^2} = \frac{d.R\frac{d\delta' z}{dx}}{dx} - \frac{d.\frac{dR}{dx}\delta' z}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2}\delta' z$$

Es folgt hieraus

$$\int_\beta^\eta R\frac{d^2\delta' z}{dx^2}dy = \int_\beta^\eta\frac{d^2R}{dx^2}\delta' z dy$$

$$+ \frac{d}{dx}\int_\beta^\eta R\frac{d\delta' z}{dx}dy - \left[R\frac{d\delta' z}{dx}\right]_\eta\frac{d\eta}{dx} + \left[R\frac{d\delta' z}{dx}\right]_\beta\frac{d\beta}{dx}$$

$$- \frac{d}{dx}\int_\beta^\eta\frac{dR}{dx}\delta' z dy + \left[\frac{dR}{dx}\delta' z\right]_\eta\frac{d\eta}{dx} - \left[\frac{dR}{dx}\delta' z\right]_\beta\frac{d\beta}{dx}$$

Wird dieses mit dx multiplicirt und innerhalb der vorgeschriebenen Gränzen integrirt, so entsteht

$$\iint R\frac{d^2\delta' z}{dx^2}dydx = \iint\frac{d^2R}{dx^2}\delta' z dydx - \left[\int\left(\frac{dR}{dx}\delta' z - R\frac{d\delta' z}{dx}\right)dy\right]_{\xi\ \alpha}$$

$$+ \int\left(\left[\frac{dR}{dx}\delta' z\right]_\eta\frac{d\eta}{dx} - \left[\frac{dR}{dx}\delta' z\right]_\beta\frac{d\beta}{dx}\right)dx \tag{⊕}$$

$$- \int\left[R\frac{d\delta' z}{dx}\right]_\eta\frac{d\eta}{dx}dx + \int\left[R\frac{d\delta' z}{dx}\right]_\beta\frac{d\beta}{dx}dx$$

Da sich jedoch unter den beiden letzten Integralzeichen der nach x genommene Differentialquotient von $\delta' s$ vorfindet, während die angezeigte Integration ebenfalls in Beziehung auf x ausgeführt werden soll, so dürfen wir jene zwei Integralien noch nicht für hinreichend reducirt erklären. Denn um den vorgesetzten Zweck zu erreichen, welcher darin besteht die Differentialquotienten höherer Ordnung von $\delta' s$ so viel als nur immer möglich auf Differentialquotienten niedrigerer Ordnung zurückzuführen, darf man unter einem Integralzeichen, durch welches eine nach x auszuführende Integration angezeigt wird, keinen der Differentialquotienten $\frac{d\delta' s}{dx}$, $\frac{d^2\delta' s}{dxdy}$, $\frac{d^2\delta' s}{dx^2}$, ꝛc. sondern nur $\frac{d\delta' s}{dy}$, $\frac{d^2\delta' s}{dy^2}$, ... stehen laßen, und umgekehrt, unter einem $\int$, durch welches eine nach y auszuführende Integration angezeigt wird, darf schließlich kein nach eben dieser Variablen genommener Differentialquotient von $\delta' s$ mehr vorkommen. Die in dem ersten der genannten zwei Integrale enthaltene Größe $[\frac{d\delta' s}{dx}]_\eta$ bedeutet nun diejenige Function von x, welche aus dem allgemeinen Ausdrucke für $\partial_x \delta' s$ entspringt, sobald man für y die Function $\chi_2(x)$ einsetzt. Denkt man sich aber diese Substitution für y gleich anfangs in $\delta' s$ gemacht und dann die Differentiation nach x ausgeführt, so hat man offenbar die identische Gleichung

$$\frac{d.\delta' s_\eta}{dx} = [\frac{d\delta' s}{dx}]_\eta + [\frac{d\delta' s}{dy}]_\eta \frac{d\eta}{dx}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_\eta \frac{d\eta}{dx}[\frac{d\delta' s}{dx}]_\eta &= \mathrm{R}_\eta \frac{d\eta}{dx}\frac{d.\delta' s_\eta}{dx} - \Big[\mathrm{R}\frac{d\delta' s}{dy}\Big]_\eta (\frac{d\eta}{dx})^2 \\ &= \frac{d}{dx}(\mathrm{R}_\eta \frac{d\eta}{dx}\delta' s_\eta) - \frac{d}{dx}(\mathrm{R}_\eta \frac{d\eta}{dx})\delta' s_\eta - \mathrm{R}_\eta (\frac{d\eta}{dx})^2 [\frac{d\delta' s}{dy}]_\eta \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \int \mathrm{R}_\eta [\frac{d\delta' s}{dx}]_\eta \frac{d\eta}{dx} dx = \Big[\mathrm{R}_\eta \frac{d\eta}{dx}\delta' s_\eta\Big]_{\xi=\alpha} &- \int \frac{d}{dx}(\mathrm{R}_\eta \frac{d\eta}{dx})\delta' s_\eta dx \\ &- \int \mathrm{R}_\eta (\frac{d\eta}{dx})^2 [\frac{d\delta' s}{dy}]_\eta dx \end{aligned}$$

Durch Vertauschung von η mit β erhält man hieraus zugleich die Umformung des letzten in $(\oplus)$ vorkommenden Integrals. Im Ganzen wird daher

$$(6)\quad \int_\alpha^\xi\int_\beta^\eta R\frac{d^2\delta z}{dx^2}\,dydx = \int_\alpha^\xi\int_\beta^\eta \frac{d^2R}{dx^2}\delta z\,dydx$$

$$-\int_{\beta_\xi}^{\eta_\xi}\Big[\frac{dR}{dx}\delta z - R\frac{d\delta z}{dx}\Big]_\xi dy \qquad +\int_{\beta_\alpha}^{\eta_\alpha}\Big[\frac{dR}{dx}\delta z - R\frac{d\delta z}{dx}\Big]_\alpha dy$$

$$+\int_\alpha^\xi\Big(\Big(\Big[\frac{dR}{dx}\Big]_\eta\frac{d\eta}{dx}+\frac{d.R_\eta\frac{d\eta}{dx}}{dx}\Big)\delta z_\eta + R_\eta\Big(\frac{d\eta}{dx}\Big)^2\Big[\frac{d\delta z}{dy}\Big]_\eta\Big)dx$$

$$-\int_\alpha^\xi\Big(\Big(\Big[\frac{dR}{dx}\Big]_\beta\frac{d\beta}{dx}+\frac{d.R_\beta\frac{d\beta}{dx}}{dx}\Big)\delta z_\beta + R_\beta\Big(\frac{d\beta}{dx}\Big)^2\Big[\frac{d\delta z}{dy}\Big]_\beta\Big)dx$$

$$-[R_\eta\frac{d\eta}{dx}\delta z_\eta]_\xi + [R_\eta\frac{d\eta}{dx}\delta z_\eta]_\alpha + [R_\beta\frac{d\beta}{dx}\delta z_\beta]_\xi - [R_\beta\frac{d\beta}{dx}\delta z_\beta]_\alpha$$

III) Auf dem hier betretenen Wege könnte man nun, indem man voraussetzte, daß in V auch noch Differentialquotienten der dritten Ordnung, als $\frac{d^3z}{dx^3}$, $\frac{d^3z}{dx^2dy}$, ꝛc. vorhanden wären, weiter fortschreiten. Im Hinblicke auf die möglicher Weise zu machenden Nutzanwendungen dürfen wir jedoch bei den in Betrachtung gezogenen Gliedern stehen bleiben, es würde fast schon hingereicht haben, in dem Ausdrucke (1) blos die drei ersten Glieder

$$\int\int(\partial_z V\delta z + \partial_p V\delta p + \partial_q V\delta q)dydx$$

vorauszusetzen.

Führt man nun die bei (2) bis (6) entwickelten Ausdrücke in (1) ein, so ergiebt sich für δU ein Aggregat von der Form

$$\delta U = \int_\alpha^\xi\int_\beta^\eta \mathfrak{W}\delta z\,dydx + \int_{\beta_\xi}^{\eta_\xi}\mathfrak{H}_\xi\delta z_\xi dy + \int_{\beta_\xi}^{\eta_\xi} R_\xi\Big[\frac{d\delta z}{dx}\Big]_\xi dy$$

$$-\int_{\beta_\alpha}^{\eta_\alpha}\mathfrak{H}_\alpha\delta z_\alpha dy - \int_{\beta_\alpha}^{\eta_\alpha} R_\alpha\Big[\frac{d\delta z}{dx}\Big]_\alpha dy$$

(7)

$$(7)\qquad +\int_a^\xi \mathfrak{K}_\eta \delta^{\prime} z_\eta dx + \int_a^\xi \mathfrak{L}_\eta \left[\frac{d\delta^{\prime} z}{dy}\right]_\eta dx$$

$$-\int_a^\xi \mathfrak{K}_\beta \delta^{\prime} z_\beta dx - \int_a^\xi \mathfrak{L}_\beta \left[\frac{d\delta^{\prime} z}{dy}\right]_\beta dx$$

$$+\left[S_\eta - R_\eta \frac{d\eta}{dx}\right]_\xi \delta^{\prime} z_{\eta,\xi} - \left[S_\eta - R_\eta \frac{d\eta}{dx}\right]_a \delta^{\prime} z_{\eta,a}$$

$$-\left[S_\beta - R_\beta \frac{d\beta}{dx}\right]_\xi \delta^{\prime} z_{\beta,\xi} + \left[S_\beta - R_\beta \frac{d\beta}{dx}\right]_a \delta^{\prime} z_{\beta,a}$$

worin

$$(8)\qquad \mathfrak{W} = \partial_z V - \frac{d\partial_p V}{dx} - \frac{d\partial_q V}{dy} + \frac{d^2\partial_r V}{dx^2} + \frac{d^2\partial_s V}{dxdy} + \frac{d^2\partial_t V}{dy^2}$$

ist, und worin, wie man ohne Mühe finden wird, $\mathfrak{H}_\xi$, $\mathfrak{H}_a$ je aus drei Gliedern, $\mathfrak{K}_\eta$, $\mathfrak{K}_\beta$ je aus sechs Gliedern, und $\mathfrak{L}_\eta$, $\mathfrak{L}_\beta$ wieder je aus drei Gliedern bestehen. Wir dürfen uns die Weitläufigkeit, alle diese Glieder hier nochmals vollständig zusammenzustellen, um so mehr ersparen, als die fragliche Formel in ihrer Totalität anzuwenden wohl niemals nöthig sein wird.

Für den einfachern Fall, daß η und β constant sein sollen, hat man $\frac{d\eta}{dx} = 0$, $\frac{d\beta}{dx} = 0$ und $\eta_\xi = \eta_a = \eta$, $\beta_\xi = \beta_a = \beta$ zu setzen. Dabei wird

$$(9)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{H} &= P - \frac{dR}{dx} - \frac{dS}{dy} = \partial_p V - \frac{d\partial_r V}{dx} - \frac{d\partial_s V}{dy} \\ \mathfrak{K} &= Q - \frac{dS}{dx} - \frac{dT}{dy} = \partial_q V - \frac{d\partial_s V}{dx} - \frac{d\partial_t V}{dy} \\ \mathfrak{L} &= T \qquad\qquad = \partial_t V \end{aligned}$$

Wenn dagegen η und β zwar Functionen von x sind, aber in V blos z und die Differentialquotienten erster Ordnung, p und q, vorkommen, so findet man

$$\delta U = \int_a^\xi \int_\beta^\eta \left(\partial_z V - \frac{d\partial_p V}{dx} - \frac{d\partial_q V}{dy}\right) \delta^{\prime} z dy dx$$

$$(10)\qquad +\int_{\beta_\xi}^{\eta_\xi} [\partial_p V]_\xi \delta^{\prime} z_\xi dy \qquad -\int_{\beta_a}^{\eta_a} [\partial_p V]_a \delta^{\prime} z_a dy$$

$$+\int_a^\xi \left([\partial_q V]_\eta - [\partial_p V]_\eta \frac{d\eta}{dx}\right) \delta^{\prime} z_\eta dx - \int_a^\xi \left([\partial_q V]_\beta - [\partial_p V]_\beta \frac{d\beta}{dx}\right) \delta^{\prime} z_\beta dx$$

§. 74.

Bei der Bestimmung des Maximums oder Minimums des Doppel-Integrals $U = \int\int V dx dy$ kommt es nun darauf an, daß der im vor. §. entwickelte Ausdruck (7) bezgsw. (10) gleich Null werde. Hierzu ist erforderlich daß, wofern nicht zwischen den dreizehn unbestimmten Größen $\delta' s$, $\delta' s_{\xi,\eta}$, $\delta' s_{\alpha,\eta}$, $\left[\frac{d\delta' s}{dx}\right]_{\xi,\eta}$, ... $\delta' s_{\beta,\alpha}$ besondere Relationen in der Aufgabe selbst ausdrücklich festgesetzt werden, alle dreizehn Glieder einzeln verschwinden, daß also entweder die betreffende Variation oder, wenn diese willkührlich sein soll, ihr Coefficient gleich Null sei. Es läßt sich hierüber eine ähnliche Betrachtung anstellen, wie sie in §. 19 und §. 24 vollständig durchgeführt wurde. Man hat nur, während die Beweisführung in §. 24 aus zwei Theilen bestand, gegenwärtig drei Theile zu unterscheiden. Zuvörderst nämlich läßt sich auch hier durch passende Annahmen von anfangs unbestimmten (und in hinreichender Anzahl vorausgesetzten) Constanten in $\delta' s$ bewirken, daß alle in (7) vorkommenden Integrale, oder auch nur ihre Summe, gleich Null werde, daß aber die Größen $\delta' s_{\xi,\eta}$, $\delta' s_{\xi,\beta}$, $\delta' s_{\alpha,\eta}$, $\delta' s_{\alpha,\beta}$, welche in den vom Integralzeichen befreiten Gliedern vorkommen, beliebige Werthe erhalten. Dann folgt, gerade wie früher, daß die Coefficienten eben dieser Größen einzeln gleich Null sein müßen. Indem also diese Glieder jetzt aus der Betrachtung gänzlich herausfallen, kann man zweitens für $\delta' s$ eine solche Annahme machen, daß das zwischen den bestimmten Gränzen ausgedehnte Doppelintegral $\int\int W \delta' s dy dx$ verschwindet, während gleichzeitig die unter den acht einfachen Integralzeichen stehenden Variationen $\delta' s_{\xi,\eta}$, $\delta' s_{\alpha,\eta}$, ꝛc. als ganz beliebige und von einander unabhängige Functionen gedacht werden dürfen. Bei diesem Sachverhältnis, welches wir sogleich noch näher nachzuweisen beabsichtigen, wird man dann aus demselben Grunde, welcher in §. 25 zu der einen Bedingungsgl. (6) (S. 92) und in §. 45 zu den zwei Bedingungsgleichungen (2) (S. 197) geführt hat, den Schluß machen, daß die acht Bedingungsgleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{H}_{\xi,\eta}\delta' s_{\xi,\eta} &= 0 & \mathfrak{H}_{\alpha,\eta}\delta' s_{\alpha,\eta} &= 0 \\ \mathfrak{R}_{\xi,\eta}\left[\frac{d\delta' s}{dx}\right]_{\xi,\eta} &= 0 & \mathfrak{R}_{\alpha,\eta}\left[\frac{d\delta' s}{dx}\right]_{\alpha,\eta} &= 0 \\ \mathfrak{K}_{\xi,\eta}\delta' s_{\xi,\eta} &= 0 & \mathfrak{K}_{\xi,\beta}\delta' s_{\xi,\beta} &= 0 \\ \mathfrak{L}_{\xi,\eta}\left[\frac{d\delta' s}{dy}\right]_{\xi,\eta} &= 0 & \mathfrak{L}_{\xi,\beta}\left[\frac{d\delta' s}{dy}\right]_{\xi,\beta} &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt werden müßen. Hiernach bleibt von δU nur der einzige Bestandtheil $\int\int \mathfrak{W}\delta z dy dx$ übrig; und weil dieser nun auch für jede andere, mit der Natur der Aufgabe nicht unverträgliche Beschaffenheit von δz verschwinden muß, so wird man drittens auf die Bedingung

$$\mathfrak{W} = 0$$

geführt.

Um sich von der im zweiten Theile dieses Beweises ausgesprochenen Behauptung vollständig zu überzeugen, nehme man für δz etwa die folgende Function an:

$$\begin{aligned}
&(x-\alpha)^2(x-\xi)^2(y-\beta_1)^2(y-\eta_1)^2 f_0(x, y)\\
&\quad + (x-\alpha)^2(y-\beta_1)^2(y-\eta_2)^2\big(f_1(x, y) + (x-\xi).\varphi_2(y)\big)\\
&\quad + (x-\xi)^2(y-\beta_1)^2(y-\eta_2)^2\big(f_2(x, y) + (x-\alpha).\varphi_1(y)\big)\\
&\quad + (x-\alpha)^2(x-\xi)^2(y-\beta_2)^2\big(f_3(x, y) + (y-\eta_1)F_2(x)\big)\\
&\quad + (x-\alpha)^2(x-\xi)^2(y-\eta_2)^2\big(f_4(x, y) + (y-\beta_1)F_1(x)\big)
\end{aligned}$$

worin wir durch β_1, η_1 die gegebenen Functionen $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$ vorgestellt haben, und worin f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 so wie φ_1, φ_2, F_1, F_2 noch beliebige Functionen bedeuten sollen, die jedoch innerhalb des Integrationsintervalls nicht discontinuirlich und für die Gränzwerthe $x = \alpha$, $x = \xi$, $y = \beta_\xi$, $y = \eta_\xi$ weder Null noch unendlich werden. Es kommt jetzt, wie man auf der Stelle findet, f_0 nur in $\int\int \mathfrak{W}\delta z dy dx$, nicht in einem der übrigen acht Integrale vor, und läßt sich so wählen, daß das besagte Doppelintegral Null werde, gleichviel was für Werthe die übrigen acht Integrale erhalten. Ferner kommt die Function $F_1(x)$ in $\left[\frac{d\delta z}{dy}\right]_\beta$, aber in keinem der übrigen Variationsquotienten vor, so daß man, mögen die Werthe der übrigen sieben Integrale nun Null oder was immer für endliche Größen sein, dem letzten Integrale vermittelst verschiedener Annahmen für $F_1(x)$ jeden beliebigen Werth verschaffen kann (woraus eben $\mathfrak{f}_\beta = 0$ folgt, indem man auf die eine oder andere Art bewirkt, daß die Summe der übrigen Bestandtheile von δU Null sei). Genau dasselbe, was hier von $F_1(x)$ in Beziehung auf $\left[\frac{d\delta z}{dy}\right]_\beta$ gesagt worden, gilt aber nach der Reihe von den Functionen F_2, φ_1, φ_2 in Beziehung auf die Glieder $\left[\mathfrak{f}\frac{d\delta z}{dy}\right]_\eta$, $\left[\mathrm{R}\frac{d\delta z}{dx}\right]_\alpha$, $\left[\mathrm{R}\frac{d\delta z}{dx}\right]_\xi$. Was endlich die jetzt noch übrig gebliebenen, von $\delta z_{\xi,\gamma}$, $\delta z_{\alpha,\gamma}$, δz_η, δz_β

abhängigen Integrale anbelangt, so kommt die Function f_4 offenbar in $\delta^n z_\beta$, aber nicht in den drei erstgenannten Größen vor; deshalb ist $\int \mathfrak{K}_\beta \delta^n z_\beta dx$ als von den übrigen drei Integralien durchaus unabhängig anzusehen, woraus $\mathfrak{K}_\beta \delta^n z_\beta = 0$ folgt. Und genau dasselbe, was hier von f_4 in Beziehung auf $\mathfrak{K}_\beta \delta^n z_\beta$ gesagt ist, gilt nach der Reihe von f_3, f_2, f_1 in Beziehung auf $\mathfrak{K}_\eta \delta^n z_\eta$, $\mathfrak{H}_\alpha \delta^n z_\alpha$, $\mathfrak{H}_\xi \delta^n z_\xi$. —

Die allgemeine Beschaffenheit der gesuchten Function $z = f(x, y)$ lernt man demnach durch Behandlung der Gleichung $\mathfrak{W} = 0$ kennen, welche deshalb die Hauptgleichung genannt wird; sie ist im Allgemeinen eine partielle Differentialgleichung von der zweiten oder von der vierten Ordnung, je nachdem in V nur die Differentialquotienten p und q, oder auch r, s, t vorkommen. Die übrigen Gleichungen dagegen, nämlich die in (1) zusammengestellten so wie die folgenden:

$$(2) \qquad \left[S_\eta - R_\eta \frac{d\eta}{dx}\right]_\xi \delta^n z_{\eta,\xi} = 0 \qquad \left[S_\eta - R_\eta \frac{d\eta}{dx}\right]_\alpha \delta^n z_{\eta,\alpha} = 0 \quad \text{ꝛc.}$$

sind die Gränzgleichungen. Insofern die ersteren nicht etwa dadurch befriedigt werden, daß der Natur der Aufgabe gemäß $\delta^n z_{\xi,\gamma} = 0$, $\delta^n z_{\alpha,\gamma} = 0$ u. s. w. zu setzen ist, sind sie zur Bestimmung der in $f(x, y)$ verwebten willkührlichen Functionen zu benutzen. Diejenigen von den Gleichungen (2) dagegen, welche nicht gleichfalls wegen der als Factoren der linken Theile vorkommenden Variationen wegfallen, liefern dann noch gewiße Relationen zwischen den eingetretenen Integrationsconstanten.

Die Form einer willkührlichen Function, die in der Gleichung einer gesuchten Fläche vorkommt, ist überhaupt dadurch zu bestimmen, daß eine Curve gegeben wird, durch welche die Fläche hindurchgehen solle. So würde die Gleichung $\frac{z}{x} = \psi\left(\frac{y}{x}\right)$, welche wir als erste Auflösung der in §. 72 behandelten Aufgabe gefunden hatten, sofort eine bestimmte Form gewonnen haben, wenn eine Curve als Basis (Conductrix) vorgeschrieben gewesen wäre, längs welcher sich die Erzeugungslinie der Kegelfläche fortbewegen müßte. Für den Calkul wird aber eine Curve durch das System zweier Gleichungen zwischen x, y, z gegeben, daher ist zur Bestimmung der fraglichen willkührlichen Function ein System zweier solcher Gleichungen hinreichend. Nehmen wir nun z. B. an, daß in V außer x, y, z blos p und q vorkommen, so muß den vier Gränzgleichungen

$$(3)\qquad \begin{array}{ll} [\partial_p V]_{\xi,\gamma}\,\delta z_{\xi,\gamma} = 0 & \left([\partial_q V]_\eta - [\partial_p V]_\eta \frac{d\eta}{dx}\right)\delta z_{x,\eta} = 0 \\ [\partial_p V]_{\alpha,\gamma}\,\delta z_{\alpha,\gamma} = 0 & \left([\partial_q V]_\beta - [\partial_p V]_\beta \frac{d\beta}{dx}\right)\delta z_{x,\beta} = 0 \end{array}$$

Genüge geleiſtet werden (§. 73 Gl. (10)), während das allgemeine Integral der Hauptgleichung, wenn daſſelbe überhaupt in endlicher Form zu finden iſt, zwei willkührliche Functionen φ, ψ enthalten kann. Wenn nun über die Begränzungen der geſuchten Fläche gar nichts in der Aufgabe feſtgeſetzt iſt, wenn alſo namentlich auch nicht gefordert wird, daß alle variirenden Flächen durch eine und dieſelbe, in der Gränzebene $x = \alpha$ (resp. $x = \xi$) liegende, übrigens vielleicht unbekannte Curve gehen ſollen; ſo muß erſtens $[\partial_p V]_{\alpha,\gamma} = 0$ ſein, woraus in Verbindung mit $x = \alpha$, während y variabel bleibt, die Form einer im allgemeinen Integral $z = f(x, y)$ vorkommenden willkührlichen Function von y, etwa $\varphi(y)$, ſich wird ermitteln laßen. Ebenſo könnte die andere willkührliche Function, falls ſie nur x enthielte, alſo $\psi(x)$, aus dem Syſteme

$$[\partial_q V]_\beta - [\partial_p V]_\beta \frac{d\beta}{dx} = 0 \qquad y = \beta = \chi_1(x)$$

beſtimmt werden. Die beiden anderen aus (3) fließenden Bedingungsgleichungen wären alsdann in Rückſicht auf die Formbeſtimmung der gedachten zwei willkührlichen Functionen überflüßig und würden, falls ſie nicht mit den eben beſprochenen ganz identiſch ausfielen, nur dazu dienen, gewiße Relationen zwiſchen den in die Formeln eingetretenen unbeſtimmten Conſtanten feſtzuſtellen, vermittelſt deren die fragliche Identität herbeigeführt wird. Würde hierbei ein Widerſpruch entdeckt, ſo müßte man die Auflöſung für unmöglich erklären, ſo lange nicht die Gränzbedingungen abgeändert werden. — Allein ſo einfach verhält ſich die Sache nur ſelten. In der Regel werden in dem Integral der Gl. $\mathfrak{W} = 0$ willkührliche Functionen vorkommen, deren Argumente aus x, y, z zuſammengeſetzte Ausdrücke ſind, etwa $\psi\left(\frac{y}{x}\right)$, $\varphi(y - ax)$ u. dgl. Wenn nun in $\partial_p V$ und $\partial_q V$ die Differentialquotienten p und q noch vorkommen, ſo muß man ihre Werthe aus der allgemeinen Integralgleichung durch partielles Differentiiren herleiten. Dadurch werden aber auch die Derivirten φ' und ψ' in $\partial_p V$, $\partial_q V$ eingeführt; und unter ſolchen Umſtänden wird es nicht allein nöthig bei der Beſtimmung von φ und ψ die obigen Gleichungen alle vier zu Rathe zu ziehen, ſondern es können ſich ihrer Auflö-

ſie ein Syſtem von Differentialgleichungen in Beziehung auf die unbekannten Functionen φ, ψ bilden, unüberſteigliche Schwierigkeiten entgegenſtellen. Anders verhält es ſich dagegen, wenn man die Aufgabe in dem Sinne faßt, daß die Gränzvariationen $\delta z_{\xi,y}$, $\delta z_{\alpha,y}$, $\delta z_{x,\eta}$, $\delta z_{x,\beta}$ ſelbſt Null ſein ſollen. Wird z. B. eine in der Ebene $x=\xi$ liegende Curve gegeben, durch welche die Fläche gehen ſoll, ſo iſt $\delta z_{\xi,y}$ für jeden Werth von y gleich Null, alſo fällt die erſte der Gränzgleichungen (3) hinweg; u. dgl. m.

Uebrigens verdient hier ſchon bemerkt zu werden, was durch ſpätere Betrachtungen (§. 79 und §. 80) noch genauer nachgewieſen werden wird, daß die einem gegebenen V entſprechende Hauptgleichung immer die nämliche bleibt, gleichviel was für Bedingungen rückſichtlich der Begränzungslinien der geſuchten Fläche in die Aufgabe aufgenommen werden.

§. 75.

Zur Erläuterung dieſer allgemeinen Lehren diene uns zunächſt ein ganz einfaches Beiſpiel, an welchem ſich für verſchiedene Fälle die Gränzbeſtimmungen durchführen laßen*): man fragt nach dem Minimum von

$$U=\int_{\alpha}^{\xi}\int_{\beta}^{\eta}\Big(z+x\frac{dz}{dx}+y\Big(\frac{dz}{dx}\Big)^2\Big)dydx$$

wobei β, η ſo wie α, ξ als gegebene Conſtanten angeſehen werden ſollen.

Als Hauptgleichung erhält man hier

$$1-\frac{d\delta_p V}{dx}=1-\frac{d(x+2yp)}{dx}=2y\frac{dp}{dx}=0$$

d. h. (1) $$\frac{dp}{dx}=\frac{d^2z}{dx^2}=0$$

Die erſte Integration liefert $p=\varphi(y)$, worin φ willkührlich iſt; und durch nochmaliges Integriren ergiebt ſich

(2) $$z=x\varphi(y)+\psi(y)$$

I) Wenn nun rückſichtlich der Begränzungen des zwiſchen den vier Ebenen $x=\alpha$, $x=\xi$, $y=\beta$, $y=\eta$ liegenden Flächenſtücks gar keine nähere Bedingung gemacht würde, ſo reducirte ſich, weil $\delta_q V$ ohnehin gleich Null

*) Strauch Var.-Calc. T. II p. 379.

ist, das im vor. §. mit (3) numerirte System auf die zwei Gränzgleichungen:

$$(3)\qquad \begin{aligned}[\partial_p V]_\xi &= \xi + [2yp]_\xi = 0\\ [\partial_p V]_\alpha &= \alpha + [2yp]_\alpha = 0\end{aligned}$$

Aus (2) folgt nun

$$p = \varphi(y)$$

Die Beschaffenheit von p ist hier insofern sehr günstig, als außer φ selbst nicht noch eine Derivation von φ oder ψ darin vorkommt, so daß die im vor. §. erwähnte Schwierigkeit nicht obwaltet. Durch Substitution jenes Werths von p verwandeln sich die Gleichungen (3) in

$$(4)\qquad \xi + 2y\varphi(y) = 0 \qquad \text{d. h.} \qquad \varphi(y) = -\frac{\xi}{2y}$$

$$(5)\qquad \alpha + 2y\varphi(y) = 0 \qquad \text{d. h.} \qquad \varphi(y) = -\frac{\alpha}{2y}$$

Allein die Form von $\varphi(y)$ ist, wie man hieraus ersieht, eine andere für $x = \xi$ als für $x = \alpha$. Hätte man eine Function beider Variablen x, y zu bestimmen, welche vorstehenden Bedingungen Genüge leistete, dann würde man freilich $-\frac{x}{2y}$ dafür annehmen; da aber $\varphi(y)$ von x ganz frei sein soll, so enthalten vorstehende Bedingungsgleichungen einen Widerspruch in sich. Die Aufgabe läßt daher, wofern sie nicht engeren Beschränkungen unterworfen wird, keine Auflösung zu.

II) Nehmen wir jetzt an, es sei in der Gränzebene $x = \alpha$ eine Curve

$$z = f_1(y)$$

gegeben, durch welche sowohl die gesuchte Fläche als alle mit ihr in Vergleichung zu ziehenden, variirenden Nachbarflächen gehen sollen. Weil alsdann $\delta z_{\alpha,\gamma}$ Null ist, so ist die Gränzgleichung $[\partial_p V]_\alpha \delta z_\alpha = 0$ von selbst erfüllt, und die zweite der Gleichungen (3) fällt hinweg, an ihre Stelle tritt aber

$$(6)\qquad z_{\alpha,\gamma} = \alpha\varphi(y) + \psi(y) = f_1(y)$$

Ferner giebt die erste der Gleichungen (3), gerade wie vorhin,

$$(7)\qquad \xi + 2y\varphi(y) = 0$$

Gegenwärtig sind φ und ψ durch (6) und (7) vollkommen bestimmt. Man erhält

$$\varphi(y) = -\frac{\xi}{2y} \qquad \psi(y) = f_1(y) + \frac{\alpha\xi}{2y}$$

also definitiv

$$(8) \qquad z = f_1(y) - \frac{\xi(x-\alpha)}{2y}$$

III) Machen wir endlich die Voraussetzung, daß außer der eben angenommenen Curve $z = f_1(y)$ auch noch in der Gränzebene $x = \xi$ eine Curve

$$z = f_2(y)$$

gegeben sei; so fällt auch die erste der Gleichungen (3) weg, an ihre Stelle tritt aber

$$(9) \qquad z_{\xi,\eta} = \xi\varphi(y) + \psi(y) = f_2(y)$$

Aus (6) und (9) erhalten wir

$$\varphi(y) = \frac{f_2(y) - f_1(y)}{\xi - \alpha} \qquad \psi(y) = \frac{\xi f_1(y) - \alpha f_2(y)}{\xi - \alpha}$$

Daher ist jetzt

$$(10) \qquad (\xi - \alpha)z = (f_2(y) - f_1(y))x + (\xi f_1(y) - \alpha f_2(y))$$

die Gleichung der verlangten Fläche.

IV) Um zu entscheiden, ob die in (8) resp. (10) gefundene Function z wirklich ein Minimum von U liefere, untersuchen wir den Ausdruck

$$U + \nabla U = \int\int (z + \nabla z + x(p + \nabla p) + y(p + \nabla p)^2) dy dx$$
$$= U + \int\int (\nabla z + (x + 2yp)\nabla p) dy dx + \int\int y \nabla p^2 dy dx$$

Nun wird man sich zunächst leicht überzeugen, daß in dem letzten Trinome das zweite Glied, welches in Beziehung auf die willkührlichen Functionen ∇z und ∇p von der ersten Dimension ist, in Folge der über die Gränzen gemachten Bedingungen verschwindet. Denn mittelst partieller Integration nach x erhält man

$$\int (x + 2yp)\nabla p dx = (x + 2yp)\nabla z - \int \frac{d(x + 2yp)}{dx} \nabla z dx$$

also

$$\int\int (\nabla z + (x + 2yp)\nabla p) dy dx = \int [(x + 2yp)\nabla z]_{\xi - \alpha} dy$$
$$+ \int\int \left(1 - \frac{d(x + 2yp)}{dx}\right) \nabla z dx dy$$

Die unter dem letzten doppelten Integralzeichen vorkommende Differenz ist aber gemäß der Hauptgleichung (1) identisch Null. Ferner ist, wenn wir unter z die in II) bestimmte Function verstehen,

$$p = -\frac{\xi}{2y} \qquad \text{also} \qquad [x + 2yp]_\xi = \xi - \xi = 0$$

und da in diesem Falle zugleich $\nabla z_{\alpha,\eta}$ wegen der in der Ebene $x = \alpha$

liegenden Gränzcurve gleich Null sein soll, so verschwindet von der unter dem einfachen Integralzeichen befindlichen Differenz $[(x+2yp)\nabla z]_{\xi-\alpha}$ sowohl der Minuendus als der Subtrahendus. Wenn dagegen z als die in III) bestimmte Function angenommen wird, so sind die variirenden Flächen, wegen der zwei gegebenen Gränzcurven, an die zwei Bedingungen

$$\nabla z_{\xi,\eta}=0 \qquad \nabla z_{\alpha,\eta}=0$$

gebunden, wodurch die eben erwähnte Differenz ebenfalls zum Verschwinden gebracht wird.

Hiernach ist also

$$\nabla U=\int_{\alpha}^{\xi}\int_{\beta}^{\eta} y\nabla p^2\,dy\,dx$$

und diese Formel lehrt, daß wenigstens in allen den Fällen, wenn y in dem Integrationsintervalle positiv bleibt, d. h. wenn β und η positiv sind, ∇U positive Werthe erhalte.

§. 76.

Aufgabe. Die krumme Fläche zu bestimmen, welche zwischen gegebenen Begränzungen den kleinsten Inhalt hat.

I) Da nach bekannten Regeln der analytischen Geometrie der Cosinus des Neigungswinkels θ zwischen der einem beliebigen Punkte der Fläche zugehörigen Berührungsebene und der Ebene der XY durch $\operatorname{Cos}\theta=(p^2+q^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ angegeben wird, so ist der Inhalt jedes Flächenelements, dessen Projection durch $dxdy$ ausgedrückt wird, gleich $\frac{dxdy}{\operatorname{Cos}\theta}=\sqrt{(p^2+q^2+1)}dxdy$, also

$$U=\int\int\sqrt{(p^2+q^2+1)}dxdy$$

Wir haben daher $V=\sqrt{(p^2+q^2+1)}$

$$\partial_p V=\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}} \qquad \partial_q V=\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

woraus als Hauptgleichung $\frac{d}{dx}\cdot\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}+\frac{d}{dy}\cdot\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}=0$ folgt, oder, sobald man die angezeigten Differentiationen ausführt und den gemeinschaftlichen Divisor $(p^2+q^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ beseitigt,

(1) $\qquad (q^2+1)r-2pqs+(p^2+1)t=0$

Zuvörderſt iſt nun aus dieſer Gleichung, unter Zuziehung eines bekannten Satzes aus der Lehre von der Krümmung der Flächen, eine ſehr wichtige Eigenſchaft der geſuchten Fläche zu folgern. Man weiß nämlich, daß die Halbmeſſer R_1, R_2 der beiden Hauptkrümmungskreiſe, welche einem beliebigen Punkte einer krummen Fläche zukommen und deren Ebenen normal auf einander ſtehen, durch die Wurzeln der quadratiſchen Gleichung

$$(s^2 - rt)R^2 - [(q^2+1)r - 2pqs + (p^2+1)t]V.R - V^4 = 0$$

angegeben werden*), worin wir zur Abkürzung V anſtatt der Wurzelgröße $\sqrt{(p^2+q^2+1)}$ geſchrieben haben; oder anders ausgedrückt, daß die zwei Hauptkrümmungen der Fläche, nämlich die Quotienten $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$, die Wurzeln der Gleichung

$$(2)\quad \left(\frac{1}{R}\right)^2 + \frac{(q^2+1)r - 2pqs + (p^2+1)t}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{R} + (rt - s^2) = 0$$

ſind. Da nun an unſerer geſuchten Minimumsfläche der Coefficient von $\frac{1}{R}$ vermöge (1) verſchwindet, ſo ſind R_1 und R_2 einander gleich aber entgegengeſetzt. Hieraus iſt, gemäß den in der analytiſchen Geometrie feſtgeſtellten Regeln über das Vorzeichen der Krümmungshalbmeſſer, der Schluß zu ziehen, daß in jedem Punkte der geſuchten Fläche, wenn der eine Hauptſchnitt in Beziehung auf eine Coordinatenebene concav liegt, der andere nach derſelben Ebene ſeine Convexität wenden müße, daß aber die Krümmungen beider gleich groß ſeien. Ein anderer Ausdruck für dieſelbe Eigenſchaft iſt: die mittlere Krümmung der Fläche ſei in jedem beliebigen Punkte M gleich Null, inſofern man unter der mittleren Krümmung das arithmetiſche Mittel aus den beiden Hauptkrümmungen, nämlich die Größe $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ verſteht. Dieſe mittlere Krümmung kommt immer demjenigen Normalſchnitte zu, deſſen Ebene ſich mit den Ebenen der beiden Hauptnormalſchnitte unter Winkeln von 45^0 ſchneidet. Denn ſobald man in der bekannten Gleichung

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1}\operatorname{Cos}\alpha^2 + \frac{1}{R_2}\operatorname{Sin}\alpha^2$$

*) Ettingshauſen höh. Math. Th. II p. 136. Moigno Leçons T. I p. 370. Leroy Analyt. Geom. §. 379.

worin R_3 den Krümmungshalbmeßer eines beliebigen durch M gelegten Normalschnitts und α seine Neigung gegen die Ebene des ersten Hauptnormalschnitts bedeutet, $\alpha = \pm 45^0$ also $\mathrm{Cos}\,\alpha = \mathrm{Sin}\,\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ annimmt, so erhält man

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

Daß aber an der verlangten Minimumsfläche die Summe von $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ Null sei, folgt aus (2). Die deshalb Statt findende Relation $R_3 = \pm\infty$ zeigt an, daß jeder der zwei gedachten mittleren Normalschnitte entweder geradlinig sei oder in M einen Wendungspunkt besitze. Aus diesem Grunde muß denn auch die Gleichung einer Ebene der Hauptgleichung (1) Genüge leisten; in der That, wegen $r = 0$, $s = 0$, $t = 0$ verschwindet alsdann der linke Theil jener Gleichung. Man wird sich übrigens leicht überzeugen, daß keine andere developpable Fläche, außer der Ebene, die fragliche Eigenschaft besitzt. Denn bezeichnen wir den linken Theil der Gl. (1) zur Abkürzung wieder durch W und erinnern uns, daß an developpablen Flächen in jedem beliebigen Punkte $rt - ss = 0$ ist; so können wir nach Belieben, je nachdem wir entweder t oder r eliminiren, für W den Ausdruck

$$(q^2+1)r - 2pqs + (p^2+1)\frac{s^2}{r} = \frac{1}{r}[(ps - qr)^2 + s^2 + r^2]$$

oder auch den Ausdruck

$$(q^2+1)\frac{s^2}{t} - 2pqs + (p^2+1)t = \frac{1}{t}[(qs - pt)^2 + s^2 + t^2]$$

anwenden, und hieraus erhellt, daß die Bedingung $W = 0$ nicht anders erfüllt werden kann, als dadurch, daß gleichzeitig

$r = 0$, $s = 0$, $t = 0$ also $p = \mathrm{Const.} = A$, $q = \mathrm{Const.} = B$

und

$$z = Ax + By + C$$

sei.

II) Was nun das allgemeine Integral dieser Gl. $W = 0$ anbelangt, so läßt sich dasselbe nach der folgenden Methode finden, die bei allen denjenigen lineären Differentialgleichungen zweiter Ordnung von der Form

$$\frac{d^2z}{dx^2} + M\frac{d^2z}{dxdy} + N\frac{d^2z}{dy^2} = 0 \qquad (3)$$

$$(6)\quad \int_\alpha^\xi\int_\beta^\eta \mathrm{R}\frac{d^2\delta z}{dx^2}\,dydx = \int_\alpha^\xi\int_\beta^\eta \frac{d^2\mathrm{R}}{dx^2}\delta z\,dydx$$
$$-\int_{\beta_\xi}^{\eta_\xi}\Big[\frac{d\mathrm{R}}{dx}\delta z - \mathrm{R}\frac{d\delta z}{dx}\Big]_\xi dy \qquad +\int_{\beta_\alpha}^{\eta_\alpha}\Big[\frac{d\mathrm{R}}{dx}\delta z - \mathrm{R}\frac{d\delta z}{dx}\Big]_\alpha dy$$
$$+\int_\alpha^\xi\Big(\Big[\frac{d\mathrm{R}}{dx}\Big]_\eta\frac{d\eta}{dx} + \frac{d.\mathrm{R}_\eta\frac{d\eta}{dx}}{dx}\Big)\delta z_\eta + \mathrm{R}_\eta\Big(\frac{d\eta}{dx}\Big)^2\Big[\frac{d\delta z}{dy}\Big]_\eta\Big)dx$$
$$-\int_\alpha^\xi\Big(\Big[\frac{d\mathrm{R}}{dx}\Big]_\beta\frac{d\beta}{dx} + \frac{d.\mathrm{R}_\beta\frac{d\beta}{dx}}{dx}\Big)\delta z_\beta + \mathrm{R}_\beta\Big(\frac{d\beta}{dx}\Big)^2\Big[\frac{d\delta z}{dy}\Big]_\beta\Big)dx$$
$$-\Big[\mathrm{R}_\eta\frac{d\eta}{dx}\delta z_\eta\Big]_\xi + \Big[\mathrm{R}_\eta\frac{d\eta}{dx}\delta z_\eta\Big]_\alpha + \Big[\mathrm{R}_\beta\frac{d\beta}{dx}\delta z_\beta\Big]_\xi - \Big[\mathrm{R}_\beta\frac{d\beta}{dx}\delta z_\beta\Big]_\alpha$$

III) Auf dem hier betretenen Wege könnte man nun, indem man voraussetzte, daß in V auch noch Differentialquotienten der dritten Ordnung, als $\frac{d^3z}{dx^3}$, $\frac{d^3z}{dx^2dy}$, ꝛc. vorhanden wären, weiter fortschreiten. Im Hinblicke auf die möglicher Weise zu machenden Nutzanwendungen dürfen wir jedoch bei den in Betrachtung gezogenen Gliedern stehen bleiben, es würde fast schon hingereicht haben, in dem Ausdrucke (1) blos die drei ersten Glieder

$$\int\int(\partial_z\mathrm{V}\,\delta z + \partial_p\mathrm{V}\,\delta p + \partial_q\mathrm{V}\,\delta q)dydx$$

vorauszusetzen.

Führt man nun die bei (2) bis (6) entwickelten Ausdrücke in (1) ein, so ergiebt sich für $\delta\mathrm{U}$ ein Aggregat von der Form

$$\delta\mathrm{U} = \int_\alpha^\xi\int_\beta^\eta \mathfrak{W}\delta z\,dydx + \int_{\beta_\xi}^{\eta_\xi}\mathfrak{H}_\xi\delta z_\xi dy + \int_{\beta_\xi}^{\eta_\xi}\mathrm{R}_\xi\Big[\frac{d\delta z}{dx}\Big]_\xi dy$$
$$-\int_{\beta_\alpha}^{\eta_\alpha}\mathfrak{H}_\alpha\delta z_\alpha dy - \int_{\beta_\alpha}^{\eta_\alpha}\mathrm{R}_\alpha\Big[\frac{d\delta z}{dx}\Big]_\alpha dy$$
$$(7)$$

gelangen. Aus (5) folgt aber $p = -\frac{n\mu - m\nu}{m-n}$, $q = \frac{\mu - \nu}{m-n}$, woraus ersichtlich ist, daß die Anwendbarkeit der Methode $m \gtrless n$ verlangt, was wir hier voraussetzen wollen und, was in unserm speciellen Beispiele der Fall sein wird. Indem wir nun den Werth für q in die gefundenen Bedingungsgleichungen (7) und (8) einsetzen, haben wir

$$(\partial_m\mu\,\partial_x m + \partial_n\mu\,\partial_x n) + n(\partial_m\mu\,\partial_y m + \partial_n\mu\,\partial_y n) - \frac{\mu-\nu}{m-n}(\partial_x m + n\partial_y m) = 0 \tag{9}$$

$$(\partial_m\nu\,\partial_x m + \partial_n\nu\,\partial_x n) + m(\partial_m\nu\,\partial_y m + \partial_n\nu\,\partial_y n) - \frac{\mu-\nu}{m-n}(\partial_x n + m\partial_y n) = 0 \tag{10}$$

Hierin stellen μ, ν, $\partial_m\mu$, $\partial_n\mu$, $\partial_m\nu$, $\partial_n\nu$ Ausdrücke in m und n vor, welche vermöge (6) gegeben sind. Daher ist (9) und (10) ein System von zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für m und n als Functionen der independenten Variablen x, y. Und sobald es gelungen mittelst Integration m und n als Functionen von x und y darzustellen, so sind zunächst μ, ν wegen (6) ebenfalls Functionen von x, y, und dann werden nach Einführung dieser Werthe für m, n, μ, ν die beiden Gleichungen (5) als erste Integrale der ursprünglichen Gleichung (3) anzusehen sein. Zugleich sind jetzt

$$\frac{dz}{dx} = p = -\frac{n\mu - m\nu}{m-n} \qquad \frac{dz}{dy} = q = \frac{\mu-\nu}{m-n} \tag{11}$$

als Functionen der Independenten x und y entwickelt. Dabei wird $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$ ausfallen, was zwar schon deshalb sein muß, weil wir oben bei dem Differentiiren der Gleichungen (5) $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx} = s$ gesetzt hatten, was aber auch leicht a posteriori nachgewiesen werden kann. Aus (11) fließt nämlich

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{1}{m-n}\left(\mu\frac{dn}{dy} + n\frac{d\mu}{dy} - \nu\frac{dm}{dy} - m\frac{d\nu}{dy}\right) + \frac{n\mu - m\nu}{(m-n)^2}\left(\frac{dm}{dy} - \frac{dn}{dy}\right)$$

$$\frac{dq}{dx} = \frac{1}{m-n}\left(\frac{d\mu}{dx} - \frac{d\nu}{dx}\right) - \frac{\mu-\nu}{(m-n)^2}\left(\frac{dm}{dx} - \frac{dn}{dx}\right)$$

also $\frac{dq}{dx}-\frac{dp}{dy}=\frac{1}{m-n}\left[\frac{d\mu}{dx}+n\frac{d\mu}{dy}-\frac{\mu-\nu}{m-n}\left(\frac{dm}{dx}+n\frac{dm}{dy}\right)\right]$

$-\frac{1}{m-n}\left[\frac{dv}{dx}+m\frac{dv}{dy}-\frac{\mu-\nu}{m-n}\left(\frac{dn}{dx}+m\frac{dn}{dy}\right)\right]$

und da hier die zwei in Klammern geschloßenen Trinome wegen $\frac{d\mu}{dx}=\frac{d\mu}{dm}\frac{dm}{dx}+\frac{d\mu}{dn}\frac{dn}{dx}$ u. s. w. mit den ersten Theilen der Gleichungen (9) und (10) identisch sind, so folgt $\frac{dq}{dx}-\frac{dp}{dy}=0$. Demgemäß haben wir schließlich

(12) $s=\int(pdx+qdy)=\int\left(\frac{m\nu-n\mu}{m-n}dx+\frac{\mu-\nu}{m-n}dy\right)$

Diese Gleichung also in Verbindung mit (7) liefert das gesuchte Integral von (3).

III) In unserm oben vorgelegten Falle ist nun

$$M=-\frac{2pq}{q^2+1}=m+n \qquad N=\frac{p^2+1}{q^2+1}=mn$$

Anstatt aber hieraus zunächst p und q durch m, n auszudrücken und dann erst $p+mq=\mu$, $p+nq=\nu$ als Functionen von m und n darzustellen, können wir die Rechnung dadurch abkürzen, daß wir direct $p+mq$, $p+nq$ bestimmen. Schreiben wir nämlich die beiden Gleichungen in folgender Form

$$(m+n)q^2+2pq+m+n=0$$
$$p^2-mnq^2-mn+1=0$$

so erhalten wir, wenn wir die erste einmal mit m, das andere Mal mit n multipliciren und das Produkt jedesmal zur zweiten hinzufügen, die neuen Gleichungen

$$(p^2+m^2q^2+2mpq)+m^2+1=0$$
$$(p^2+n^2q^2+2npq)+n^2+1=0$$

woraus sofort $p+mq=\pm\sqrt{1+m^2}\sqrt{-1}$, $p+nq=\mp\sqrt{1+n^2}\sqrt{-1}$ folgt. Man wird leicht finden, daß wenn man der ersten Wurzelgröße das Vorzeichen + ertheilt, die andere mit dem Vorzeichen (—) genommen werden muß, und umgekehrt. Denn da sich das Produkt der ersten Theile dieser beiden Gleichungen, nämlich

$$p^2+(m+n)pq+mnq^2$$

durch Substitution der Werthe von $(m+n)$ und mn auf den Ausdruck

$\frac{p^2+q^2}{q^2+1}$ reducirt, welcher positiv ist, so muß auch das Produkt der zweiten Theile der fraglichen Gleichungen einen positiven Werth erhalten. Wir können daher der folgenden Rechnung die Relationen

$$(13)\qquad \begin{aligned} p+mq &= +\sqrt{-1-m^2} = \sqrt{-1}\sqrt{1+m^2} = \mu \\ p+nq &= -\sqrt{-1-n^2} = -\sqrt{-1}\sqrt{1+n^2} = \nu \end{aligned}$$

zu Grunde legen, wobei wir im Sinn behalten, daß $\sqrt{-1}$ nach Belieben mit dem Vorzeichen + oder − genommen werden dürfe. Wegen

$$\partial_m\mu = -\frac{m}{\mu} \qquad \partial_n\mu = 0 \qquad \partial_m\nu = 0 \qquad \partial_n\nu = -\frac{n}{\nu}$$

reduciren sich jetzt die Gleichungen (9) und (10) auf

$$\left(\frac{m}{\mu}+\frac{\mu-\nu}{m-n}\right)(\partial_x m + n\partial_y m) = 0 \qquad \left(\frac{n}{\nu}+\frac{\mu-\nu}{m-n}\right)(\partial_x n + m\partial_y n) = 0$$

Hierin ist

$$\frac{m}{\mu}+\frac{\mu-\nu}{m-n} = \frac{m^2+\mu^2-mn-\mu\nu}{\mu(m-n)}, \qquad \frac{n}{\nu}+\frac{\mu-\nu}{m-n} = -\frac{n^2+\nu^2-mn-\mu\nu}{\nu(m-n)}$$

$$= -\frac{1+mn+\mu\nu}{\mu(m-n)} \qquad = \frac{1+mn+\mu\nu}{\nu(m-n)}$$

Die Größe $1+mn+\mu\nu$ kann aber nicht etwa gleich Null sein, weil in diesem Falle $(1+mn)^2 = \mu^2\nu^2 = 1+m^2+n^2+m^2n^2$, also

$$m^2+n^2-2mn = (m-n)^2 = (m+n)^2-4mn = 0$$

sein müßte, während doch

$$(m+n)^2-4mn = \frac{4p^2q^2}{(q^2+1)^2} - \frac{4(p^2+1)}{q^2+1} = -\frac{4(p^2+q^2+1)}{(q^2+1)^2}$$

also reell und von Null verschieden sein muß, wofern p und q reell sein sollen. Demnach haben wir für m und n das System der zwei Gleichungen

$$(14)\qquad \begin{aligned} \partial_x m + n\partial_y m &= 0 \\ \partial_x n + m\partial_y n &= 0 \end{aligned}$$

und zugleich ist ersichtlich geworden, daß m und n wegen $(m-n)^2 < 0$ zwar imaginär, aber nicht einander gleich sind. Wir werden diese Gleichungen (14) jetzt integriren. Da in der einen die Variable m, in der anderen die Variable n explicit vorkommt, während x und y weder in der einen noch in der anderen explicit vorhanden ist, so darf man hoffen sich die Integration dadurch zu erleichtern, daß man m und n selbst als die Independenten, dagegen x und y als gesuchte Functionen behandelt.

In dieſer Abſicht erinnern wir an gewiße Transformationsformeln. Wenn nämlich Z eine Function von x und y vorſtellt und $\frac{dZ}{dx} = P$, $\frac{dZ}{dy} = Q$ geſetzt worden iſt, und wenn man zwei neue Variable m, n als Independente einführen will, welche mit x und y durch noch näher feſtzuſetzende Relationen verbunden ſein ſollen, ſo hat man

$$(15) \qquad P = \frac{\partial_m Z\, \partial_n y - \partial_n Z\, \partial_m y}{\partial_m x\, \partial_n y - \partial_n x\, \partial_m y}, \quad Q = \frac{d_m Z\, \partial_n x - \partial_n Z\, \partial_m x}{\partial_m y\, \partial_n x - \partial_n y\, \partial_m x}$$

Denn man erhält den Werth von P dadurch, daß man unter der Vorausſetzung, daß y conſtant d. h. daß $dy = 0$ ſei, das Differential von Z durch das Differential von x dividirt. Es iſt alſo

der Dividendus ..... $\partial_m Z\, dm + \partial_n Z\, dn$

der Diviſor iſt ..... $\partial_m x\, dm + \partial_n x\, dn$

die Bedingung $dy = 0$ giebt aber $\partial_m y\, dm + \partial_n y\, dn = 0$

und indem man mittelſt dieſer Relation in dem Quotienten der beiden erſten Binome das eine der beiden Differentialien dm, dn durch das andere ausdrückt, ſo findet man ſofort den in (15) aufgeſtellten Werth von P. Die Vertauſchung von x und y liefert aber den Ausdruck für Q. Wenn wir nun die Formeln (15) für die Annahme $Z = m$ anwenden, wobei $\partial_m Z = 1$, $\partial_n Z = 0$ wird, und wenn wir zur Abkürzung

$$\partial_m x\, \partial_n y - \partial_n x\, \partial_m y = G$$

ſetzen, ſo erhalten wir $\partial_x m = \frac{\partial_n y}{G}$, $\partial_y m = -\frac{\partial_n x}{G}$. Für $Z = n$ ergiebt ſich ebenſo $\partial_x n = -\frac{\partial_m y}{G}$, $\partial_y n = \frac{\partial_m x}{G}$. Mittelſt dieſer Werthe verwandelt ſich das Syſtem (14) in

$$(16) \qquad \partial_n y - n\partial_n x = 0 \qquad \partial_m y - m\partial_m x = 0$$

Differentiirt man die erſte dieſer Gleichungen nach m, die andere nach n und ſubtrahirt dann, ſo entſteht

$$(m - n)\partial_{mn}^2 x = 0 \qquad \text{d. h.} \qquad \partial_{mn}^2 x = 0$$

alſo muß $\partial_m x$ frei von n, $\partial_n x$ frei von m ſein, d. h. es iſt

$$(17) \qquad x = \Phi(m) + \Psi(n)$$

wobei Φ, Ψ zwei willkührliche Functionen vorſtellen. Die Gleichungen (16) geben hiernach $\partial_m y = m\Phi'(m)$, $\partial_n y = n\Psi'(n)$ alſo

$$(18) \qquad y = \int m\Phi'(m)dm + \int n\Psi'(n)dn$$

Durch (17) und (18) wird das allgemeine Integral des Syſtems (14) angegeben.

Ferner ist nun, gemäß den bei (11) allgemein entwickelten Formeln

$$pdx = \frac{m\nu - n\mu}{m-n}dx = \frac{m\nu - n\mu}{m-n}(\Phi'(m)dm + \Psi'(n)dn)$$

$$qdy = \frac{\mu - \nu}{m-n}dy = \frac{\mu - \nu}{m-n}(m\Phi'(m)dm + n\Psi'(n)dn)$$

Hieraus folgt durch Addition

$$dz = \mu\Phi'(m)dm + \nu\Psi'(n)dn$$

und da für unsern speciellen Fall

$$\mu = \sqrt{1+m^2}\sqrt{-1} \qquad \nu = -\sqrt{1+n^2}\sqrt{-1}$$

bei (13) gefunden war, worin $\sqrt{-1}$ mit dem Vorzeichen + oder (—) genommen werden darf, während wir die anderen Wurzelgrößen als absolute Zahlen auffaßen; so haben wir endlich

(19) $$z = \sqrt{-1}\int \Phi'(m)\sqrt{1+m^2}\,dm - \sqrt{-1}\int \Psi'(n)\sqrt{1+n^2}\,dn$$

Man kann jedoch diese drei zusammengehörigen Gleichungen (17) (18) (19) noch in eine bequemere Gestalt bringen. Setzt man nämlich, unter u und v zwei von einander unabhängige Variable verstehend, $\Phi(m) = u$, $\Psi(n) = v$, so wird man im Stande sein, m durch u und n durch v auszudrücken, also etwa

$$\int m\Phi'(m)dm = \varphi(u) \qquad \int n\Psi'(n)dn = \psi(v)$$

zu machen, wo ebenso wie vorher Φ und Ψ willkührlich sein sollten, jetzt φ und ψ willkührliche Functionen bedeuten, und wobei wegen

$$m\Phi'(m)dm = \varphi'(u)du \qquad n\Psi'(n)dn = \psi'(v)dv$$

die Relationen $m = \varphi'(u)$ $\qquad$ $n = \psi'(v)$

Statt haben. Daher ist auch das einfachere System

(20)
$$x = u + v$$
$$y = \varphi(u) + \psi(v)$$
$$z = \sqrt{-1}\int \sqrt{1+\varphi'(u)^2}\,du - \sqrt{-1}\int \sqrt{1+\psi'(v)^2}\,dv$$

das allgemeine, mit zwei willkührlichen Functionen versehene Integral*) der vorgelegten Differentialgleichung (1).

IV) Es käme nun auf ein Verfahren an, um in speciellen Fällen, wenn Bedingungen über die Begränzung der gesuchten Fläche gegeben sind, die Form der beiden willkührlichen Functionen zu bestimmen. Allein die in dieser Richtung bis jetzt unternommenen Versuche haben nur innerhalb ziemlich beschränkter Voraussetzungen einigen Erfolg gehabt und

*) Zuerst von Monge auf anderm Wege entdeckt. S. Applications de l'Analyse (§. 20 der 4ten Ausg.) oder auch Lacroix Traité ect. T. II No. 774 (2de. éd.).

immer zu mühsamen Rechnungen geführt. — Das meiste Interesse bietet wohl der Fall dar, wenn zwei gerade Linien, die natürlich als nicht in einer Ebene liegend vorausgesetzt werden, gegeben sind, zwischen welchen die fragliche Fläche construirt werden soll. Die zwei Geraden mögen L_1 und L_2 heißen. Es läßt sich alsdann mittelst der bekannten Construction ein Paar Parallelebenen E_1, E_2 bestimmen, so daß L_1 in der Ebene E_1, L_2 in der Ebene E_2 liegt. Wenn man nun einerseits durch L_1, andererseits durch L_2 eine auf den beiden Parallelebenen senkrechte Ebene legt, so werden sich diese zwei neuen Ebenen in einer Geraden schneiden, die auf E_1 und E_2 perpendikulär steht und die wir zur Axe der X annehmen wollen. Diese Axe wird also von den Geraden L_1, L_2 geschnitten; die Ebenen E_1, E_2 aber sind parallel zur Ebene YZ, mithin sind, wenn wir die Neigungswinkel der Geraden L_1, L_2 gegen die Ebene XZ mit ϑ_1, ϑ_2 bezeichnen,

(21) $x = \alpha$, $y = s \operatorname{tang} \vartheta_1$ die Gleichungen der Geraden L_1

(22) $x = \xi$, $y = s \operatorname{tang} \vartheta_2$ " " " " L_2

Ueber die Lage der Ebene XZ setzen wir nichts Näheres fest, so wie wir auch dahin gestellt sein laßen, ob für die erste, nach y auszuführende Integration von $V dy dx$ die Gränzen β und η constant oder ob sie gegebene Functionen von x sein sollen. Die Frage, die wir zu beantworten suchen werden, lautet jetzt so: ist es möglich dadurch, daß man eine Gerade aus der ursprünglichen Lage L_1 auf irgend eine Weise, jedoch unter stäter Beobachtung des Parallelismus zur Ebene YZ, continuirlich in die Lage L_2 überführt, eine krumme Fläche zu erzeugen, welche in dem allgemeinen Integrale (20) einbegriffen ist? und wie muß man zu diesem Zwecke die beiden Functionen φ und ψ annehmen?

Die Gleichungen der beweglichen Geraden in irgend einer Lage zwischen L_1 und L_2 sind

$$x = \text{Const.} \qquad \text{und} \qquad s = Ay + B$$

Die Parameter A, B ändern sich darin nach irgend einem Gesetze mit dem Wachsen von x; daher muß die Gleichung der gesuchten Fläche sich auf die Form

$$(23) \qquad s = yF(x) + f(x)$$

bringen laßen.

Da den Gleichungen (13) gemäß

$$(m-n)p = -m\sqrt{1+n^2}\sqrt{-1} - n\sqrt{1+m^2}\sqrt{-1}$$
$$(m-n)q = \sqrt{1+m^2}\sqrt{-1} + \sqrt{1+n^2}\sqrt{-1}$$

ist, und da wir, um das Integral auf die Form (20) zu bringen, $m = \varphi'(u)$, $n = \psi'(v)$ gesetzt hatten, so ist

$$\frac{ds}{dy} = \frac{\sqrt{1+\varphi'(u)^2}\sqrt{-1} + \sqrt{1+\psi'(v)^2}\sqrt{-1}}{\varphi'(u) - \psi'(v)}$$

Man könnte der schon oben gemachten Erinnerung zu Folge statt $\sqrt{-1}$ auch $-\sqrt{-1}$ setzen; wird diese Aenderung in den folgenden Rechnungen überall vorgenommen, so bleiben die Resultate die nämlichen. — Aus (23) in Verbindung mit (20) folgt nun aber

$$\frac{ds}{dy} = F(x) = F(u+v)$$

daher muß erstens, in Rücksicht auf die Function F, die Bedingung

$$\text{(24)} \qquad \frac{1}{\sqrt{-1}} F(u+v) = \frac{\sqrt{(1+\varphi'^2)} + \sqrt{(1+\psi'^2)}}{\varphi' - \psi'}$$

erfüllt werden, wobei wir zur Abkürzung φ', ψ' anstatt $\varphi'(u)$, $\psi'(v)$ geschrieben haben. Und wenn man die rechte Seite dieser Gleichung das eine Mal nach u, das andere Mal nach v differentiirt und beide Ausdrücke, weil der nach u genommene Differentialquotient von $F(u+v)$ mit dem nach v genommenen identisch sein muß, einander gleich setzt, so erhält man nach Wegschaffung der Nenner

$$(\varphi'\varphi''\psi' + \varphi'' + (1+\varphi'^2)\psi'')\sqrt{1+\psi'^2}$$
$$+ (\psi'\psi''\varphi' + \psi'' + (1+\psi'^2)\varphi'')\sqrt{1+\varphi'^2} = 0$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist gleich dem Produkt

$$(\varphi'\psi' + 1 + \sqrt{1+\varphi'^2}\sqrt{1+\psi'^2})(\psi''\sqrt{1+\varphi'^2} + \varphi''\sqrt{1+\psi'^2})$$

folglich muß entweder

$$\text{(25)} \qquad \varphi'\psi' + 1 = -\sqrt{1+\varphi'^2}\sqrt{1+\psi'^2}$$

oder $$\text{(26)} \qquad \psi''(1+\varphi'^2)^{\frac{1}{2}} + \varphi''(1+\psi'^2)^{\frac{1}{2}} = 0$$

sein. Aus (25) ergiebt sich, sobald man quadrirt, sogleich die Bedingung $(\varphi' - \psi')^2 = 0$, also $\varphi' = \psi'$. Ueberlegt man nun, daß u und v wesentlich zwei von einander unabhängige Variable vorstellen, so wird die Gleichheit von $\varphi'(u)$ und $\psi'(v)$ als etwas unmögliches erscheinen, wenn nicht etwa beide Functionen sich auf eine Constante, $= a$, reduciren. Alsdann aber würde, da bei der Entwickelung von (20) die Functionen φ', ψ' an die Stelle der vorher benutzten Variablen m, n getreten sind, auch $m = n = a$ zu setzen sein; und diese Annahme ist unzulässig, weil nach dem in III) Bewiesenen, insofern p und q reelle Werthe erhalten sollen, die Differenz $(m - n)$ von Null verschieden ausfällt, wie denn

auch die Voraussetzung, daß m und n ungleich seien, der ganzen Rechnung zu Grunde liegt. Wenden wir uns daher zur Bedingungsgleichung (26), welche zu der Consequenz führt, daß

$$\frac{\varphi''}{(1+\varphi'^2)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{\psi''}{(1+\psi'^2)^{\frac{1}{2}}} = \text{Const.}$$

sein müße. Stellen wir diese Constante durch a vor, so liefert die Integration von

$$adu = \frac{\varphi''(u)du}{(1+\varphi'(u)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{d\varphi'}{(1+\varphi'^2)^{\frac{1}{2}}}$$

sofort die Gleichung $\varphi' + (1+\varphi'^2)^{\frac{1}{2}} = e^{a(u+h)}$ worin h eine willkührliche Constante bedeutet. Und hieraus fließt

$$\varphi' = +\tfrac{1}{2}\left(e^{a(u+h)} - e^{-a(u+h)}\right)$$
$$\sqrt{1+\varphi'^2} = +\tfrac{1}{2}\left(e^{a(u+h)} + e^{-a(u+h)}\right)$$

Ebenso findet man
$$\psi' = -\tfrac{1}{2}\left(e^{a(v+k)} - e^{-a(v+k)}\right)$$
$$\sqrt{1+\psi'^2} = +\tfrac{1}{2}\left(e^{a(v+k)} + e^{-a(v+k)}\right)$$

und ohne Mühe wird man daraus herleiten $\int \sqrt{(1+\varphi'^2)}du = \frac{1}{a}\varphi'$, desgleichen $\int \sqrt{(1+\psi'^2)}dv = -\frac{1}{a}\psi'$, also vermöge der letzten Gleichung in (20)

$$s - \gamma = \frac{\sqrt{-1}}{a}(\varphi' + \psi')$$

Da nun die Summe von φ' und ψ', welche gleichwerthig mit dem frühern $m+n = -\frac{2pq}{q^2+1}$ ist, reell ausfallen soll (während die Differenz $\varphi' - \psi'$ der schon in III) gemachten Bemerkung zufolge eine imaginäre Größe von der Form $C\sqrt{-1}$ sein wird) so sind wir genöthigt, damit $s-\gamma$ reell werde, der unbestimmten Constanten a einen imaginären Werth von der Form $C\sqrt{-1}$ zu ertheilen, wofür wir jedoch $\frac{1}{a}\sqrt{-1}$ setzen wollen. Dann ist

$$(27) \qquad s - \gamma = a(\varphi' + \psi')$$

Bei dieser Beschaffenheit von a verwandeln sich aber die obigen Formeln für φ', ψ' ꝛc., zu Folge den bekannten Exponentialausdrücken für den Sinus und Cosinus, in

$$\varphi' = \operatorname{Sin}\frac{u+h}{a}\sqrt{-1} \qquad \psi' = -\operatorname{Sin}\frac{v+k}{a}\sqrt{-1}$$

$$\sqrt{1+\varphi'^2} = \operatorname{Cos}\frac{u+h}{a} \qquad \sqrt{1+\psi'^2} = \operatorname{Cos}\frac{v+k}{a}$$

worin a reell ist, während u und v complexe Functionen von x und y sein mögen, wenn man diese letztern als die Independenten auffaßt. Die Gleichung (24) wird demnach

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}F(u+v) = \frac{\operatorname{Cos}\frac{u+h}{a} + \operatorname{Cos}\frac{v+k}{a}}{\operatorname{Sin}\frac{u+h}{a} + \operatorname{Sin}\frac{v+k}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{-1}}$$

d. h. $$F(u+v) = \operatorname{Cotg}\frac{u+v+h+k}{2a}$$

Indem wir jetzt zu der Gl. (23) zurückkehren, erhalten wir, mit Benutzung von (27), rücksichtlich der anderen noch unbestimmten Function f die Bedingung

$$f(u+v) = z - yF(u+v)$$
$$= \gamma + a(\varphi' + \psi') - (\varphi + \psi)F(u+v)$$

Nun ist $$\varphi' + \psi' = \left(\operatorname{Sin}\frac{u+h}{a} - \operatorname{Sin}\frac{v+k}{a}\right)\sqrt{-1}$$

$$\varphi + \psi = -a\left(\operatorname{Cos}\frac{u+h}{a} - \operatorname{Cos}\frac{v+k}{a}\right)\sqrt{-1} + C$$

wofür man auch

$$\varphi' + \psi' = 2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\left(\frac{u+h}{a} - \frac{v+k}{a}\right)\operatorname{Cos}\frac{u+v+h+k}{2a}\sqrt{-1}$$

$$\varphi + \psi = 2a\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}\left(\frac{u+h}{a} - \frac{v+k}{a}\right)\operatorname{Sin}\frac{u+v+h+k}{2a}\sqrt{-1} + C$$

setzen kann. Aus diesen letzten Formeln folgt aber, sobald man die Identität

$$\operatorname{Sin}\frac{u+v+h+k}{2a} \cdot \operatorname{Cotg}\frac{u+v+h+k}{2a} = \operatorname{Cos}\frac{u+v+h+k}{2a}$$

berücksichtigt, auf der Stelle

$$a(\varphi' + \psi') - (\varphi + \psi)F(u+v) = -CF(u+v)$$

Daher ist $$f(x) = \gamma - CF(x)$$

Nach diesen Bestimmungen von F und f erhält Gl. (23) die Gestalt

$$(28) \qquad z - \gamma = (y - C)\operatorname{Cotg}\frac{x-c}{2a}$$

wobei wir $h + k = -c$ gesetzt haben.

Es kommt nun noch darauf an, die Constanten a, c, γ, C so zu bestimmen, daß die Fläche durch die zwei gegebenen Geraden (21) und (22) hindurchgeht. Setzen wir daher zuerst $x = \alpha$, dann $x = \xi$, so muß sein

$$s \operatorname{tg} \vartheta_1 - C = (s - \gamma) \operatorname{tg} \frac{\alpha - c}{2a}, \qquad s \operatorname{tg} \vartheta_2 - C = (s - \gamma) \operatorname{tg} \frac{\xi - c}{2a}$$

oder wenn beide Gleichungen von einander subtrahirt werden,

$$s(\operatorname{tg} \vartheta_1 - \operatorname{tg} \vartheta_2) = (s - \gamma)\left(\operatorname{tang} \frac{\alpha - c}{2a} - \operatorname{tang} \frac{\xi - c}{2a}\right)$$

woraus, weil s willkührlich ist, nach dem Satze von den unbestimmten Coefficienten $\gamma = 0$ folgt. Allein demselben Satze gemäß muß, wenn γ in den unmittelbar vorhergehenden zwei Gleichungen verschwindet, auch $C = 0$ sein. Hiernach kann man der Gl. (28) die Gestalt geben

$$x - c = 2a \operatorname{Arc\,tang} \frac{y}{s}$$

und indem man aus den Bedingungen $\alpha - c = 2a\vartheta_1$, $\xi - c = 2a\vartheta_2$ die Werthe von c und α bestimmt, hat man schließlich

$$(29) \qquad x - \frac{\alpha\vartheta_2 - \xi\vartheta_1}{\vartheta_2 - \vartheta_1} = \frac{\xi - \alpha}{\vartheta_2 - \vartheta_1} \operatorname{Arc\,tang} \frac{y}{s}$$

Man ersieht hieraus, daß die vorgelegte Aufgabe durch eine gemeine Schraubenfläche aufgelöst wird, deren Axe in die Axe der X fällt, deren Erzeugungslinie also fortwährend parallel zur Ebene YZ bleibt. Denn die Gleichung einer solchen Schraubenfläche ist, wenn h die Höhe eines Schraubengangs angiebt, bekanntlich

$$x - c = \frac{h}{2\pi} \operatorname{Arc\,tang} \frac{y}{s}$$

und wenn man darin das eine Mal die zusammengehörigen Werthe $x = \alpha$ und $\operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{s} = \vartheta_1$, das andere Mal $x = \xi$ und $\operatorname{Arc\,tg} \frac{y}{s} = \vartheta_2$ setzt, so ergiebt sich bei der Subtraction

$$\xi - \alpha = \frac{h}{2\pi}(\vartheta_2 - \vartheta_1) \qquad \text{also} \qquad \frac{h}{2\pi} = \frac{\xi - \alpha}{\vartheta_2 - \vartheta_1}$$

was mit (29) übereinstimmt. Der Divisor $\vartheta_2 - \vartheta_1$ ist offenbar der Neigungsw. der zwei gegebenen Geraden gegen einander; $\xi - \alpha$ giebt den kleinsten Abstand zwischen denselben an.

Wenn nun die beiden Gränzebenen $x = \alpha$, $x = \xi$ von einem zweiten Paare gegebener Gränzebenen $y = \beta$, $y = \eta$ oder von sonst zwei

Gränzflächen z. B. zwei Cylinderflächen $y = \beta_x = \chi_1(x)$, $y = \eta_x = \chi_2(x)$ durchschnitten werden, so entsteht auf der Schraubenfläche ein von zwei Geraden AC, BD und zwei Curven AB, CD umschloßenes Viereck ABDC; und wenn man, damit die Gränzgleichungen (Gl. (3) §. 74) von selbst befriedigt werden, die Vergleichung auf diejenigen Nachbarflächen beschränkt, welche durch eben denselben Perimeter ABDC gehen, so kann man behaupten, daß die gefundene Fläche den möglich kleinsten Inhalt besitze. Man wird sehr leicht, indem man s, p, q, r, s, t aus (28) berechnet (wobei $t = 0$ gefunden wird) sich davon überzeugen, daß der Gleichung (1) wirklich Genüge geschieht. Uebrigens läßt sich auch beweisen, daß es außer der Ebene und der gemeinen Schraubenfläche keine andere Regelfläche (d. h. keine durch die Bewegung einer geraden Linie zu erzeugende Fläche) giebt, welche jener Gl. (1) Genüge leistete.*)

§. 77.

Die im Vorhergehenden aufgelösten Aufgaben, vergleichbar den im dritten Capitel behandelten, verlangten die Bestimmung eines absoluten Maximum oder Minimum von $\mathrm{U} = \int\int \mathrm{V} dx dy$. Man würde dagegen eine Aufgabe über relatives Maximum oder Minimum vor sich haben, wenn nach der kleinsten Fläche unter allen denjenigen gefragt würde, bei denen das Volumen $\int\int s dx dy$ einerlei Werth $= \mathfrak{A}$ besitzt; — oder auch umgekehrt (Vgl. §. 53), wenn die Fläche zu ermitteln ist, welche dem Körper $\int\int s dx dy$ den möglichst großen Inhalt verschafft, während die entsprechende Oberfläche selbst, nämlich das Integral $\int\int \sqrt{(p^2 + q^2 + 1)} dx dy$ für alle in Vergleichung zu ziehenden Nachbarflächen einerlei Werth $\mathfrak{A}$ besitzen soll.

Aus den am Anfange vom vierten Capitel auseinander gesetzten Gründen haben wir bei dieser Aufgabe, indem wir

$$\mathrm{U} = \int\int \mathrm{V} dx dy = \int\int \sqrt{(p^2 + q^2 + 1)} dx dy$$
$$\mathfrak{A} = \int\int \mathrm{W} dx dy = \int\int s dx dy$$

setzen, auf die Bestimmung eines absoluten Minimums der Summe

$$\mathfrak{U} = \int\int (\mathrm{V} + \lambda \mathrm{W}) dx dy = \int\int (\sqrt{(p^2 + q^2 + 1)} + \lambda s) dx dy$$

auszugehen. Mit Zuziehung der schon am Anfange des vor. §. benutzten

*) Man kann darüber nachsehen Liouville's Journ. T. VII (1842) p. 203 (Catalan). T. XI (1846) p. 300 (Roberts) und p. 451 (Serret).

Ausdrücke für $\frac{d\partial_p V}{dx}$, $\frac{d\partial_q V}{dy}$ finden wir daher die Hauptgleichung

(1) $\lambda(p^2+q^2+1)^{\frac{1}{2}} = (q^2+1)r - 2pqs + (p^2+1)t$

Hält man dieselbe mit Gl. (2) des vor. §. zusammen, so ersieht man sogleich, daß der dort vorkommende Coefficient von $\frac{1}{R}$ gegenwärtig den constanten Werth λ erhält, woraus folgt, daß die Summe der beiden Wurzeln jener quadratischen Gleichung, nämlich $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$, gleich $-\lambda$ ist. Die gesuchte Fläche besitzt also die charakteristische Eigenschaft, daß *in allen ihren Punkten die mittlere Krümmung gleich groß ist*. Aus diesem Grunde genügt denn auch der Aufgabe sowohl die *Kugelfläche* als die Fläche eines *gemeinen Cylinders*, wovon man sich auch direct, indem man die partiellen Differentialquotienten p, q, r, s, t aus den Gleichungen der genannten Flächen entwickelt und in (1) einsetzt, ohne Mühe überzeugen kann. Es ist jedoch leicht, überhaupt die Gleichung derjenigen *Rotationsflächen* zu finden, welchen die Eigenschaft, daß die mittlere Krümmung constant $= -\lambda$ sei, zukommt. Denn man denke sich, nachdem man auf der fraglichen Fläche einen Punkt M beliebig angenommen und an den durch M laufenden Parallelkreis die Tangente gezogen hat, durch diese Gerade und die Normale der Fläche eine Ebene gelegt, von welcher die Axe im Punkte N geschnitten werden möge. Alsdann ist N der Krümmungsmittelpunkt des so entstandenen Normalschnitts; denn wenn Q den Mittelpunkt des Parallelkreises bezeichnet, so muß (nach dem bekannten *Meunier*'schen Lehrsatze über Schnittcurven mit gemeinschaftlicher Tangente) der verlangte Krümmungshalbmeßer gleich MQ.Sec NMQ sein, was mit MN einerlei ist. Stellen wir daher dieses Stück der Normallinie durch N, den Krümmungshalbmeßer der Meridiancurve aber durch R vor, so haben wir die Bedingungsgleichung

$$\frac{1}{N}+\frac{1}{R} = \text{Const.} = -\lambda$$

Nehmen wir die Rotationsaxe zur Axe der X, und dx constant, so ist nach bekannten Formeln

$$N = y\frac{ds}{dx} \qquad R = -\frac{ds^3}{dx\,d^2y} = -\frac{dy}{dx}\frac{ds^2}{d^2s}$$

Wir haben dem ersten Ausdrucke für R hier das bestimmte Vorzeichen

(—) vorgeschrieben, weil wir, $\frac{dx}{ds}$ als positive Größe ansehend, für die Krümmung des Parallelkreises, nämlich $\frac{1}{N}$, einen positiven Werth erhalten, und weil also in der Summe $\frac{1}{N}+\frac{1}{R}$ der zweite Summand einen negativen oder positiven Werth erhalten muß, je nachdem die Meridiancurve convex oder concav gegen die Rotationsaxe liegt. Es besteht daher die Gleichung $\frac{dx}{yds}-\frac{dxd^2s}{dyds^2}=-\lambda$ oder wenn man mit ydy multiplicirt,

$$\frac{dx}{ds}dy-y\frac{dxd^2s}{ds^2}+\lambda ydy=0$$

d. h.

$$ydy+\frac{1}{\lambda}d.\frac{ydx}{ds}=0$$

Das Integral hiervon läßt sich ohne Weiteres hinschreiben und wird, nach Vertauschung von λ mit $\frac{1}{\lambda}$, identisch mit der Gl. (2) des §. 53, wie es sein muß, weil unter der speciellen Voraussetzung einer Rotationsfläche unsere gegenwärtige Aufgabe mit der dort behandelten übereinstimmt. —

Das allgemeine Integral der obigen Gleichung (1) kennt man nicht.

§. 78.

Der in §. 73 gegebenen Entwickelung von $\delta U=\delta\int\int V dxdy$ hat die Annahme zu Grunde gelegen, daß die Gränzen sowohl für die erste nach y auszuführende, als für die dann folgende Integration nach x gegeben seien, mochten nun die Gränzen β und η constant oder Functionen von x sein. Wenn dagegen, indem man U in den Zustand des Variirens versetzt, auch die genannten Größen variiren sollen, so daß außer der Beschaffenheit von $z=f(x, y)$ zugleich die zum Maximum oder Minimum von U tauglichsten Integrationsgränzen ausgemittelt werden sollen, dann bedarf die entwickelte Formel einer gewißen Modifikation.

Ziehen wir zuvörderst den Fall in Betracht, daß β und η zwar gesucht aber doch in Beziehung auf x constant sein sollen, so daß der von den Gränzcoordinaten $y=\beta$, $y=\eta$, $x=\alpha$, $x=\xi$ eingeschloßene Theil der Ebene XY ein Rechteck wird. Alsdann kann man durch eine

leichte Betrachtung, die wir im analogen Falle über die einfachen Integrale früher (§. 58 I) erklärt haben, sich sofort überzeugen, daß zu dem Ausdrucke für δU, welcher unter der Voraussetzung von nicht variirenden Gränzen η, β, ξ, α entwickelt worden ist, d. h. zu $\int\int_{(\delta)} V dx dy$ noch folgende Bestandtheile

$$\int_\beta^\eta V_{\xi,\eta} dy.\delta\xi - \int_\beta^\eta V_{\alpha,\eta} dy.\delta\alpha + \int_\alpha^\xi V_{x,\eta} dx.\delta\eta - \int_\alpha^\xi V_{x,\beta} dx.\delta\beta \tag{1}$$

hinzukommen. Man braucht nur, um dieses deutlich einzusehen, die beiden Integrale U und $U + \delta U$ sich geometrisch, nämlich als die Volumina der (prismatoidischen) Körper zu veranschaulichen, von denen der eine das Rechteck $(\xi - \alpha)(\eta - \beta)$, der andere das Rechteck

$$((\xi - \alpha) + \delta\xi - \delta\alpha)((\eta - \beta) + \delta\eta - \delta\beta)$$

zur Basis hat, während $V_{x,y}$ die zugehörige Höhe in jedem Punkte x, y ist. Die Differenz zwischen den genannten zwei Rechtecken besteht aus vier unendlich schmalen Streifen; und die vier Integrale bei (1) geben nach der Reihe diejenigen Bestandtheile von δU an, deren Grundfläche von jenen vier Streifen gebildet wird.

Schwieriger wird hingegen die Untersuchung, erhält aber im Hinblick auf die möglichen Anwendungen auch größere Wichtigkeit, wenn wir β und η variirende Functionen von x bedeuten laßen, während gleichzeitig α, ξ als variirende Gränzen zu behandeln sind. Diese Umstände treten z. B. dann ein, wenn der Perimeter des gesuchten Flächenstücks auf einer gegebenen Fläche $\Theta(x, y, z) = 0$ liegen, folglich als Durchschnitt der gesuchten Fläche mit der Fläche $\Theta = 0$ gedacht werden soll, oder wenn er aus den Durchschnittslinien der gesuchten Fläche mit mehreren gegebenen Flächen gebildet werden soll, übrigens als eine geschloßene Figur vorausgesetzt wird, so daß die Integrationsgränzen endliche Größen bleiben. Unter diesem Gesichtspunkt ist die Variation des Doppelintegrals $\int\int V dx dy$ zuerst von Poisson*) und Ostrogradsky**) näher betrachtet worden. Wir werden versuchen das Wesentlichste hierüber in dem folgenden Paragraphen auseinanderzusetzen.

*) Mémoires de l'Acad. des Sciences de l'Institut de France. T. XII (1833).

**) Mémoires de l'Acad. de St.-Pétersbourg, VI Série, Sc. math. phys. et nat. T. III 1re partie (1838).

§. 79.

I) Der geänderte Werth von $U = \int_a^{\xi}\int_{\beta}^{\eta} V dy dx$ ist auf die im vor. §. angedeutete Weise dadurch zu finden, daß wir, während zur Construction von U in jedem Punkte x, y die Größe V senkrecht auf die Ebene XY aufgetragen wurde, jetzt in dem jedesmal entsprechenden Punkte $X = x + \delta x$, $Y = y + \delta y$ die Ordinate $V + \delta V$ errichten und die Summe aller der prismatischen Körper nehmen, deren Grundflächen von den Rechtecken $dX.dY$ gebildet werden, und deren Höhen $V + \delta V$ sind. Wir haben demnach

$$U + \delta U = \int_{\alpha+\delta\alpha}^{\xi+\delta\xi}\int_{\beta+\delta\beta}^{\eta+\delta\eta} (V + \delta V) dY dX$$

wobei wir für einen Augenblick $V + \delta V$ als Function von X und Y denken. Dieses Integral können wir jedoch so transformiren, daß wir statt X und Y die Variablen x und y als Indepentente einführen, welche mit X und Y durch die Relationen

$$(1) \qquad X = x + \delta x \qquad Y = y + \delta y$$

verbunden sind. Den für dY einzusetzenden Werth erhalten wir nach der bekannten Regel*) dadurch, daß wir die Gleichung

$$dY = dy + d\delta y = (1 + \frac{d\delta y}{dy}) dy + \frac{d\delta y}{dx} dx$$

mit

$$0 = dx + d\delta x = (1 + \frac{d\delta x}{dx}) dx + \frac{d\delta x}{dy} dy$$

verbinden. Dadurch entsteht, indem dx eliminirt wird,

$$dY = \frac{(1 + \frac{d\delta x}{dx})(1 + \frac{d\delta y}{dy}) - \frac{d\delta x}{dy}\frac{d\delta y}{dx}}{1 + \frac{d\delta x}{dx}} dy$$

Den für dX zu setzenden Ausdruck dagegen finden wir, wenn wir bei der Differentiation von $x + \delta x$ den Werth von y constant sein laßen, d. h. aus der Verbindung von

$$dy = 0 \qquad \text{und} \qquad dX = dx + \frac{d\delta x}{dx} dx + \frac{d\delta x}{dy} dy$$

also

$$dX = (1 + \frac{d\delta x}{dx}) dx$$

*) Moigno Leç. T. II p. 215. Schlömilch Hdbch. d. Integr.-R. p. 158.

Demnach ist

$$dYdX = \Big[(1+\frac{d\delta x}{dx})(1+\frac{d\delta y}{dy}) - \frac{d\delta x}{dy}\frac{d\delta y}{dx}\Big]dydx$$

oder nach Weglaßung der Unendlich-kleinen zweiter Ordnung,

$$dYdX = \Big(1+\frac{d\delta x}{dx}+\frac{d\delta y}{dy}\Big)dydx$$

Ferner sind vermöge (1) die Integrationsgränzen für y jetzt β und η, die Gränzen für x aber α und ξ (vgl. §. 58 II); daher

$$\dot{\mathrm{U}} + \delta\mathrm{U} = \int_\alpha^\xi\int_\beta^\eta (\mathrm{V}+\delta\mathrm{V})\Big(1+\frac{d\delta x}{dx}+\frac{d\delta y}{dy}\Big)dydx$$

Wird hiervon U selbst abgezogen, so kommt

$$\delta\mathrm{U} = \int_\alpha^\xi\int_\beta^\eta (\delta\mathrm{V} + \mathrm{V}\frac{d\delta x}{dx} + \mathrm{V}\frac{d\delta y}{dy})dydx$$

Nach unserer Formel (9) in §. 70 ist aber

$$\delta\mathrm{V} = \frac{d\mathrm{V}}{dx}\delta x + \frac{d\mathrm{V}}{dy}\delta y + (\delta)\mathrm{V}$$

und da $\frac{d\mathrm{V}}{dx}\delta x + \mathrm{V}\frac{d\delta x}{dx} = \frac{d.\mathrm{V}\delta x}{dx}$, $\frac{d\mathrm{V}}{dy}\delta y + \mathrm{V}\frac{d\delta y}{dy} = \frac{d.\mathrm{V}\delta y}{dy}$ ist, so haben wir

$$(2).\qquad \delta\mathrm{U} = \iint\Big(\frac{d.\mathrm{V}\delta x}{dx}+\frac{d.\mathrm{V}\delta y}{dy}\Big)dydx + \iint(\delta)\mathrm{V}dydx$$

Für das letzte Glied, welches die reine Variation $(\delta)\mathrm{U}$ bedeutet, wird man den in §. 73 entwickelten Ausdruck (7) oder (10) zu setzen haben, indem man nur statt δ das Zeichen (δ) schreibt. Andererseits ist

$$\iint\frac{d.\mathrm{V}\delta y}{dy}dydx = \int\mathrm{V}\delta ydx \qquad \iint\frac{d.\mathrm{V}\delta x}{dx}dxdy = \int\mathrm{V}\delta xdy$$

vorbehaltlich daß man in den rechten Theilen dieser zwei Gleichungen

unter $\mathrm{V}\delta y$ die Differenz $[\mathrm{V}\delta y]_\eta - [\mathrm{V}\delta y]_\beta$

unter $\mathrm{V}\delta x$ " " $[\mathrm{V}\delta x]_\xi - [\mathrm{V}\delta x]_\alpha$

versteht, und das erste Mal η, β als Functionen von x, das andere Mal gerade umgekehrt ξ, α als Functionen von y denkt. Demnach wird definitiv

$$\delta\mathrm{U} = \int_\alpha^\xi(\mathrm{V}_\eta\delta\eta - \mathrm{V}_\beta\delta\beta)dx + \int_\beta^\eta(\mathrm{V}_\xi\delta\xi - \mathrm{V}_\alpha\delta\alpha)dy$$

$$(3)\qquad + \int_\alpha^\xi\int_\beta^\eta(\delta)\mathrm{V}dydx$$

II) Rücksichtlich der Bedeutung der Gränzen η, β so wie der Gränzvariationen $\delta\eta$, $\delta\beta$ in dem ersten, und von ξ, α, $\delta\xi$, $\delta\alpha$ im zweiten der vorstehenden Integrale dürfte eine geometrische Veranschaulichung nützliche Dienste leisten. Es sei EFGH (Fig. 22) die Projection des Perimeters des in Betracht kommenden Stücks der verlangten Maximums- oder Minimumsfläche, und $E_1F_1G_1H_1$ die Projection einer nächstanliegenden Curve, worin der erstgedachte Perimeter bei dem Variiren von U übergeht. Aus der Gleichung der Curve EFGH wird man dann für jedes x die zugehörigen Ordinaten zu bestimmen haben. Wenn z. B. das im Endpunkte einer beliebig angenommenen Abscisse $OP = x$ auf die Axe der X errichtete Perpendikel den Perimeter in zwei Punkten E, G schneidet, so können wir uns $PE = \chi_1(x)$, $PG = \chi_2(x)$ denken. Alsdann sind unter dem ersten Integralzeichen in (3) für β und η die Gränzwerthe $\beta = \chi_1(x)$, $\eta = \chi_2(x)$ einzusetzen. Träfe es sich, daß die Gerade PEG den Perimeter EFGH nicht in zwei, sondern in vier Punkten durchschnitte, so würde man etwa $\beta = \chi_1(x)$, $\eta_1 = \chi_2(x)$, $\eta_2 = \chi_3(x)$, $\eta_3 = \chi_4(x)$ erhalten, und dem ersten Integrale in (3) würde natürlich die Gestalt

$$\int_\alpha^\xi ([V_\eta\delta\eta]_3 - [V_\eta\delta\eta]_2 + [V_\eta\delta\eta]_1 - V_\beta\delta\beta)dx$$

zukommen, wobei die Ziffern 3, 2, 1 als Indices an η anzuhängen sind.

Man kann jedoch auch umgekehrt, nachdem man $OQ = y$ beliebig angenommen und QHF parallel zur Axe der X gezogen hat, die Coordinaten QH, QF als Functionen von y suchen, etwa

$$QH = f_1(y) \qquad QF = f_2(y)$$

und diese Ausdrücke $f_1(y)$, $f_2(y)$ sind es, die man unter dem zweiten Integralzeichen in (3) für α und ξ zu setzen hat, bevor man zu der angezeigten Integration nach y schreiten kann.

Ferner müßen aber unter dem ersten Integralzeichen in (3) auch die Größen $\delta\eta$, $\delta\beta$, abgesehen von dem an ihnen haftenden Factor dt, als Functionen von x, und $\delta\xi$, $\delta\alpha$ unter dem zweiten Integralzeichen als Functionen von y angesehen werden, weil wir sowohl δx wie δy als eine Function der beiden Independenten x und y auffaßen (§. 70 I). Man denke z. B. daß den Punkten E und G der fraglichen Gränzcurve die Punkte E_1 und G_1 auf der variirenden Nachbarcurve entsprächen, so würde offenbar

$$-Ee = \delta\beta \qquad Gg = \delta\eta$$

sein; und es wird nicht allein bei dem Durchlaufen der Sehne EG unter

der Annahme $dy = \text{Const.}$ zu jedem andern Punkte ein anderer Werth von δy gehören, indem der geometrische Ort derjenigen Punkte, welche den Punkten der Sehne EG entsprechen, etwa die durch die punktirte Curve E_1G_1 angedeutete Gestalt haben könnte, sondern es werden auch bei dem Fortschreiten von den Punkten E, G zu den auf der Curve nächst anliegenden Punkten, während also x um das constante Differential dx successiv wächst, die Variationen $\delta\beta$, $\delta\eta$ sich continuirlich ändern. Das Analoge gilt von den unter dem zweiten Integralzeichen vorkommenden Variationen $\delta\alpha$, $\delta\xi$, welche in Beziehung auf $QH = \alpha = f_1(y)$ und $QF = \xi = f_2(y)$ durch Hh, Ff zur Anschauung gebracht werden, während die punktirte Curve H_1F_1 vielleicht die der Sehne HF entsprechende Linie ist.

Dieselben Betrachtungen über die Variationen δy, δx, $\delta\beta$, $\delta\eta$ ꝛc. greifen sogar dann Platz, wenn die in der Ebene XY liegende Projection der Gränzcurve gar nicht variirt, während die Gränzcurve selbst im Raume als variirend gedacht wird, wenn diese letztere also auf einer gegebenen Cylinderfläche liegen soll, deren Erzeugungslinien parallel zur Axe der Z laufen und deren Basis EFGH ist. Denn in diesem Falle kann man sich etwa ε und γ als die entsprechenden Punkte von E und G denken; und es sind δx, δy variabel, gleichviel ob man bei der in (2) angezeigten doppelten Integration zuerst x constant setzt und die Variable y das zwischen den bewußten Gränzen liegende Intervall durchlaufen läßt, oder ob man in umgekehrter Ordnung operirt. Die Beschränkung findet jetzt nur Statt, daß die Variationen der Coordinaten eines jeden Punkts der Curve EFGH an die aus der Differentialgleichung dieser Curve zu entnehmende Relation gebunden sind.

III) Sobald man nun an irgend einem der Doppel-Integrale, deren Summe den ursprünglichen Ausdruck für δU bildet, die erste Integration, sei es nach x oder nach y, ausgeführt und gemäß der oben erklärten Vorschrift die Gränzwerthe eingesetzt hat, so findet man die Gränzen für die übrig bleibende zweite Integration mittelst der folgenden Betrachtung. Stellen wir durch $\int\int K dx dy$ den betreffenden Bestandtheil von δU, und durch $\Gamma(x, y) = 0$ die Gleichung der Curve EFGH vor, welche nach y aufgelöst die oben vorausgesetzte Form $y = \chi(x)$ und nach x aufgelöst die Form $x = f(y)$ erhielte; so besteht die Differentialgleichung

$$(4.\alpha) \qquad \partial_x\Gamma + \partial_y\Gamma\frac{dy}{dx} = 0$$

oder auch $$(4.\beta) \qquad \partial_y\Gamma + \partial_x\Gamma\frac{dx}{dy} = 0$$

Hat man nun bei der ersten Integration $y = OQ$ als constant behandelt und in Beziehung auf die Variable x zwischen den Gränzen $QH = f_1(y)$ bis $QF = f_2(y)$ integrirt, und ist dadurch $\int\int K dx dy$ in $\int H dy$ übergegangen, wobei H blos als Function von y gedacht wird; so werden die Gränzwerthe für die nach y auszuführende Integration durch die kleinste und größte Ordinate der Curve EFGH angegeben. Für diese Punkte muß der in (4.α) vorkommende Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ gleich Null werden, folglich $\partial_x \Gamma = 0$ sein. Hieraus in Verbindung mit $\Gamma = 0$ sind die Coordinaten der fraglichen Punkte zu bestimmen. Durch Elimination von x aus dem Systeme der Gleichungen

$$\Gamma(x, y) = 0 \qquad \partial_x \Gamma(x, y) = 0$$

erhält man also eine Gleichung, deren Wurzeln die gesuchten Gränzwerthe von y angeben.

Ebenso findet man, wenn man die erste Integration nach y ausgeführt hat, die Bestimmungsgleichung für die Gränzen der zweiten Integration dadurch, daß man aus $\Gamma = 0$, $\partial_y \Gamma = 0$ die Variable y eliminirt.

IV) In Betreff eben jener in der Formel (3) aufgeführten, so wie der aus $\int\int (\delta) V dx dy$ noch entspringenden einfachen Integrale, welche zusammengenommen mit dem Doppelintegrale $\int\int W_{(\delta)z} dx dy$ den Werth von δU ausmachen (§. 73 Gl. (7)), verdient jedoch, immer unter der Voraussetzung, daß die Projection des in Untersuchung stehenden Flächenstücks eine geschloßene Curve EFGH sein soll, noch eine weitere Transformation alle Aufmerksamkeit. Schreiten wir in der Sehne, indem wir $x = OP$ beliebig aber constant annehmen, dagegen y continuirlich wachsen laßen, vom Anfangspunkt E zum Endpunkte G fort, so wird, weil der Werth von $\Gamma(x, y)$ hierbei successiv die Incremente $\partial_y \Gamma dy$ erhält und weil für den Anfangswerth $y = PE$, so wie schließlich wieder am Endpunkt G der Werth von Γ gleich Null ist, der Ausdruck $\partial_y \Gamma$ anfangs entweder positiv oder negativ sein, so daß Γ positive oder negative Werthe erhält, allein bei dem weitern Wachsen von y wird $\partial_y \Gamma$ das Vorzeichen wechseln, während Γ zu Folge der Voraussetzung, daß zwischen $y = PE$ und $y = PG$ keine Wurzel der Gleichung $\Gamma = 0$ liege, das seinige nicht ändert. Wäre z. B. die Curve EFGH ein Kreis

$$(5) \qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = 0$$

so hätte man $\partial_y \Gamma = 2(y - b)$. Die Mittelpunktscoordinate b ist nun größer als $y = PE$, also erhält $\partial_y \Gamma$ am Punkte E einen negativen

Werth, bei $y = b$ tritt der Wechsel im Vorzeichen ein, und für $y = \mathrm{PG}$ ist $\partial_y \Gamma$ positiv. Da ferner

$$(b - y)^2 < (b - \mathrm{PE})^2 \quad \text{für} \quad \mathrm{PE} < y < b$$

und

$$(y - b)^2 < (\mathrm{PG} - b)^2 \quad \text{für} \quad b < y < \mathrm{PG}$$

ist, so erhält offenbar für alle zwischen PE und PG liegenden Werthe von y der linke Theil der Gl. (5) negative Werthe.

Gerade umgekehrt würde es sich freilich verhalten, wenn man die Gleichung jenes Kreises in der Form

$$c^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2 = 0$$

anschreiben wollte, weil dann sowohl vor $\partial_y \Gamma$ als vor Γ das entgegengesetzte Vorzeichen zu stehen kommt. Da wir aber die Gleichung $\Gamma(x, y) = 0$ in jedem Falle mit dem Factor (-1) multipliciren können, so ist es uns erlaubt im Folgenden die bestimmte Voraussetzung zu Grunde zu legen, daß Γ während des ganzen Intervalls $y = \mathrm{PE}$ bis $y = \mathrm{PG}$ einen negativen Werth behalte, und daß dem entsprechend die Function $\partial_y \Gamma$ für $y = \mathrm{PE}$ negativ sei, alsdann bei dem Zunehmen von y einmal, oder auch dreimal u. s. w. ihr Vorzeichen ändere, und schließlich für $y = \mathrm{PG}$ einen positiven Werth besitze, damit Γ wieder gleich Null werden könne.

Dies vorausgeschickt, bemerken wir jetzt, daß das in (3) vorkommende Integral

$$(6) \qquad \int_{\alpha}^{\xi} (\mathrm{V}_\eta \, \delta\eta - \mathrm{V}_\beta \, \delta\beta) dx$$

dadurch zu berechnen sein würde, daß man für jeden einzelnen Punkt des obern Curvenzweigs ($\eta = \chi_2(x)$) den Werth von $\mathrm{V}\delta y$ nähme und mit dx multiplicirte, ferner auch für jeden Punkt des untern, durch $\beta = \chi_1(x)$ vorgestellten Curvenzweigs den Werth von $\mathrm{V}\delta y$ bestimmte, jedoch mit $-dx$ multiplicirte, und alle diese Elemente summirte. Man wird aber den Werth des so entstehenden Integrals auch dann erhalten, wenn man von irgend einem Punkte der Curve ausgehend und den von diesem Anfangspunkt gezählten Bogen ς als die der Integration zu Grunde liegende Variable behandelnd, den an jedem Punkt der Curve Statt findenden Werth von $\mathrm{V}\delta y$ mit $\frac{dx}{d\varsigma} d\varsigma$ multiplicirt und die Summe aller dieser Producte bildet, wofern nur die nähere Bedingung befriedigt wird, daß während $d\varsigma$ längs der ganzen Curve positiv bleibt, das Vorzeichen des Ausdrucks

$$\frac{dx}{d\varsigma} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial_x \Gamma}{\partial_y \Gamma}\right)^2\right)}} = \frac{\pm \partial_y \Gamma}{\sqrt{(\partial_x \Gamma)^2+(\partial_y \Gamma)^2}}$$

so angenommen werde, daß für alle Punkte des obern Curvenzweigs der Quotient $\frac{dx}{d\varsigma}$ einen positiven und für alle Punkte des untern Curvenzweigs einen negativen Werth erhalte. Nach dem, was oben über das Vorzeichen von $\partial_y \Gamma$ festgestellt worden ist, haben wir daher geradezu

$$\int \frac{V \partial_y \Gamma \, \delta y}{\sqrt{(\partial_x \Gamma)^2+(\partial_y \Gamma)^2}} d\varsigma$$

wobei die Integration sich längs der ganzen Curve erstreckt, als Transformation des Integrals (6).

Man wird sich leicht überzeugen, daß dieser Ausdruck, ohne irgend einer Modification bedürftig zu sein, auch dann gültig wäre, wenn für gewiße Werthe von x die Gl. $\Gamma(x, y) = 0$ nicht zwei Ordinaten β, η, sondern vier oder dgl. mehr lieferte.

Ebenso findet man für das zweite in (3) vorkommende Integral den Werth $\int \frac{V \partial_x \Gamma \, \delta x}{\sqrt{(\partial_x \Gamma)^2+(\partial_y \Gamma)^2}} d\varsigma$, wobei die Integration sich ebenfalls über den ganzen Perimeter EFGH erstreckt. Denn indem man sich darauf stützt, daß der Ausdruck $\Gamma(x, y)$ für die zusammengehörigen Coordinaten aller im Innern der geschloßenen Curve gelegenen Punkte einen negativen Werth besitze, wird man auch hier sofort zu dem Schluß gelangen, daß $\partial_x \Gamma$ für $x = \alpha$ eine negative, für $x = \xi$ eine positive Größe sei. Daher verwandelt sich die Formel (3) in

$$(7) \qquad \delta U = \int \frac{V(\partial_x \Gamma \, \delta x + \partial_y \Gamma \, \delta y)}{\sqrt{(\partial_x \Gamma)^2+(\partial_y \Gamma)^2}} d\varsigma + \int\int (\delta) V \, dx dy$$

Die nämliche Umgestaltung, welche wir so eben mit den beiden ersten Bestandtheilen der Formel (3) vorgenommen haben, ist aber auch, wenn man $\int\int (\delta) V dx dy$ mittelst partieller Integration auf das Doppel-Integral $\int\int W (\delta) z \, dx dy$, worin W die in §. 73 bei (8) festgesetzte Bedeutung hat, und einige einfache Integrale reducirt, auf diese letzteren anwendbar. Wir haben nämlich in §. 73 Gl. (2) schon gefunden

$$\int_\alpha^\xi \int_\beta^\eta \partial_q V \frac{d(\delta) z}{dy} dy dx = -\int_\alpha^\xi \int_\beta^\eta \frac{d \partial_q V}{dy} (\delta) z \, dy dx$$

$$(8) \qquad + \int_\alpha^\xi ([\partial_q V (\delta) z]_\eta - [\partial_q V (\delta) z]_\beta) dx$$

Wenn wir ferner, um $\int\int \partial_p V \frac{d(\delta)z}{dx} dxdy$ zu transformiren, die erste Integration nach x ausführen, indem wir unter ξ und α die vorhin in II) besprochenen Functionen von y verstehen, so erhalten wir

$$\int_\alpha^\xi \int_\beta^\eta \partial_p V \frac{d(\delta)z}{dx} dydx = -\int_\alpha^\xi \int_\beta^\eta \frac{d\partial_p V}{dx} (\delta)z dydx$$

$$+ \int_\beta^\eta ([\partial_p V (\delta)z]_\xi - [\partial_p V (\delta)z]_\alpha) dy \tag{9}$$

was sich auch durch Vertauschung von y, q, β, η mit x, p, α, ξ aus der vorigen Formel sofort ableiten läßt. Die in (8) und (9) auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens befindlichen Doppelintegrale bilden Bestandtheile von $\int\int \mathfrak{W}(\delta)z dxdy$; die Summe der beiden einfachen Integrale dagegen ist, zu Folge der vorhin gemachten Erläuterungen, gleichbedeutend mit

$$\int \frac{\partial_q V \partial_y \Gamma + \partial_p V \partial_x \Gamma}{\sqrt{(\partial_x \Gamma)^2 + (\partial_y \Gamma)^2}} (\delta)z d\varsigma \tag{10}$$

Wir beschränken uns hier auf die Voraussetzung $V = F(x, y, z, p, q)$.

§. 80.

Nehmen wir nun an, bei einer Aufgabe über das Maximum oder Minimum von $U = \int\int V dxdy$ sei die Hauptgleichung $\mathfrak{W} = 0$ bereits erfüllt worden; so sind die in V, $\partial_p V$, $\partial_q V$ enthaltenen Variablen z, p, q gewiße Functionen von x und y, deren Form jedoch, wegen der in das Integral der Gl. $\mathfrak{W} = 0$ verwebten willkührlichen Functionen noch nicht vollkommen bestimmt ist, wie wir bereits in den §§. 74 bis 76 gesehen haben. Die einem gegebenen V entsprechende Hauptgleichung bleibt übrigens, zufolge den im vor. §. für δU entwickelten Formeln (3) oder (7), ganz die nämliche, gleichviel was für Bedingungen über die Gränzcurven man festsetzen mag.

Nachdem der Bestandtheil $\int\int \mathfrak{W}(\delta)z dxdy$ jetzt verschwunden ist, erhalten wir gemäß den Formeln (7) und (10) des vorigen Paragraphen

$$\delta U = \int \frac{V(\partial_x \Gamma \delta x + \partial_y \Gamma \delta y) + (\partial_p V \partial_x \Gamma + \partial_q V \partial_y \Gamma)(\delta)z}{\sqrt{(\partial_x \Gamma)^2 + (\partial_y \Gamma)^2}} d\varsigma$$

wobei die angezeigte Integration über den ganzen Perimeter der Curve

$\Gamma(x, y) = 0$ auszudehnen ist, so daß wenn wir die Länge dieser Curve im Folgenden durch l vorstellen, das Integrationsintervall sich von $\varsigma = 0$ bis $\varsigma = l$ erstreckt. Da indessen δy hier die im §. 56 definirte „gemischte" Variation von y bedeutet, so gilt auch die dort bewiesene Relation $\delta y = {}_{(\delta)}y + \frac{dy}{dx}\delta x$, worin ${}_{(\delta)}y$ eine willkührliche Function von x bezeichnet. Und da $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial_x \Gamma}{\partial_y \Gamma}$, also $\partial_x \Gamma\, \delta x + \partial_y \Gamma\, \delta y = \partial_y \Gamma\, {}_{(\delta)}y$ wird, so zieht sich die vorstehende Formel zusammen in

$$(1) \qquad \delta U = \int_0^l \frac{V \partial_y \Gamma\, {}_{(\delta)}y + (\partial_p V\, \partial_x \Gamma + \partial_q V\, \partial_y \Gamma)\, {}_{(\delta)}s}{\sqrt{(\partial_x \Gamma)^2 + (\partial_y \Gamma)^2}}\, d\varsigma$$

Wenn nun rücksichtlich der Begränzungscurve der gesuchten Fläche gar keine nähere Bedingung in der Aufgabe ausgesprochen wäre, so würde man, um der Forderung $\delta U = 0$ Genüge zu leisten, offenbar den Coefficienten jeder der beiden willkührlichen Functionen ${}_{(\delta)}y$, ${}_{(\delta)}s$ einzeln gleich Null zu setzen haben. Allein gerade so, wie bei den im fünften Capitel behandelten Aufgaben über das Maximum oder Minimum von $\int V dx$ die Gränzvariationen $\delta\xi$, $\delta\alpha$, ${}_{(\delta)}y_\xi$, u. s. w. nicht sämmtlich ganz unbestimmt gelaßen wurden, sondern durch gewiße Bedingungsgleichungen untereinander verbunden waren (§. 59); so wird auch bei solchen Aufgaben über das Maximum oder Minimum von $\int\int V dx dy$, welche sich in der Praxis vielleicht darbieten und eine Auflösung zulaßen, das Variiren der Gränzcurve an die eine oder andere Bedingung geknüpft sein. In dieser Hinsicht verdienen einige Hauptfälle hervorgehoben zu werden.

I) Wenn die Gleichung $\Gamma(x, y) = 0$, also die Projection der variirenden Gränzcurve gegeben ist, so daß diese letztere auf derjenigen Cylinderfläche bestimmt werden soll, deren Erzeugungslinien parallel zur Axe der Z laufen, und deren Basis die Gl. $\Gamma = 0$ hat. Alsdann ist ${}_{(\delta)}y$ gleich Null, wie sowohl aus der Definition von ${}_{(\delta)}y$ (§. 56) als auch aus der Gleichung

$${}_{(\delta)}y = \delta y - \frac{dy}{dx}\delta x = \delta y + \frac{\partial_x \Gamma}{\partial_y \Gamma}\delta x$$

folgt, wenn man bedenkt, daß hier δy und δx durch die Relation $\partial_y \Gamma\, \delta y + \partial_x \Gamma\, \delta x = 0$ verbunden sind. Die aus (1) fließende Gränzgleichung ist daher

$$(2) \qquad \partial_p V\, \partial_x \Gamma + \partial_q V\, \partial_y \Gamma = 0$$

Dieſelbe ergiebt ſich auch aus der Formel (10) in §. 73. Denn unter den gegenwärtig gemachten Vorausſetzungen iſt $\eta_\xi = \beta_\xi$, $\eta_a = \beta_a$, ſo daß in der genannten Formel die beiden erſten, hinter $\int\int \mathfrak{W}_{(\delta)} z dy dx$ nachfolgenden einfachen Integrale verſchwinden. Man hat dann die zwei Bedingungen

$$\left[\partial_q V - \partial_p V \frac{dy}{dx}\right]_\eta = 0 \qquad \left[\partial_q V - \partial_p V \frac{dy}{dx}\right]_\beta = 0$$

welche ausſagen, daß längs des ganzen Perimeters l der linke Theil der Gl. (2) gleich Null ſein müße.

Die gegebene Gleichung $\Gamma(x, y) = 0$ in Verbindung mit (2) läßt ſich jetzt gerade ſo wie das Syſtem der zwei Gleichungen einer gegebenen Gränzcurve zur Beſtimmung einer willkührlichen Function benutzen. Da indeſſen das allgemeine Integral der Gl. $\mathfrak{W} = 0$ in dem hier vorausgeſetzten Falle im Allgemeinen *zwei* willkührliche Functionen enthält, ſo wird zur völligen Beſtimmung von $z = f(x, y)$ noch die eine oder andere Bedingung, z. B. der Werth von p *längs des Perimeters*, oder der Werth von q, oder dgl. mehr erforderlich ſein.

II) Wenn dagegen nicht die Projection der geſuchten Gränzcurve, ſondern eine Fläche

$$\Theta(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

gegeben iſt, auf welcher ſie liegen ſoll; dann beſteht die Bedingungsgleichung

$$\partial_x \Theta \delta x + \partial_y \Theta \delta y + \partial_z \Theta \delta z = 0$$

oder auch, ſobald man für δz den Werth ${}_{(\delta)}z + p\delta x + q\delta y$, für δy den Werth ${}_{(\delta)}y + \frac{dy}{dx}\delta x$ einführt, die Bedingung

$$\left(\partial_x \Theta + \partial_y \Theta \frac{dy}{dx} + q\partial_z \Theta \frac{dy}{dx} + p\partial_z \Theta\right)\delta x + (\partial_y \Theta + q\partial_z \Theta)_{(\delta)}y + \partial_z \Theta\, {}_{(\delta)}z = 0$$

Der Coefficient von δx reducirt ſich aber auf Null; denn er iſt offenbar gleichbedeutend mit

$$\frac{1}{dx}(\partial_x \Theta dx + \partial_y \Theta dy + \partial_z \Theta dz)$$

inſofern man x, y, z nur auf die Punkte der fraglichen Gränzcurve bezieht. — Hiernach beſteht zwiſchen ${}_{(\delta)}y$ und ${}_{(\delta)}z$ die Relation

$$(\partial_y \Theta + q\partial_z \Theta)_{(\delta)}y + \partial_z \Theta\, {}_{(\delta)}z = 0$$

und indem man vermittelſt derſelben aus dem gleich Null geſetzten Zähler der Formel (1) die eine der beiden willkührlichen Variationen eliminirt,

gelangt man zu der Gränzgleichung

$$(4) \qquad V - \left(\partial_p V \frac{\partial_x \Gamma}{\partial_y \Gamma} + \partial_q V\right)\left(\frac{\partial_y \Theta}{\partial_x \Theta} + q\right) = 0$$

Da jedoch $\Gamma(x, y)$ nicht gegeben ist, so substituiren wir hierin den Werth

$$\frac{\partial_x \Gamma}{\partial_y \Gamma} = -\frac{dy}{dx} = +\left(\frac{\partial_x \Theta}{\partial_x \Theta} + p\right) : \left(\frac{\partial_y \Theta}{\partial_x \Theta} + q\right)$$

welcher aus $ds = pdx + qdy = -\frac{\partial_x \Theta}{\partial_x \Theta} dx - \frac{\partial_y \Theta}{\partial_x \Theta} dy$ sofort zu gewinnen ist. Dadurch verwandelt sich (4) in

$$(5) \qquad V - \left(\frac{\partial_x \Theta}{\partial_x \Theta} + p\right)\partial_p V - \left(\frac{\partial_y \Theta}{\partial_x \Theta} + q\right)\partial_q V = 0$$

Gegenwärtig liefert also Gl. (3) in Verbindung mit (5) das System der gewünschten Gränzgleichungen. Die Gleichung (5) wird übrigens, wenn man den Divisor $\partial_x \Theta$ fortschafft, und dann annimmt, die Fläche Θ wäre ein auf der Ebene XY senkrecht stehender Cylinder, also $\partial_x \Theta = 0$, ganz einerlei mit (2), wie es sein muß.

III) Eine besonders interessante Bedingung, die wir schließlich noch glauben in Betrachtung ziehen zu müßen, findet dann Statt, wenn die Gränzcurve auf der gesuchten Fläche zwar variiren darf, wenn aber ihr Perimeter während dieses Variirens einen unveränderlichen Werth $= \mathfrak{A}$ behalten soll.

Bezeichnet wie vorher ds ein Element der Projection $\Gamma = 0$, ds ein Element der Gränzcurve selbst, welche letztere also durch das System der beiden Gleichungen $s - f(x, y) = 0$, $\Gamma(x, y) = 0$ repräsentirt wird, und stellen wir für einen Augenblick durch Z_2 und Z_1 die zwei Functionen von x vor, welche aus $f(x, y)$ hervorgehen würden, wenn vermittelst der Auflösung der Gl. $\Gamma = 0$ die Ausdrücke $\eta = \chi_2(x)$, $\beta = \chi_1(x)$ bestimmt und in $f(x, y)$ eingesetzt würden, so daß

$$(6) \qquad \begin{aligned} Z_2 &= f(x, \eta) = f(x, \chi_2(x)) \\ Z_1 &= f(x, \beta) = f(x, \chi_1(x)) \end{aligned}$$

wird; so folgt nach der bekannten Formel sofort

$$\mathfrak{A} = \int_a^\xi \sqrt{1 + \frac{d\eta^2}{dx^2} + \frac{dZ_2^2}{dx^2}} . dx + \int_a^\xi \sqrt{1 + \frac{d\beta^2}{dx^2} + \frac{dZ_1^2}{dx^2}} . dx$$

und die verlangte Bedingung wird analytisch dadurch ausgesprochen, daß man die Variation dieses Ausdrucks, mit Rücksicht auf die gleichzeitigen Aenderungen von ξ und α, gleich Null setzt. Für die Variation des

ersten Integrals finden wir nach der Formel (1) des §. 62 und unter Zuziehung der Formel (1) in §. 45, indem wir daselbst $\frac{ds_2}{dx}$, $\frac{d\eta}{dx}$, $\frac{dZ_2}{dx}$ statt V, p, $\mathfrak{p}$ setzen, den Ausdruck

$$(7)\quad \begin{aligned} &\left[\frac{ds_2}{dx}\right]_\xi \delta\xi - \left[\frac{ds_2}{dx}\right]_\alpha \delta\alpha + \left[\frac{d\eta}{ds_2}\right]_\xi {}_{(\delta)}\eta_\xi - \left[\frac{d\eta}{ds_2}\right]_\alpha {}_{(\delta)}\eta_\alpha \\ &\qquad + \left[\frac{dZ_2}{ds_2}\right]_\xi [{}_{(\delta)}Z_2]_\xi - \left[\frac{dZ_2}{ds_2}\right]_\alpha [{}_{(\delta)}Z_2]_\alpha \\ &\qquad - \int_\alpha^\xi \frac{1}{dx} d\left[\frac{d\eta}{ds_2}\right] {}_{(\delta)}\eta dx - \int_\alpha^\xi \frac{1}{dx} d\left[\frac{dZ_2}{ds_2}\right] {}_{(\delta)}Z_2 dx \end{aligned}$$

Hierin bedeutet ${}_{(\delta)}Z_2$ die „mittelbare reine Variation“ von Z_2, d. h. diejenige Aenderung, welche $f(x, \eta)$ erfährt, wenn man zwar x ungeändert läßt, aber sowohl die Form der Function $f(x, y)$ als die Form der Function $\chi_2(x)$ variirt. Da wir nun die durch die Aenderung der Form von $f(x, y)$ verursachte Variation, als Function von x und y gedacht, mit ${}_{(\delta)}\mathfrak{z}$ bezeichnen, so ist

$${}_{(\delta)}Z_2 = [{}_{(\delta)}\mathfrak{z}]_\eta + \mathfrak{d}_\eta f(x, \eta) \cdot {}_{(\delta)}\eta = {}_{(\delta)}\mathfrak{z}_\eta + q_\eta {}_{(\delta)}\eta$$

Verfährt man jetzt ebenso mit dem zweiten Bestandtheile von $\mathfrak{A}$, durch welchen die Länge desjenigen Bogens s_1 der Gränzcurve angegeben wird, dessen Projection die Gl. $\beta = \chi_1(x)$ hat, und addirt den entstehenden Ausdruck zu (7); so sind im Ganzen vier Integrale vorhanden, welche sich paarweise zusammenfaßen und dann durch die Summe

$$(8)\quad -\int d\frac{dy}{ds} {}_{(\delta)}y\, d\varsigma - \int d\frac{d\mathfrak{z}}{ds} ({}_{(\delta)}\mathfrak{z} + q\, {}_{(\delta)}y) d\varsigma$$

vorstellen laßen, indem wir unter x, y die Coordinaten der Punkte des Perimeters l, unter $\mathfrak{z}$ die zugehörige Ordinate der gesuchten Fläche verstehen, und die Integration von $\varsigma = 0$ bis $\varsigma = l$ ausdehnen. Die Summe der sechs vom Integralzeichen befreiten Glieder in (7), zusammen mit den ihnen entsprechenden, aus der Variation des zweiten Bestandtheils von $\mathfrak{A}$ entspringenden, fällt aber von selbst weg. Um dieses deutlich einzusehen, bedenke man, daß erstens, weil nach der Voraussetzung die Gränzcurve eine geschloßene ist, zu der gesuchten Gränzabscisse $x = \xi$ nur ein einziger Punkt gehört, daß also die Ordinaten η_ξ, $[Z_2]_\xi$ einerlei mit β_ξ, $[Z_1]_\xi$ und die Variationen ${}_{(\delta)}\eta_\xi$, $[{}_{(\delta)}Z_2]_\xi$ identisch mit ${}_{(\delta)}\beta_\xi$, $[{}_{(\delta)}Z_1]_\xi$ sind.

Weil ferner durch $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Neigungswinkel des Elements ds gegen die drei Coordinatenaxen angegeben werden, und weil für $x = \xi$ die beiden Elemente ds_1 und ds_2 zusammenfallen, so jedoch, daß die Richtung von ds_1 gerade die entgegengesetzte von ds_2 ist; so leuchtet ein, daß

$$\left[\frac{dx}{ds_2}\right]_\xi = -\left[\frac{dx}{ds_1}\right]_\xi, \quad \left[\frac{dy}{ds_2}\right]_\xi = -\left[\frac{dy}{ds_1}\right]_\xi, \quad \left[\frac{dZ_2}{ds_2}\right]_\xi = -\left[\frac{dZ_1}{ds_1}\right]_\xi$$

sei, so wie daß dieselben Relationen für $x = \alpha$ Statt finden. Hieraus folgt die Richtigkeit der obigen Behauptung ohne Weiteres.*) Die Forde-

---

*) Es sind zwar die Quotienten $\left[\frac{ds_2}{dx}\right]_\xi$ und $\left[\frac{ds_1}{dx}\right]_\xi$ beide unendlich, man muß aber den einen als $\operatorname{Sec}. \frac{1}{2}\pi$, den andern als $-\operatorname{Sec}. \frac{1}{2}\pi$ auffaßen. Uebrigens könnte man die obige Behauptung sehr leicht auf einen allgemeinern Lehrsatz zurückführen. Soll nämlich die Variation eines Integrals U, welches sich über alle Elemente einer geschloßenen, ebenen Curve $F(x, y) = 0$ erstreckt, gleich Null sein, so kann man die Rechnung mit der Einführung von Polarcoordinaten r und θ beginnen, indem man als Pol irgend einen Punkt im Innern des von jener Curve umschloßenen Raums annimmt, so daß

$$x = a + r \operatorname{Cos} \theta \qquad y = b + r \operatorname{Sin} \theta$$

an die Stelle von x und y tritt. Handelt es sich dabei um eine Curve im Raum, deren Projection die Gl. $F = 0$ hat, so führt man s als dritte Coordinate in die transformirten Formeln ein. Hiernach wird U die Form haben

$$U = \int F(\theta, r, r', r'', \ldots s, s', s'', \ldots) d\theta$$

wobei $r', r'', \ldots s', s'', \ldots$ die nach θ genommenen Differentialquotienten von r resp. s bedeuten. Die Integrationsgränzen sind 0 und 2π, oder θ_0 und $\theta_1 = \theta_0 + 2\pi$. Es können nun zwar, wenn für gewiße Werthe des Polarwinkels θ der Perimeter der Curve F in mehr als einem Punkte vom Radius-Vector geschnitten wird, hieraus mancherlei Schwierigkeiten entstehen. Allein ohne uns hierbei aufzuhalten, ist doch gewiß, daß die Variation δU, abgesehen von den noch unter dem Integralzeichen befindlichen Gliedern, sich auf die Form

$$\begin{aligned} &[F.\delta\theta]_1 - [F.\delta\theta]_0 \\ &\quad + [N_{(\delta)}r]_1 - [N_{(\delta)}r]_0 + [\mathfrak{N}_{(\delta)}s]_1 - [\mathfrak{N}_{(\delta)}s]_0 \\ &\quad + \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \end{aligned}$$

bringen läßt (§. 62 Formel (1)), wobei die angehängten Indices 0, 1 anzeigen, daß der Gränzwerth θ_0 resp. θ_1 gesetzt werden solle. Insofern also in F, N, $\mathfrak{N}$, ... blos trigonometrische Functionen von θ vorkommen, wird für $\theta_1 = \theta_0 + 2\pi$ der

der Annahme $dy = \text{Const.}$ zu jedem andern Punkte ein anderer Werth von δy gehören, indem der geometrische Ort derjenigen Punkte, welche den Punkten der Sehne EG entsprechen, etwa die durch die punktirte Curve E_1G_1 angedeutete Gestalt haben könnte, sondern es werden auch bei dem Fortschreiten von den Punkten E, G zu den auf der Curve nächst anliegenden Punkten, während also x um das constante Differential dx successiv wächst, die Variationen $\delta\beta$, $\delta\eta$ sich continuirlich ändern. Das Analoge gilt von den unter dem zweiten Integralzeichen vorkommenden Variationen $\delta\alpha$, $\delta\xi$, welche in Beziehung auf $QH = \alpha = f_1(y)$ und $QF = \xi = f_2(y)$ durch Hh, Ff zur Anschauung gebracht werden, während die punktirte Curve H_1F_1 vielleicht die der Sehne HF entsprechende Linie ist.

Dieselben Betrachtungen über die Variationen δy, δx, $\delta\beta$, $\delta\eta$ ꝛc. greifen sogar dann Platz, wenn die in der Ebene XY liegende Projection der Gränzcurve gar nicht variirt, während die Gränzcurve selbst im Raume als variirend gedacht wird, wenn diese letztere also auf einer gegebenen Cylinderfläche liegen soll, deren Erzeugungslinien parallel zur Axe der Z laufen und deren Basis EFGH ist. Denn in diesem Falle kann man sich etwa ε und γ als die entsprechenden Punkte von E und G denken; und es sind δx, δy variabel, gleichviel ob man bei der in (2) angezeigten doppelten Integration zuerst x constant setzt und die Variable y das zwischen den bewußten Gränzen liegende Intervall durchlaufen läßt, oder ob man in umgekehrter Ordnung operirt. Die Beschränkung findet jetzt nur Statt, daß die Variationen der Coordinaten eines jeden Punkts der Curve EFGH an die aus der Differentialgleichung dieser Curve zu entnehmende Relation gebunden sind.

III) Sobald man nun an irgend einem der Doppel-Integrale, deren Summe den ursprünglichen Ausdruck für δU bildet, die erste Integration, sei es nach x oder nach y, ausgeführt und gemäß der oben erklärten Vorschrift die Gränzwerthe eingesetzt hat, so findet man die Gränzen für die übrig bleibende zweite Integration mittelst der folgenden Betrachtung. Stellen wir durch $\int\int K dx dy$ den betreffenden Bestandtheil von δU, und durch $\Gamma(x, y) = 0$ die Gleichung der Curve EFGH vor, welche nach y aufgelöst die oben vorausgesetzte Form $y = \chi(x)$ und nach x aufgelöst die Form $x = f(y)$ erhielte; so besteht die Differentialgleichung

$$(4.\alpha) \qquad \partial_x\Gamma + \partial_y\Gamma\frac{dy}{dx} = 0$$

oder auch $$(4.\beta) \qquad \partial_y\Gamma + \partial_x\Gamma\frac{dx}{dy} = 0$$

Hat man nun bei der ersten Integration $y = OQ$ als constant behandelt und in Beziehung auf die Variable x zwischen den Gränzen $QH = f_1(y)$ bis $QF = f_2(y)$ integrirt, und ist dadurch $\int\int K dx dy$ in $\int H dy$ übergegangen, wobei H blos als Function von y gedacht wird; so werden die Gränzwerthe für die nach y auszuführende Integration durch die kleinste und größte Ordinate der Curve EFGH angegeben. Für diese Punkte muß der in (4.α) vorkommende Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ gleich Null werden, folglich $\partial_x \Gamma = 0$ sein. Hieraus in Verbindung mit $\Gamma = 0$ sind die Coordinaten der fraglichen Punkte zu bestimmen. Durch Elimination von x aus dem Systeme der Gleichungen

$$\Gamma(x, y) = 0 \qquad \partial_x \Gamma(x, y) = 0$$

erhält man also eine Gleichung, deren Wurzeln die gesuchten Gränzwerthe von y angeben.

Ebenso findet man, wenn man die erste Integration nach y ausgeführt hat, die Bestimmungsgleichung für die Gränzen der zweiten Integration dadurch, daß man aus $\Gamma = 0$, $\partial_y \Gamma = 0$ die Variable y eliminirt.

IV) In Betreff eben jener in der Formel (3) aufgeführten, so wie der aus $\int\int (\delta) V dx dy$ noch entspringenden einfachen Integrale, welche zusammengenommen mit dem Doppelintegrale $\int\int W_{(\delta)s} dx dy$ den Werth von δU ausmachen (§. 73 Gl. (7)), verdient jedoch, immer unter der Voraussetzung, daß die Projection des in Untersuchung stehenden Flächenstücks eine geschloßene Curve EFGH sein soll, noch eine weitere Transformation alle Aufmerksamkeit. Schreiten wir in der Sehne, indem wir $x = OP$ beliebig aber constant annehmen, dagegen y continuirlich wachsen laßen, vom Anfangspunkt E zum Endpunkte G fort, so wird, weil der Werth von $\Gamma(x, y)$ hierbei successiv die Incremente $\partial_y \Gamma dy$ erhält und weil für den Anfangswerth $y = PE$, so wie schließlich wieder am Endpunkt G der Werth von Γ gleich Null ist, der Ausdruck $\partial_y \Gamma$ anfangs entweder positiv oder negativ sein, so daß Γ positive oder negative Werthe erhält, allein bei dem weitern Wachsen von y wird $\partial_y \Gamma$ das Vorzeichen wechseln, während Γ zu Folge der Voraussetzung, daß zwischen $y = PE$ und $y = PG$ keine Wurzel der Gleichung $\Gamma = 0$ liege, das seinige nicht ändert. Wäre z. B. die Curve EFGH ein Kreis

$$(5) \qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = 0$$

so hätte man $\partial_y \Gamma = 2(y - b)$. Die Mittelpunktscoordinate b ist nun größer als $y = PE$, also erhält $\partial_y \Gamma$ am Punkte E einen negativen

Werth, bei $y = b$ tritt der Wechsel im Vorzeichen ein, und für $y = \mathrm{PG}$ ist $\partial_y \Gamma$ positiv. Da ferner

$$(b - y)^2 < (b - \mathrm{PE})^2 \quad \text{für} \quad \mathrm{PE} < y < b$$

und $$(y - b)^2 < (\mathrm{PG} - b)^2 \quad \text{für} \quad b < y < \mathrm{PG}$$

ist, so erhält offenbar für alle zwischen PE und PG liegenden Werthe von y der linke Theil der Gl. (5) negative Werthe.

Gerade umgekehrt würde es sich freilich verhalten, wenn man die Gleichung jenes Kreises in der Form

$$c^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2 = 0$$

anschreiben wollte, weil dann sowohl vor $\partial_y \Gamma$ als vor Γ das entgegengesetzte Vorzeichen zu stehen kommt. Da wir aber die Gleichung $\Gamma(x, y) = 0$ in jedem Falle mit dem Factor (-1) multipliciren können, so ist es uns erlaubt im Folgenden die bestimmte Voraussetzung zu Grunde zu legen, daß Γ während des ganzen Intervalls $y = \mathrm{PE}$ bis $y = \mathrm{PG}$ einen negativen Werth behalte, und daß dem entsprechend die Function $\partial_y \Gamma$ für $y = \mathrm{PE}$ negativ sei, alsdann bei dem Zunehmen von y einmal, oder auch dreimal u. s. w. ihr Vorzeichen ändere, und schließlich für $y = \mathrm{PG}$ einen positiven Werth besitze, damit Γ wieder gleich Null werden könne.

Dies vorausgeschickt, bemerken wir jetzt, daß das in (3) vorkommende Integral

$$(6) \qquad \int_a^{\xi} (\mathrm{V}_\eta \, \delta\eta - \mathrm{V}_\beta \, \delta\beta) dx$$

dadurch zu berechnen sein würde, daß man für jeden einzelnen Punkt des obern Curvenzweigs ($\eta = \chi_2(x)$) den Werth von $\mathrm{V}\delta y$ nähme und mit dx multiplicirte, ferner auch für jeden Punkt des untern, durch $\beta = \chi_1(x)$ vorgestellten Curvenzweigs den Werth von $\mathrm{V}\delta y$ bestimmte, jedoch mit $-dx$ multiplicirte, und alle diese Elemente summirte. Man wird aber den Werth des so entstehenden Integrals auch dann erhalten, wenn man von irgend einem Punkte der Curve ausgehend und den von diesem Anfangspunkt gezählten Bogen ς als die der Integration zu Grunde liegende Variable behandelnd, den an jedem Punkt der Curve Statt findenden Werth von $\mathrm{V}\delta y$ mit $\frac{dx}{d\varsigma} d\varsigma$ multiplicirt und die Summe aller dieser Produkte bildet, wofern nur die nähere Bedingung befriedigt wird, daß während $d\varsigma$ längs der ganzen Curve positiv bleibt, das Vorzeichen des Ausdrucks

$$\frac{dx}{d\varsigma} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{\partial_x \Gamma}{\partial_y \Gamma}\right)^2\right)}} = \frac{\pm \partial_y \Gamma}{\sqrt{(\partial_x \Gamma)^2+(\partial_y \Gamma)^2}}$$

so angenommen werde, daß für alle Punkte des obern Curvenzweigs der Quotient $\frac{dx}{d\varsigma}$ einen positiven und für alle Punkte des untern Curvenzweigs einen negativen Werth erhalte. Nach dem, was oben über das Vorzeichen von $\partial_y \Gamma$ festgestellt worden ist, haben wir daher geradezu

$$\int \frac{V \partial_y \Gamma \, \delta y}{\sqrt{(\partial_x \Gamma)^2+(\partial_y \Gamma)^2}} d\varsigma$$

wobei die Integration sich längs der ganzen Curve erstreckt, als Transformation des Integrals (6).

Man wird sich leicht überzeugen, daß dieser Ausdruck, ohne irgend einer Modification bedürftig zu sein, auch dann gültig wäre, wenn für gewiße Werthe von x die Gl. $\Gamma(x, y) = 0$ nicht zwei Ordinaten β, η, sondern vier oder dgl. mehr lieferte.

Ebenso findet man für das zweite in (3) vorkommende Integral den Werth $\int \frac{V \partial_x \Gamma \, \delta x}{\sqrt{(\partial_x \Gamma)^2+(\partial_y \Gamma)^2}} d\varsigma$, wobei die Integration sich ebenfalls über den ganzen Perimeter EFGH erstreckt. Denn indem man sich darauf stützt, daß der Ausdruck $\Gamma(x, y)$ für die zusammengehörigen Coordinaten aller im Innern der geschloßenen Curve gelegenen Punkte einen negativen Werth beßtze, wird man auch hier sofort zu dem Schluß gelangen, daß $\partial_x \Gamma$ für $x = \alpha$ eine negative, für $x = \xi$ eine positive Größe sei. Daher verwandelt sich die Formel (3) in

$$(7) \qquad \delta U = \int \frac{V(\partial_x \Gamma \, \delta x + \partial_y \Gamma \, \delta y)}{\sqrt{(\partial_x \Gamma)^2+(\partial_y \Gamma)^2}} d\varsigma + \int\int (\delta) V \, dx dy$$

Die nämliche Umgestaltung, welche wir so eben mit den beiden ersten Beßtandtheilen der Formel (3) vorgenommen haben, ist aber auch, wenn man $\int\int (\delta) V dx dy$ mittelst partieller Integration auf das Doppel-Integral $\int\int \mathfrak{W}(\delta) z dx dy$, worin $\mathfrak{W}$ die in §. 73 bei (8) festgesetzte Bedeutung hat, und einige einfache Integrale reducirt, auf diese letzteren anwendbar. Wir haben nämlich in §. 73 Gl. (2) schon gefunden

$$\int_\alpha^\xi \int_\beta^\eta \partial_q V \frac{d(\delta) z}{dy} dy dx = -\int_\alpha^\xi \int_\beta^\eta \frac{d\partial_q V}{dy} (\delta) z \, dy dx$$

$$(8) \qquad + \int_\alpha^\xi ([\partial_q V (\delta) z]_\eta - [\partial_q V (\delta) z]_\beta) dx$$

Wenn wir ferner, um $\int\int \partial_p V \frac{d(\delta)z}{dx} dxdy$ zu transformiren, die erste Integration nach x ausführen, indem wir unter ξ und α die vorhin in II) besprochenen Functionen von y verstehen, so erhalten wir

$$\int_\alpha^\xi \int_\beta^\eta \partial_p V \frac{d(\delta)z}{dx} dydx = -\int_\alpha^\xi \int_\beta^\eta \frac{d\partial_p V}{dx} (\delta)z dydx$$

$$+ \int_\beta^\eta ([\partial_p V (\delta)z]_\xi - [\partial_p V (\delta)z]_\alpha) dy \qquad (9)$$

was sich auch durch Vertauschung von y, q, β, η mit x, p, α, ξ aus der vorigen Formel sofort ableiten läßt. Die in (8) und (9) auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens befindlichen Doppelintegrale bilden Bestandtheile von $\int\int \mathfrak{W}(\delta)z dxdy$; die Summe der beiden einfachen Integrale dagegen ist, zu Folge der vorhin gemachten Erläuterungen, gleichbedeutend mit

$$\int \frac{\partial_q V \partial_y \Gamma + \partial_p V \partial_x \Gamma}{\sqrt{(\partial_x \Gamma)^2 + (\partial_y \Gamma)^2}} (\delta)z d\zeta \qquad (10)$$

Wir beschränken uns hier auf die Voraussetzung $V = F(x, y, z, p, q)$.

§. 80.

Nehmen wir nun an, bei einer Aufgabe über das Maximum oder Minimum von $U = \int\int V dxdy$ sei die Hauptgleichung $\mathfrak{W} = 0$ bereits erfüllt worden; so sind die in V, $\partial_p V$, $\partial_q V$ enthaltenen Variablen z, p, q gewiße Functionen von x und y, deren Form jedoch, wegen der in das Integral der Gl. $\mathfrak{W} = 0$ verwebten willkührlichen Functionen noch nicht vollkommen bestimmt ist, wie wir bereits in den §§. 74 bis 76 gesehen haben. Die einem gegebenen V entsprechende Hauptgleichung bleibt übrigens, zufolge den im vor. §. für δU entwickelten Formeln (3) oder (7), ganz die nämliche, gleichviel was für Bedingungen über die Gränzcurven man festsetzen mag.

Nachdem der Bestandtheil $\int\int \mathfrak{W}(\delta)z dxdy$ jetzt verschwunden ist, erhalten wir gemäß den Formeln (7) und (10) des vorigen Paragraphen

$$\delta U = \int \frac{V(\partial_x \Gamma \delta x + \partial_y \Gamma \delta y) + (\partial_p V \partial_x \Gamma + \partial_q V \partial_y \Gamma)(\delta)z}{\sqrt{(\partial_x \Gamma)^2 + (\partial_y \Gamma)^2}} d\zeta$$

wobei die angezeigte Integration über den ganzen Perimeter der Curve

$\Gamma(x, y) = 0$ auszudehnen ist, so daß wenn wir die Länge dieser Curve im Folgenden durch l vorstellen, das Integrationsintervall sich von $\varsigma = 0$ bis $\varsigma = l$ erstreckt. Da indessen δy hier die im §. 56 definirte „gemischte" Variation von y bedeutet, so gilt auch die dort bewiesene Relation $\delta y = {}_{(\delta)}y + \frac{dy}{dx}\delta x$, worin ${}_{(\delta)}y$ eine willkührliche Function von x bezeichnet. Und da $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial_x \Gamma}{\partial_y \Gamma}$, also $\partial_x \Gamma\, \delta x + \partial_y \Gamma\, \delta y = \partial_y \Gamma\, {}_{(\delta)}y$ wird, so zieht sich die vorstehende Formel zusammen in

$$(1) \qquad \delta U = \int_0^l \frac{V \partial_y \Gamma\, {}_{(\delta)}y + (\partial_p V\, \partial_x \Gamma + \partial_q V\, \partial_y \Gamma)\, {}_{(\delta)}s}{\sqrt{(\partial_x \Gamma)^2 + (\partial_y \Gamma)^2}}\, d\varsigma$$

Wenn nun rücksichtlich der Begränzungscurve der gesuchten Fläche gar keine nähere Bedingung in der Aufgabe ausgesprochen wäre, so würde man, um der Forderung $\delta U = 0$ Genüge zu leisten, offenbar den Coefficienten jeder der beiden willkührlichen Functionen ${}_{(\delta)}y$, ${}_{(\delta)}s$ einzeln gleich Null zu setzen haben. Allein gerade so, wie bei den im fünften Capitel behandelten Aufgaben über das Maximum oder Minimum von $\int V dx$ die Gränzvariationen $\delta\xi$, $\delta\alpha$, ${}_{(\delta)}y_\xi$, u. s. w. nicht sämmtlich ganz unbestimmt gelaßen wurden, sondern durch gewiße Bedingungsgleichungen untereinander verbunden waren (§. 59); so wird auch bei solchen Aufgaben über das Maximum oder Minimum von $\int\int V dx dy$, welche sich in der Praxis vielleicht darbieten und eine Auflösung zulaßen, das Variiren der Gränzcurve an die eine oder andere Bedingung geknüpft sein. In dieser Hinsicht verdienen einige Hauptfälle hervorgehoben zu werden.

I) Wenn die Gleichung $\Gamma(x, y) = 0$, also die Projection der variirenden Gränzcurve gegeben ist, so daß diese letztere auf derjenigen Cylinderfläche bestimmt werden soll, deren Erzeugungslinien parallel zur Axe der Z laufen, und deren Basis die Gl. $\Gamma = 0$ hat. Alsdann ist ${}_{(\delta)}y$ gleich Null, wie sowohl aus der Definition von ${}_{(\delta)}y$ (§. 56) als auch aus der Gleichung

$${}_{(\delta)}y = \delta y - \frac{dy}{dx}\delta x = \delta y + \frac{\partial_x \Gamma}{\partial_y \Gamma}\delta x$$

folgt, wenn man bedenkt, daß hier δy und δx durch die Relation $\partial_y \Gamma\, \delta y + \partial_x \Gamma\, \delta x = 0$ verbunden sind. Die aus (1) fließende Gränzgleichung ist daher

$$(2) \qquad \partial_p V\, \partial_x \Gamma + \partial_q V\, \partial_y \Gamma = 0$$

Dieſelbe ergiebt ſich auch aus der Formel (10) in §. 73. Denn unter den gegenwärtig gemachten Vorausſetzungen iſt $\eta_\xi = \beta_\xi$, $\eta_\alpha = \beta_\alpha$, ſo daß in der genannten Formel die beiden erſten, hinter $\int\int \mathfrak{W}_{(\delta)} z dy dx$ nachfolgenden einfachen Integrale verſchwinden. Man hat dann die zwei Bedingungen

$$\left[\partial_q V - \partial_p V \frac{dy}{dx}\right]_\eta = 0 \qquad \left[\partial_q V - \partial_p V \frac{dy}{dx}\right]_\beta = 0$$

welche ausſagen, daß längs des ganzen Perimeters l der linke Theil der Gl. (2) gleich Null ſein müße.

Die gegebene Gleichung $\Gamma(x, y) = 0$ in Verbindung mit (2) läßt ſich jetzt gerade ſo wie das Syſtem der zwei Gleichungen einer gegebenen Gränzcurve zur Beſtimmung einer willkührlichen Function benutzen. Da indeſſen das allgemeine Integral der Gl. $\mathfrak{W} = 0$ in dem hier vorausgeſetzten Falle im Allgemeinen zwei willkührliche Functionen enthält, ſo wird zur völligen Beſtimmung von $z = f(x, y)$ noch die eine oder andere Bedingung, z. B. der Werth von p längs des Perimeters, oder der Werth von q, oder dgl. mehr erforderlich ſein.

II) Wenn dagegen nicht die Projection der geſuchten Gränzcurve, ſondern eine Fläche

$$\Theta(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

gegeben iſt, auf welcher ſie liegen ſoll; dann beſteht die Bedingungsgleichung

$$\partial_x \Theta \delta x + \partial_y \Theta \delta y + \partial_z \Theta \delta z = 0$$

oder auch, ſobald man für δz den Werth ${}_{(\delta)}z + p\delta x + q\delta y$, für δy den Werth ${}_{(\delta)}y + \frac{dy}{dx}\delta x$ einführt, die Bedingung

$$\left(\partial_x \Theta + \partial_y \Theta \frac{dy}{dx} + q\partial_z \Theta \frac{dy}{dx} + p\partial_z \Theta\right)\delta x + (\partial_y \Theta + q\partial_z \Theta)_{(\delta)}y + \partial_z \Theta\, {}_{(\delta)}z = 0$$

Der Coefficient von δx reducirt ſich aber auf Null; denn er iſt offenbar gleichbedeutend mit

$$\frac{1}{dx}(\partial_x \Theta dx + \partial_y \Theta dy + \partial_z \Theta dz)$$

inſofern man x, y, z nur auf die Punkte der fraglichen Gränzcurve bezieht. — Hiernach beſteht zwiſchen ${}_{(\delta)}y$ und ${}_{(\delta)}z$ die Relation

$$(\partial_y \Theta + q\partial_z \Theta)_{(\delta)}y + \partial_z \Theta\, {}_{(\delta)}z = 0$$

und indem man vermittelſt derſelben aus dem gleich Null geſetzten Zähler der Formel (1) die eine der beiden willkührlichen Variationen eliminirt,

gelangt man zu der Gränzgleichung

$$(4) \qquad V - \left(\partial_p V \frac{\partial_x \Gamma}{\partial_y \Gamma} + \partial_q V\right)\left(\frac{\partial_y \Theta}{\partial_x \Theta} + q\right) = 0$$

Da jedoch $\Gamma(x, y)$ nicht gegeben ist, so substituiren wir hierin den Werth

$$\frac{\partial_x \Gamma}{\partial_y \Gamma} = -\frac{dy}{dx} = +\left(\frac{\partial_x \Theta}{\partial_x \Theta} + p\right) : \left(\frac{\partial_y \Theta}{\partial_x \Theta} + q\right)$$

welcher aus $ds = pdx + qdy = -\frac{\partial_x \Theta}{\partial_x \Theta} dx - \frac{\partial_y \Theta}{\partial_x \Theta} dy$ sofort zu gewinnen ist. Dadurch verwandelt sich (4) in

$$(5) \qquad V - \left(\frac{\partial_x \Theta}{\partial_x \Theta} + p\right)\partial_p V - \left(\frac{\partial_y \Theta}{\partial_x \Theta} + q\right)\partial_q V = 0$$

Gegenwärtig liefert also Gl. (3) in Verbindung mit (5) das System der gewünschten Gränzgleichungen. Die Gleichung (5) wird übrigens, wenn man den Divisor $\partial_x \Theta$ fortschafft, und dann annimmt, die Fläche Θ wäre ein auf der Ebene XY senkrecht stehender Cylinder, also $\partial_x \Theta = 0$, ganz einerlei mit (2), wie es sein muß.

III) Eine besonders interessante Bedingung, die wir schließlich noch glauben in Betrachtung ziehen zu müßen, findet dann Statt, wenn die Gränzcurve auf der gesuchten Fläche zwar variiren darf, wenn aber ihr Perimeter während dieses Variirens einen unveränderlichen Werth $= \mathfrak{A}$ behalten soll.

Bezeichnet wie vorher $d\varsigma$ ein Element der Projection $\Gamma = 0$, ds ein Element der Gränzcurve selbst, welche letztere also durch das System der beiden Gleichungen $z - f(x, y) = 0$, $\Gamma(x, y) = 0$ repräsentirt wird, und stellen wir für einen Augenblick durch Z_2 und Z_1 die zwei Functionen von x vor, welche aus $f(x, y)$ hervorgehen würden, wenn vermittelst der Auflösung der Gl. $\Gamma = 0$ die Ausdrücke $\eta = \chi_2(x)$, $\beta = \chi_1(x)$ bestimmt und in $f(x, y)$ eingesetzt würden, so daß

$$(6) \qquad \begin{aligned} Z_2 &= f(x, \eta) = f(x, \chi_2(x)) \\ Z_1 &= f(x, \beta) = f(x, \chi_1(x)) \end{aligned}$$

wird; so folgt nach der bekannten Formel sofort

$$\mathfrak{A} = \int_\alpha^\xi \sqrt{1 + \frac{d\eta^2}{dx^2} + \frac{dZ_2^2}{dx^2}} . dx + \int_\alpha^\xi \sqrt{1 + \frac{d\beta^2}{dx^2} + \frac{dZ_1^2}{dx^2}} . dx$$

und die verlangte Bedingung wird analytisch dadurch ausgesprochen, daß man die Variation dieses Ausdrucks, mit Rücksicht auf die gleichzeitigen Aenderungen von ξ und α, gleich Null setzt. Für die Variation des

erſten Integrals finden wir nach der Formel (1) des §. 62 und unter Zuziehung der Formel (1) in §. 45, indem wir daſelbſt $\frac{ds_2}{dx}$, $\frac{d\eta}{dx}$, $\frac{dZ_2}{dx}$ ſtatt V, p, $\mathfrak{p}$ ſetzen, den Ausdruck

$$\left[\frac{ds_2}{dx}\right]_\xi \delta\xi - \left[\frac{ds_2}{dx}\right]_a \delta\alpha + \left[\frac{d\eta}{ds_2}\right]_\xi ({}_\delta)\eta_\xi - \left[\frac{d\eta}{ds_2}\right]_a ({}_\delta)\eta_a$$

$$(7) \qquad + \left[\frac{dZ_2}{ds_2}\right]_\xi [({}_\delta)Z_2]_\xi - \left[\frac{dZ_2}{ds_2}\right]_a [({}_\delta)Z_2]_a$$

$$- \int_a^\xi \frac{1}{dx} d\left[\frac{d\eta}{ds_2}\right] ({}_\delta)\eta dx - \int_a^\xi \frac{1}{dx} d\left[\frac{dZ_2}{ds_2}\right] ({}_\delta)Z_2 dx$$

Hierin bedeutet ${}_(\delta)Z_2$ die „mittelbare reine Variation“ von Z_2, d. h. diejenige Aenderung, welche $f(x, \eta)$ erfährt, wenn man zwar x ungeändert läßt, aber ſowohl die Form der Function $f(x, y)$ als die Form der Function $\chi_2(x)$ variirt. Da wir nun die durch die Aenderung der Form von $f(x, y)$ verurſachte Variation, als Function von x und y gedacht, mit ${}_(\delta)z$ bezeichnen, ſo iſt

$${}_(\delta)Z_2 = [({}_\delta)z]_\eta + \vartheta_\eta f(x, \eta) \cdot ({}_\delta)\eta = ({}_\delta)z_\eta + q_\eta({}_\delta)\eta$$

Verfährt man jetzt ebenſo mit dem zweiten Beſtandtheile von $\mathfrak{A}$, durch welchen die Länge desjenigen Bogens s_1 der Gränzcurve angegeben wird, deſſen Projection die Gl. $\beta = \chi_1(x)$ hat, und addirt den entſtehenden Ausdruck zu (7); ſo ſind im Ganzen vier Integrale vorhanden, welche ſich paarweiſe zuſammenfaßen und dann durch die Summe

$$(8) \qquad - \int d\frac{dy}{ds} ({}_\delta)y d\varsigma - \int d\frac{dz}{ds} ({}_\delta)z + q({}_\delta)y) d\varsigma$$

vorſtellen laßen, indem wir unter x, y die Coordinaten der Punkte des Perimeters l, unter z die zugehörige Ordinate der geſuchten Fläche verſtehen, und die Integration von $\varsigma = 0$ bis $\varsigma = l$ ausdehnen. Die Summe der ſechs vom Integralzeichen befreiten Glieder in (7), zuſammen mit den ihnen entſprechenden, aus der Variation des zweiten Beſtandtheils von $\mathfrak{A}$ entſpringenden, fällt aber von ſelbſt weg. Um dieſes deutlich einzuſehen, bedenke man, daß erſtens, weil nach der Vorausſetzung die Gränzcurve eine geſchloßene iſt, zu der geſuchten Gränzabſciſſe $x = \xi$ nur ein einziger Punkt gehört, daß alſo die Ordinaten η_ξ, $[Z_2]_\xi$ einerlei mit β_ξ, $[Z_1]_\xi$ und die Variationen ${}_(\delta)\eta_\xi$, $[({}_\delta)Z_2]_\xi$ identiſch mit ${}_(\delta)\beta_\xi$, $[({}_\delta)Z_1]_\xi$ ſind.

Weil ferner durch $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ die Cosinus der Neigungswinkel des Elements ds gegen die drei Coordinatenaxen angegeben werden, und weil für $x = \xi$ die beiden Elemente ds_1 und ds_2 zusammenfallen, so jedoch, daß die Richtung von ds_1 gerade die entgegengesetzte von ds_2 ist; so leuchtet ein, daß

$$\left[\frac{dx}{ds_2}\right]_\xi = -\left[\frac{dx}{ds_1}\right]_\xi, \left[\frac{dy}{ds_2}\right]_\xi = -\left[\frac{dy}{ds_1}\right]_\xi, \left[\frac{dZ_2}{ds_2}\right]_\xi = -\left[\frac{dZ_1}{ds_1}\right]_\xi$$

sei, so wie daß dieselben Relationen für $x = \alpha$ Statt finden. Hieraus folgt die Richtigkeit der obigen Behauptung ohne Weiteres.*) Die Forde-

---

*) Es sind zwar die Quotienten $\left[\frac{ds_2}{dx}\right]_\xi$ und $\left[\frac{ds_1}{dx}\right]_\xi$ beide unendlich, man muß aber den einen als $\operatorname{Sec}.\frac{1}{2}\pi$, den andern als $-\operatorname{Sec}.\frac{1}{2}\pi$ auffaßen. Uebrigens könnte man die obige Behauptung sehr leicht auf einen allgemeinern Lehrsatz zurückführen. Soll nämlich die Variation eines Integrals U, welches sich über alle Elemente einer geschloßenen, ebenen Curve $F(x, y) = 0$ erstreckt, gleich Null sein, so kann man die Rechnung mit der Einführung von Polarcoordinaten r und θ beginnen, indem man als Pol irgend einen Punkt im Innern des von jener Curve umschloßenen Raums annimmt, so daß

$$x = a + r \operatorname{Cos} \theta \qquad y = b + r \operatorname{Sin} \theta$$

an die Stelle von x und y tritt. Handelt es sich dabei um eine Curve im Raum, deren Projection die Gl. $\Gamma = 0$ hat, so führt man z als dritte Coordinate in die transformirten Formeln ein. Hiernach wird U die Form haben

$$U = \int F(\theta, r, r', r'', \ldots z, z', z'', \ldots) d\theta$$

wobei $r', r'', \ldots z', z'', \ldots$ die nach θ genommenen Differentialquotienten von r resp. z bedeuten. Die Integrationsgränzen sind 0 und 2π, oder θ_0 und $\theta_1 = \theta_0 + 2\pi$. Es können nun zwar, wenn für gewiße Werthe des Polarwinkels θ der Perimeter der Curve Γ in mehr als einem Punkte vom Radius-Vector geschnitten wird, hieraus mancherlei Schwierigkeiten entstehen. Allein ohne uns hierbei aufzuhalten, ist doch gewiß, daß die Variation δU, abgesehen von den noch unter dem Integralzeichen befindlichen Gliedern, sich auf die Form

$$\begin{aligned}&[F.\delta\theta]_1 - [F.\delta\theta]_0\\ &\quad + [N_{(\delta)}r]_1 - [N_{(\delta)}r]_0 + [\mathfrak{N}_{(\delta)}z]_1 - [\mathfrak{N}_{(\delta)}z]_0\\ &\quad + \quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\end{aligned}$$

bringen läßt (§. 62 Formel (1)), wobei die angehängten Indices 0, 1 anzeigen, daß der Gränzwerth θ_0 resp. θ_1 gesetzt werden solle. Insofern also in F, N, $\mathfrak{N}$, ... blos trigonometrische Functionen von θ vorkommen, wird für $\theta_1 = \theta_0 + 2\pi$ der

rung, daß bei dem Variiren der Gränzcurve der Perimeter die unveränderliche Länge gleich $\mathfrak{A}$ behalten solle, wird daher, zufolge (8), durch

$$(9)\qquad \int \Big\{ \Big(d\frac{dy}{ds} + q\, d\frac{dz}{ds} \Big)\, {}_{(\delta)}y + d\frac{dz}{ds}\, {}_{(\delta)}z \Big\}\, d\varsigma = 0$$

ausgedrückt. Multiplicirен wir diese Bedingungsgleichung mit einem unbestimmten Factor λ, addiren dann die Coefficienten von ${}_{(\delta)}y$ und ${}_{(\delta)}z$ zu den entsprechenden Größen in (1) und setzen schließlich jeden Coefficienten einzeln gleich Null: so entstehen zwei Gleichungen, welchen man unter Berücksichtigung von

$$\frac{\partial_y \Gamma}{\sqrt{(\partial_x\Gamma)^2 + (\partial_y\Gamma)^2}} = \mp \frac{dx}{d\varsigma} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial_x \Gamma}{\sqrt{(\partial_x\Gamma)^2 + (\partial_y\Gamma)^2}} = \pm \frac{dy}{d\varsigma}$$

die Form geben wird

$$(10)\qquad \begin{aligned} \mathrm{V}dx - \lambda\Big(d\frac{dy}{ds} + q\, d\frac{dz}{ds}\Big) &= 0 \\ (\partial_q \mathrm{V}\, dx - \partial_p \mathrm{V}\, dy) - \lambda\, d\frac{dz}{ds} &= 0 \end{aligned}$$

IV) Um die Anwendung dieser allgemeinen Vorschriften an einem leichten Falle zu zeigen, wollen wir annehmen, es handele sich wie in §. 76 um die Fläche mit dem kleinsten Inhalte, welche bei unbestimmter Gestalt aber gegebener Länge der Begränzungslinie ($= \mathfrak{A}$) oder, wenn diese aus mehreren verschiedenen Stücken zusammengesetzt ist, bei gegebener Länge der Summe dieser Stücke möglich ist. Alsdann ist

$$\mathrm{V} = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}, \qquad \partial_p \mathrm{V} = \frac{p}{\mathrm{V}}, \qquad \partial_q \mathrm{V} = \frac{q}{\mathrm{V}}$$

und in Gemäßheit der so eben entwickelten Gleichungen (10) haben wir die zwei Bedingungen

$$(11)\qquad \begin{aligned} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dx - \lambda d\frac{dy}{ds} - \lambda q d\frac{dz}{ds} &= 0 \\ \frac{q}{\mathrm{V}} dx - \frac{p}{\mathrm{V}} dy - \lambda d\frac{dz}{ds} &= 0 \end{aligned}$$

Werth von F, N, $\mathfrak{N}$, ... ganz derselbe sein wie für θ_0; und da die Variationen $\delta\theta$, ${}_{(\delta)}r$, ${}_{(\delta)}z$, ... mit dem Index 1 sich auf denselben Punkt der Curve beziehen, wie wenn sie mit dem Index 0 behaftet sind, so folgt, daß das ganze Aggregat durch paarweises Aufheben der einzelnen Bestandtheile zu Null wird. Hierin liegt zugleich der Grund davon, daß sich im vorigen Paragraphen bei dem Uebergange von der Formel (3) zu (7) keine vom Integralzeichen befreiten Glieder mit $\delta\xi$, $\delta\alpha$ eingestellt haben.

Setzen wir also z. B. voraus, daß in Folge anderweiter Bedingungen, die bekanntlich zur völligen Bestimmtheit des mit zwei willkührlichen Functionen versehenen Integrals der Hauptgleichung jedenfalls noch erforderlich sind, längs des Perimeters der Projection $F(x, y) = 0$ die Ordinate z einen constanten Werth besitzen solle, so nimmt wegen $dz = 0$ die zweite der vorstehenden Gleichungen die Gestalt an:

$$qdx - pdy = 0$$

deren Zusammenstellung mit $dz = pdx + qdy = 0$ sofort zu dem Ergebnis führt, daß längs des fraglichen Perimeters $p = 0$, $q = 0$ sein müße. Hiernach reducirt sich die erste der Gleichungen (11) auf

$$dx - \lambda d\frac{dy}{ds} = 0$$

Dieses ist dieselbe Gleichung, wie die in §. 40 mit (1) numerirte, und führt also durch Integration zur Gleichung eines Kreises mit dem Halbmeßer $\pm\lambda$. Freilich zielt diese Auflösung, insofern die Curve Γ eine geschloßene Kreislinie sein müßte, nicht sowohl auf ein Minimum als auf ein Maximum des Flächeninhalts. Das gefundene Resultat wird indessen brauchbar, wenn wir an der vorgelegten Aufgabe eine geringe Modification anbringen. Denken wir uns nämlich, die gesuchte Minimumsfläche solle zwischen zwei mit der Ebene YZ parallelen Gränzebenen enthalten sein, die zu den festen Abscissen $x = \alpha$, $x = \xi$ gehören, es handele sich also um ein Viereck ACDB, von dessen Eckpunkten die Projectionen A′, B′, C′, D′ gegeben seien. Unter der obigen Voraussetzung, daß z längs des Perimeters der Gränzcurve constant sein solle, würde man alsdann einen Kreisbogen von C′ nach D′, einen andern von A′ nach B′ so zu ziehen haben, daß beide ihre Convexität einander zukehrten. Man würde nämlich von den Gleichungen (11) jetzt eine zweimalige Anwendung zu machen haben, indem man unter x, y das eine Mal die zusammengehörigen Coordinaten eines Punkts der von C′ nach D′ zu ziehenden Curve $\eta = \chi_2(x)$, das andere Mal die Coordinaten eines Punkts der Curve A′B′ ($\beta = \chi_1(x)$) zu verstehen hätte. Die sechs vom Integralzeichen befreiten Glieder in (7) sind diesmal wegen $\delta\xi = 0$, $\delta\alpha = 0$, ${}_{(\delta)}\eta_\xi = 0$, ${}_{(\delta)}\eta_\alpha = 0$, $dz = 0$ einzeln gleich Null, und dasselbe gilt von den andern sechs Gliedern, welche aus der Variation des Bogens AB entspringen.

Anhang.

Ueber den Gebrauch der Variationen in der Mechanik.

§. 81.

Der ausgedehnteſte Gebrauch von Variationen veränderlicher Größen wird in der theoretiſchen Mechanik gemacht; indeſſen könnte in vielen Fällen leicht ein Zweifel darüber entſtehen, ob den in die Rechnung eingeführten Variationen genau dieſelbe Bedeutung zukäme, die in unſerm erſten Capitel feſtgeſtellt und in dem weitern Verlauf unſerer Unterſuchungen fortwährend beibehalten worden iſt. Einige Erläuterungen über dieſen Gegenſtand dürften daher hier einen geeigneten Ort finden.

Zuerſt werden gewöhnlich in der Statik bei der Begründung und Anwendung des „Princips der virtuellen Geſchwindigkeiten“ gewiße Variationen benutzt. Wenn an den Angriffspunkten A, B, C, ... eines beweglichen Syſtems die Kräfte P, P', P'', ... wirken und einander Gleichgewicht halten, ſo wird, wenn man das Syſtem in eine von der Gleichgewichtslage unendlich wenig abweichende Poſition abc ... verſchiebt und jeden der unendlich kleinen Wege Aa, Bb, Cc, ꝛc. auf die Richtungslinien der an demſelben Angriffspunkte wirkenden Kräfte projicirt, wenn man ferner dieſe Projectionen mit δp, $\delta p'$, $\delta p''$, ... bezeichnet und jede einzelne als poſitive oder negative Größe in Rechnung bringt, je nachdem ſie in die Richtung der Kraft oder auf die rückwärts gehende Verlängerung dieſer Richtungslinie gefallen iſt, die Summe aller Produkte $P\delta p$, $P'\delta p'$, $P''\delta p''$, u. ſ. w. nämlich die Summe der ſogenannten virtuellen Momente der Kräfte P, P', P'', ... gleich Null ſein. Die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht iſt alſo

$$P\delta p + P'\delta p' + P''\delta p'' + \ldots = 0 \quad \text{oder} \quad \Sigma P\delta p = 0$$

Zerlegt man aber jede einzelne Kraft in drei Componenten parallel zu den Coordinatenaxen, nämlich P in X, Y, Z, P' in X', Y', Z', u. ſ. f. ſo entſtehen an jedem einzelnen Angriffspunkte A, B, ... drei virtuelle Momente von der Form $X\delta x$, $Y\delta y$, $Z\delta z$ und die vorige Bedingungsgleichung erhält die Geſtalt

$$(1) \qquad \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

Die Variationen δx, δy, δz sind hier ebenso willkührlich, wie die vorher gedachten unendlich kleinen Wege Aá, Bb, Cc ꝛc. Bei der Anwendung auf specielle Fälle wird jedoch vermöge der zwischen den Angriffspunkten A, B, ... Statt findenden Verbindung, oder weil einige Punkte des Systems auf gegebenen festen Curven oder festen krummen Flächen fortzurücken genöthigt sind, nicht jede beliebige Verschiebung gleich möglich, es werden vielmehr zwischen den in (1) vorkommenden Variationen gewiße Bedingungsgleichungen zu beobachten sein, mittelst deren man einige jener Variationen durch die anderen auszudrücken im Stande ist. Indem man nachher die Coefficienten der übrigen einzeln gleich Null setzt, erhält man diejenigen Gleichungen, aus welchen je nach der Beschaffenheit des Falls entweder die der Gleichgewichtslage entsprechenden Werthe der Coordinaten von einigen Angriffspunkten, oder die erforderliche Richtung und Intensität der einen oder anderen Kraft zu bestimmen sind.

Im Rückblick auf die Bedeutung, welche in diesen Entwickelungen der Mechanik die Variationen δp, $\delta p'$, $\delta p''$, ... δx, δy, δz, $\delta x'$, ... haben, muß nun wohl eingeräumt werden, daß man an variirende Functionen independenter Variablen im Sinne unseres ersten Capitels hier nicht zu denken habe und daß also ein besonderer Grund zur Anwendung des Variationszeichens δ nicht vorliege. Die Sache gewinnt aber ein anderes Ansehen, sobald an die Stelle der bisher gedachten, abgesonderten Angriffspunkte die beliebigen *Punkte eines continuirlichen Gebildes* treten, sobald es sich also darum handelt, die Gleichgewichtslage einer materiellen *Linie* oder *Fläche* (eines Fadens oder einer krummflächigen Schicht von verschwindender Dicke) unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß nach einem gegebenen Gesetze jeder Punkt dieses Gebildes von einer Kraft gezogen bezw. gehalten wird. Bei den Untersuchungen dieser Art hat man, wenn x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punkts M in der Gleichgewichtslage sind, *zwei Arten von unendlich kleinen Incrementen* zu unterscheiden. Man kann nämlich erstens auf dem im Gleichgewichte befindlichen Systeme selbst vom Punkt M zu einem nächstanliegenden Punkte M′ fortschreiten. Zweitens aber wird, wenn man das System in eine beliebige, jedoch mit den in der Aufgabe liegenden Beschränkungen verträgliche und von der Gleichgewichtslage unendlich wenig verschiedene Position verschoben hat, irgend ein Punkt M_1 existiren, welcher die Stelle angiebt, wohin bei der gedachten Verrückung der Punkt M gekommen ist. Die Coordinaten von M′ werden dann in herkömmlicher Weise durch

$x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ angezeigt, die Coordinaten von M_1 aber durch $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$. Die hier eingeführten Variationen sind offenbar als unbestimmte Functionen der Coordinaten des Punkts M aufzufaßen; diese Coordinaten selbst kann man sich daher jetzt im Sinne des §. 2 als variirende Functionen denken, und es laßen sich über die Verschiebung des continuirlichen Systems aus der Gleichgewichtslage in eine unendlich wenig abweichende Position dieselben Betrachtungen aufstellen und dieselben Folgerungen machen, wie im Anfange von Cap. I und Cap. V (§. 2 fgg. §. 54), insbesondere finden z. B. die in §. 3 oder in §. 56 und §. 57 gegebenen geometrischen Erläuterungen über $d\delta x$, $d\delta y$, ꝛc. und über die Identität $\delta dx = d\delta x$, $\delta dy = d\delta y$ u. s. w. vollkommene Anwendung.

Aus diesem Grunde macht sich denn auch eine gewiße Analogie bemerklich zwischen den Bedingungsgleichungen für die Gleichgewichtslage von begränzten Linien oder Flächen und den Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der Maxima und Minima bestimmter Integrale. Wenn nämlich jeder Punkt einer materiellen Linie von einer Kraft gezogen wird, die nach Intensität und Richtung bei dem Fortschreiten von Punkt zu Punkt sich ändern mag und am Punkte x, y, z die drei nach den Richtungen der Coordinatenaxen laufenden Componenten Xdm, Ydm, Zdm liefert, worin dm die Masse des Elements der materiellen Linie, also X, Y, Z die sogenannten Beschleunigungen bedeuten; so tritt an die Stelle der Summe, welche den ersten Theil der Gleichung (1) bildet, das Integral

$$(2) \qquad \int (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)dm$$

Denkt man sich nun, es existirte eine Function $V = F(x, y, z)$, deren Differential durch das Trinom $Xdx + Ydy + Zdz$ angegeben wird, so ist offenbar

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = \delta V$$

und die Bedingung für das Gleichgewicht, nämlich $\int \delta V dm = 0$, sieht jetzt gerade so aus als wenn man nach den Regeln der Variationsrechnung das Maximum oder Minimum des Integrals $\int V dm$ zu bestimmen beabsichtigte.

Soll der gedachte Faden unausdehnsam sein, so ist, wenn ds das Bogenelement bezeichnet, die Bedingung $\delta ds = 0$ d. h.

$$(3) \qquad \frac{dx}{ds} d\delta x + \frac{dy}{ds} d\delta y + \frac{dz}{ds} d\delta z = 0$$

in dem Calkul zu berücksichtigen. Dieses ist eine Bedingungsgleichung von der in §. 47 besprochenen Gattung $\delta\Theta = 0$; man müßte sie nur, damit

lauter Differentialquotienten darin vorkämen, durch das Differential dm dividiren, welches gegenwärtig an die Stelle des dortigen dx getreten ist. Man wird also nach der dort erläuterten Regel den durch dm dividirten linken Theil der Gl. (3) mit λdm multipliciren, wobei sich der Factor dm gegen den erwähnten Divisor dm aufhebt, das Produkt unter dem Integralzeichen in (2) addiren, alsdann die Differentialien $d\delta x$, $d\delta y$, $d\delta z$ mittelst partieller Integration auf δx, δy, δz zurückführen, und schließlich die Coefficienten von δx, δy, δz einzeln gleich Null setzen. Die Rechnung gestaltet sich daher jetzt gerade so, als wenn man das durch die Bedingung $\delta\Theta = 0$ oder $\int\lambda\delta\Theta = 0$ beschränkte, d. h. ein relatives Maximum oder Minimum von $\int V dm$ zu bestimmen hätte. Wählen wir ds zur independenten Variablen und setzen $dm = \varepsilon ds$, so daß ε das Produkt des Querschnitts des Fadens in seine Dichtigkeit angiebt, so gelangen wir durch Ausführung der angedeuteten Operationen sogleich zu dem Systeme der drei Gleichungen

$$X\varepsilon ds - d\left(\lambda\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

$$Y\varepsilon ds - d\left(\lambda\frac{dy}{ds}\right) = 0$$

$$Z\varepsilon ds - d\left(\lambda\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

Rücksichtlich der weiteren Behandlung dieser Gleichungen dürfen wir auf die Lehrbücher der Mechanik verweisen.*) Es wird daselbst auch gezeigt, daß $-\lambda$ die Spannung des Fadens im Punkte x, y, z ist.

§. 82.

Im zweiten Theile der Mechanik, in der sogenannten Dynamik, pflegt man die Variationen dann zu benutzen, wenn man nach dem D'Alembert'schen Principe gewiße hypothetische Kräfte einführt, welche in Verbindung mit den wirklich vorhandenen Kräften das bewegliche System im Gleichgewicht zu halten vermöchten, um alsdann auf die Gesammtheit aller dieser Kräfte das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten anwenden zu können und dadurch die gewünschten Bedingungsgleichungen zu gewinnen.

*) Lagrange Méc. analyt. première partie, sect. V art. 29. Poisson Mée. No. 298. Duhamel Anal. Mech. I. No. 95. Minding theor. Mech. No. 43. Ohm Mech. II §. 136. Ettingshausen Vorles. II p. 324.

Da nämlich durch $d\frac{dx}{dt}$, $d\frac{dy}{dt}$, $d\frac{dz}{dt}$ die während des Zeitdifferentials dt entstehenden Zuwächse der nach den Richtungen der Coordinatenaxen geschätzten Geschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ angegeben werden, so sind $m\frac{d^2x}{dt^2}$, $m\frac{d^2y}{dt^2}$, $m\frac{d^2z}{dt^2}$ drei Kräfte, welche am Punkte M $[x, y, z]$ angebracht der daselbst vereinigten Masse m, falls dieselbe ganz frei wäre, die nämliche Beschleunigung ertheilen würden, wie diejenige, welche sie vermöge ihres Zusammenhangs mit den übrigen Elementen des beweglichen Systems bei der Gesammtwirkung der an den verschiedenen Angriffspunkten thätigen Kräfte wirklich erhält. Bezeichnen wir daher die einzelnen Elemente (materiellen Punkte, Molekül) des Systems durch m_1, m_2, m_3, ... und fügen die gleichen Ziffern als Indices an die Coordinaten x, y, z so wie an die Componentensumme X, Y, Z der am betreffenden Punkte wirkenden Kräfte; so muß, wenn

an m_1 die drei Kräfte $-m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}$, $-m_1\frac{d^2y_1}{dt^2}$, $-m_1\frac{d^2z_1}{dt^2}$

an m_2 " " " $-m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}$, $-m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}$, $-m_2\frac{d^2z_2}{dt^2}$

u. s. w. angebracht werden, die Gesammtheit dieser (hypothetischen) Kräfte der Gesammtheit aller wirklich vorhandenen Kräfte X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, X_3, ... das Gleichgewicht halten. Dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zufolge besteht also die Bedingung

$$(1) \qquad \Sigma\left\{(X - m\frac{d^2x}{dt^2})\delta x + (Y - m\frac{d^2y}{dt^2})\delta y + (Z - m\frac{d^2z}{dt^2})\delta z\right\} = 0$$

Das Summenzeichen erstreckt sich wieder wie im vor. §. auf alle Moleküle des Systems; und gerade wie dort wird auch hier durch die Variationen δx, δy, δz angezeigt, daß man das bewegliche System aus der Lage, welche es zur Zeit t eingenommen hat (indem man den Werth von t beliebig annimmt aber in Gedanken unveränderlich beibehält) auf eine solche Weise, die von der zwischen den Molekülen m_1, m_2, m_3, ... m_n bestehenden Verbindung gestattet wird, unendlich wenig verschieben solle. Bestände zwischen den n Molekülen gar keine Verbindung, und wäre nicht etwa das eine oder andere gezwungen auf einer festen Fläche oder Curve sich zu bewegen, so würden alle Variationen in (1), deren Anzahl 3n ist, von einander unabhängig, ihre Coefficienten also einzeln gleich Null zu

setzen sein. Man erhielte dadurch ein System von 3n Differentialgleichungen, worin t als die den gesuchten Functionen $x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots x_n, y_n, z_n$ zu Grunde liegende Independente aufträte und welches zur Bestimmung jener Coordinaten gerade ausreichen würde. Wenn dagegen, wie es bei den Anwendungen der Fall sein wird, eine gewiße Anzahl von Bedingungen vorliegt, etwa von der Form

$$\begin{array}{l} \Theta_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n) = 0 \\ \Theta_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n) = 0 \\ \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \Theta_i(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n) = 0 \end{array} \tag{2}$$

so werden von den 3n Variationen in (1) nur noch $3n - i$ ganz willkührlich sein; man wird dann die Bedingungsgleichungen $\delta\Theta_1 = 0$, $\delta\Theta_2 = 0$ u. s. w. mit den unbestimmten Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_i$ multipliciren und auf die bekannte Weise verfahren (§. 18 III. §. 22 II), so daß man schließlich, nach der Elimination der Factoren λ und unter Zuziehung der Gleichungen (2), wieder genau 3n Bestimmungsgleichungen für die 3n Coordinaten erhält. — Wenn man z. B. statt des Systems $m_1, m_2, \ldots m_n$ nur einen einzigen materiellen Punkt m zu betrachten hätte, auf welchen die Kräfte X, Y, Z continuirlich wirkten, und wenn dieser genöthigt wäre auf einer unbeweglichen und seinem Drucke widerstehenden Fläche

$$\Theta(x, y, z) = 0$$

zu bleiben; so würde man auf dem angedeuteten Wege sofort zu den drei Gleichungen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m} + \lambda\partial_x\Theta, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{m} + \lambda\partial_y\Theta, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{m} + \lambda\partial_z\Theta \tag{3}$$

gelangen, welche gewöhnlich in den Lehrbüchern der Mechanik noch auf andere Weise abgeleitet werden, so daß der Ausdruck $\frac{N}{\sqrt{(\partial_x\Theta^2 + \partial_y\Theta^2 + \partial_z\Theta^2)}}$, worin N den von der Fläche geleisteten Gegendruck bedeutet, an die Stelle unseres λ tritt.

Um aber näher auf die Frage einzugehen, ob auf die hier eingeführten „mechanischen Variationen" die in unserm ersten beziehgsw. fünften Capitel gegebenen Erklärungen noch zutreffen, bemerken wir zunächst, daß die Gleichung (1) für jeden beliebigen Augenblick, d. h. für jeden Werth von t gültig ist, daß aber, wenn man sie auf zwei verschiedene Zeitmomente anwendet, vermöge der zwischen den Molekülen bestehenden Verbindung nicht beide Male die nämliche Verschiebung des Systems möglich

sein wird, d. h. daß man den $3n$ Variationen das zweite Mal nicht mehr dieselben Werthe ertheilen kann, wie in dem frühern Augenblick, mag nun die vorausgesetzte Verbindung in Form von unausdehnsamen aber biegsamen, oder von elastischen Verbindungsfäden zwischen den einzelnen Molekülen gedacht werden, oder in Form von beweglichen Canälen oder sonst auf irgend eine Art gegeben sein. Es folgt hieraus, daß man sich vorstellen muß, die in Rede stehenden Variationen erlitten im Allgemeinen mit wachsendem t allmählige Aenderungen, d. h. sie wären Functionen von t. Will man die Sache sich systematischer zurecht legen, so kann man das Problem der Bestimmung der von allen n Molekülen verfolgten Bahnen bereits aufgelöst denken. Alsdann sind die $3n$ Coordinaten gewisse Functionen von t, zu deren vollständigen Bestimmung freilich die Coordinaten derjenigen Punkte, wo sich die Moleküle $m_1, m_2, \ldots m_n$ bei dem Anfange der Bewegung befunden haben, so wie ihre Anfangsgeschwindigkeiten oder dgl. bekannt sein müßten. Es sei also

$$x_1 = \psi_1(t), \quad y_1 = \varphi_1(t), \quad z_1 = \chi_1(t); \quad x_2 = \psi_2(t) \ldots\ldots \quad z_n = \chi_n(t)$$

Man versetze diese Functionen jetzt in den Zustand des Variirens, in der Weise, daß an die Stelle von ψ_1, φ_1, χ_1, ψ_2 &c. solche Ausdrücke wie $\Psi_1(t, \mathfrak{t})$, $\Phi_1(t, \mathfrak{t})$, $X_1(t, \mathfrak{t})$, $\Psi_2(t, \mathfrak{t})$ u. s. w. treten, welche sich für $\mathfrak{t} = 0$ auf ψ_1, φ_1, χ_1, ψ_2 u. s. w. reduciren. Wenn i dieselbe Zahl bedeutet wie oben, so sind $3n - i$ von den Functionen Ψ, Φ, X keiner weiteren Beschränkung unterworfen, die übrigen i dagegen müßen so eingerichtet werden, daß sie den Gleichungen (2) Genüge leisten, und würden sich, so oft man die Form der ersteren auf die eine oder andere Art angenommen hätte, aus jenen Gleichungen bestimmen laßen. Durch diese Betrachtung sind wir aber genau auf den am Anfange des fünften Capitels eingenommenen Standpunkt zurückgeführt (§. 54 III). Je drei zusammengehörige Gleichungen

$$x = \Psi(t, \mathfrak{t}) \qquad y = \Phi(t, \mathfrak{t}) \qquad z = X(t, \mathfrak{t})$$

wobei x, y, z, Ψ, Φ, X mit einem der Indices von 1 bis n zu versehen sind, beziehen sich auf eine Curve, welche für $t = 0$ mit der von dem betreffenden Molekül durchlaufenen zusammenfällt, und für $t = \tau$ derselben nächst anliegt. Es giebt ferner, wenn in irgend einem Augenblicke die Moleküle $m_1, m_2, \ldots m_n$ auf den wirklich von ihnen beschriebenen Bahnen in die Orte $M_1, M_2, \ldots M_n$ gelangt sind, ein System von Punkten $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_n$, wohin bei einer fingirten, durch das System der Gleichungen

$x_1 = \Psi_1(t, \tau)$, $y_1 = \Phi_1(t, \tau)$, $z_1 = X_1(t, \tau)$; $x_2 = \Psi_2(t, \tau)$ u. s. w. vorgeschriebenen Bewegung für denselben Werth der Independenten t die beweglichen Punkte gerückt sein würden. Und weil die Bedingungsgleichungen (2) erfüllt sind, so ist es in jedem Augenblicke möglich, die Moleküle aus den Punkten M_1, M_2, ... M_n in die entsprechenden Punkte $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ... $\mathfrak{M}_n$ zu verschieben. Hiernach kann an der Bedeutung der in Beziehung auf t zu nehmenden Differentialien von Variationen der Coordinaten, wie $d\delta x$, oder der Variationen von Geschwindigkeits-Componenten, wie $\delta \frac{dx}{dt} = \frac{d\delta x}{dt}$, oder überhaupt an dem Sinne jener Operationen, welche man das „Differentiiren mittelst des Zeichens δ" (la différentiation par rapport à la caractéristique δ) zu nennen pflegt, nicht die geringste Unklarheit mehr haften. Insbesondere leuchtet ein, daß innerhalb dieses Gebiets der Mechanik bei allen durch das Zeichen δ angezeigten Differentiationen die Independente t als eine Constante zu behandeln sei, daß man also $\delta t = 0$, $\delta dt = 0$ u. s. w. zu setzen habe.

Die Beachtung dieser Beziehungen zwischen beiden Arten von Differentiationen ist darum von Wichtigkeit, weil in den hier von uns besprochenen Entwickelungen der Dynamik die Differentialien von Variationen, oder Variationen von Differentialien beziehgsw. Differentialquotienten, häufig vorkommen. Um die Uebersicht zu vollenden, verdient jedoch bemerkt zu werden, daß wenn anstatt eines discreten, d. h. aus abgesonderten materiellen Punkten bestehenden Systems die Bewegung eines continuirlichen Gebildes betrachtet werden soll, auch hier, gerade wie bei der analogen, im vorigen Paragraphen erklärten statischen Untersuchung, noch eine andere Art von Incrementen der Coordinaten zu unterscheiden sei. Alsdann könnte man es nämlich manchmal für zweckmäßig erachten, unter $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ nicht die Coordinaten desjenigen Punkts zu verstehen, wohin die in M $[x, y, z]$ zur Zeit t befindlich gewesene Masse m während des Zeitdifferentials fortgerückt ist, sondern die zur Zeit t gemeßenen Coordinaten eines solchen Punkts M', welcher auf der in Bewegung begriffenen Linie oder Fläche, oder überhaupt in der beweglichen Masse dem Punkte M nächst anliegt. Da die in diesem Sinne genommenen Differentialien von x, y, z ebenso wenig mit dem continuirlichen Wachsen von t wie mit dem in die vorausgehenden Betrachtungen eingeführten Variationsargumente t einen Zusammenhang haben, so wäre es

als eine Consequenz zu rechtfertigen, wenn man neben d und δ noch ein drittes Zeichen für unendlich kleine Aenderungen anwenden wollte. Indessen hat man dies bis jetzt in den wenigen Fällen, wo man außer den Variationen noch die beiden erwähnten Arten von Differentialien wirklich in Betrachtung zu ziehen hatte, z. B. bei der Entwickelung der Differentialgleichungen für die Bewegung der flüßigen Körper, dadurch entbehrlich gemacht, daß man wenigstens so lange als möglicher Weise eine Irrung hätte entstehen können, die nach den Richtungen der Coordinatenaxen genommenen Geschwindigkeits-Componenten durch besondere Buchstaben u, v, w bezeichnete. *) Hierdurch ergeben sich nämlich für die in der einen Bedeutung genommenen Differentialien dx, dy, ds die gleichwerthigen Ausdrücke udt, vdt, wdt; ferner tritt $\frac{du}{dt}$ an die Stelle von $\frac{d^2x}{dt^2}$, u. s. w.

§. 83.

Gar häufig besitzen die Bedingungsgleichungen, durch welche für die im vorigen Paragraphen gedachte Verschiebbarkeit der n Molekülе des beweglichen Systems gewiße Schranken gesetzt sind, nicht die einfache Gestalt, wie wir bei (2) angenommen hatten, vielmehr wird man es leicht finden durch Einführung von andern Hülfsvariablen ϑ, φ, ψ, ... z. B. von Polarwinkeln, oder gewißen Abständen u. dgl. die 3n Coordinaten einzeln auszudrücken, so daß etwa

$$
\begin{aligned}
x_1 &= F_1(t, \vartheta, \varphi, \psi, \ldots)\\
y_1 &= \mathfrak{F}_1(t, \vartheta, \varphi, \psi, \ldots)\\
z_1 &= \mathfrak{F}_1(t, \vartheta, \varphi, \psi, \ldots)\\
x_2 &= F_2(t, \vartheta, \varphi, \psi, \ldots)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\\
z_n &= \mathfrak{F}_n(t, \vartheta, \varphi, \psi, \ldots)
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

ist. Es wird hierbei die Möglichkeit berücksichtigt, daß unter den Argumenten der Functionen F, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}$ auch t explicit vorkomme. — Man könnte

*) Vgl. Poisson Méc. No. 649. Duhamel Anal. Mech. T. II No. 166. Dagegen bedient sich Lagrange (Méc. anal. seconde partie, sect. XI art. 2) ganz in derselben Entwickelung des Buchstabens D als eines dritten Differentiationszeichens, welches er später (article 10), da nur noch partielle Differentialquotienten übrig geblieben sind, wieder mit d vertauscht.

nun zwar mit der Elimination von ϑ, φ, ψ, ... aus vorstehenden Gleichungen beginnen, worauf man eine Anzahl (=i) von Bedingungsgleichungen wie (2) gewinnen würde. Allein man wird sich die Rechnung meistentheils erleichtern, wenn man gerade umgekehrt darauf ausgeht, aus (1) sämmtliche Coordinaten nebst ihren Differentialien und Variationen fortzuschaffen, nämlich durch die Variablen ϑ, φ, ψ, ... nebst deren Differentialien und Variationen zu ersetzen, und alsdann, indem man die transformirte Gleichung in so viele Einzelgleichungen zerfällt, als es von einander unabhängige Variationen $\delta\vartheta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$, ... giebt, die Variablen ϑ, φ, ψ, ... als Functionen von t zu bestimmen, welche man schließlich in (4) zu substituiren hätte. Lagrange hat zu diesem Zwecke gewiße allgemeine Gleichungen von sehr merkwürdiger Einfachheit aufgestellt *), wodurch in den meisten Fällen dem Calkul die größte Geschmeidigkeit verschafft wird. Da es manchem unserer Leser vielleicht angenehm ist dieselben hier zu finden, und da sich bei ihrer Herleitung das im vorigen Paragraphen über das Vorkommen von Differentialien der Variationen Gesagte bestätigt, so laßen wir dieselben hier folgen.

Aus drei beliebigen jedoch in Rücksicht auf den Index von m zusammengehörigen Gleichungen in (4) erhält man

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dF}{dt} + \frac{dF}{d\vartheta}\vartheta' + \frac{dF}{d\varphi}\varphi' + \frac{dF}{d\psi}\psi' + \cdots \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d\mathfrak{f}}{dt} + \frac{d\mathfrak{f}}{d\vartheta}\vartheta' + \frac{d\mathfrak{f}}{d\varphi}\varphi' + \frac{d\mathfrak{f}}{d\psi}\psi' + \cdots \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{d\mathfrak{F}}{dt} + \frac{d\mathfrak{F}}{d\vartheta}\vartheta' + \frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi}\varphi' + \frac{d\mathfrak{F}}{d\psi}\psi' + \cdots \end{aligned}$$

worin ϑ', φ', ψ', .. die Derivirten der gesuchten Functionen ϑ, φ, ψ, ... bedeuten. Außerdem folgt aus (4) auch

$$(6)\qquad \begin{aligned} \delta x &= \frac{dF}{d\vartheta}\delta\vartheta + \frac{dF}{d\varphi}\delta\varphi + \frac{dF}{d\psi}\delta\psi + \cdots \\ \delta y &= \frac{d\mathfrak{f}}{d\vartheta}\delta\vartheta + \frac{d\mathfrak{f}}{d\varphi}\delta\varphi + \frac{d\mathfrak{f}}{d\psi}\delta\psi + \cdots \\ \delta z &= \frac{d\mathfrak{F}}{d\vartheta}\delta\vartheta + \frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi}\delta\varphi + \frac{d\mathfrak{F}}{d\psi}\delta\psi + \cdots \end{aligned}$$

*) Mée. analyt. seconde partie, Sect. IV. Dieselben sind neuerdings in einem gewißen Betrachte schärfer begründet und durch einige interessante Aufgaben erläutert worden von Bieille in Liouville Journ. T. XIV (1849) p. 201. Von dieser Abhandlung findet man in Grunert's Archiv für Math. u. Phys. T. XVIII p. 91 eine von Dienger gelieferte Uebersetzung (worin sich jedoch einige auch im Original vorkommende kleine Versehen eingeschlichen haben).

Um nun die Substitution dieser Ausdrücke in (1) bequem ausführen zu können, wird eine gewiße Transformation des Summenausdrucks, welcher den linken Theil der Gl. (1) bildet, sehr förderlich sein. Man kann nämlich demselben auch die Gestalt

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) - \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$

geben, und da

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z = \frac{1}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right) - \tfrac{1}{2}\delta\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)$$

ist, so verwandelt sich die Gleichung (1) in

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + \tfrac{1}{2}\Sigma m\,\delta\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) - \Sigma m\frac{1}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right) = 0 \qquad (7)$$

Hierin hätte man jetzt die in (5) und (6) angezeigten Werthe für $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, δx, δy, δz einzusetzen und das entstehende Aggregat nach den Variationen $\delta\vartheta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$, ꝛc. zu ordnen. Da aber, so lange wir den Calkul in der bisherigen Allgemeinheit durchführen, die Variablen ϑ, φ, ψ, ... überall symmetrisch auftreten, so reicht es hin, den Coefficienten von $\delta\vartheta$ allein zu berechnen, weil aus ihm durch einfache Vertauschung der betreffenden Buchstaben die Coefficienten der übrigen Variationen $\delta\varphi$, $\delta\psi$, ꝛc. gebildet werden können.

Wenn wir nun die Formeln (5) in's Quadrat erheben und der Kürze wegen

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{F}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{F}}{dt}\right)^2 = G, \qquad \frac{dF}{dt}\frac{dF}{d\vartheta} + \frac{d\mathfrak{F}}{dt}\frac{d\mathfrak{F}}{d\vartheta} + \frac{d\mathfrak{F}}{dt}\frac{d\mathfrak{F}}{d\vartheta} = H$$

$$\left(\frac{dF}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{F}}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{d\mathfrak{F}}{d\vartheta}\right)^2 = J, \qquad \frac{dF}{d\vartheta}\frac{dF}{d\varphi} + \frac{d\mathfrak{F}}{d\vartheta}\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi} + \frac{d\mathfrak{F}}{d\vartheta}\frac{d\mathfrak{F}}{d\varphi} = K$$

$$\frac{dF}{d\vartheta}\frac{dF}{d\psi} + \frac{d\mathfrak{F}}{d\vartheta}\frac{d\mathfrak{F}}{d\psi} + \frac{d\mathfrak{F}}{d\vartheta}\frac{d\mathfrak{F}}{d\psi} = L$$

setzen, so erhalten wir

$$\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{ds^2}{dt^2}=G+2H\vartheta'+J\vartheta'^2+2K\vartheta'\varphi'+2L\vartheta'\psi'+\cdots$$

also $\frac{1}{2}\delta\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{ds^2}{dt^2}\right)=$

$$(8)\quad \left[\frac{1}{2}\frac{dG}{d\vartheta}+\frac{dH}{d\vartheta}\vartheta'+\frac{1}{2}\frac{dJ}{d\vartheta}\vartheta'^2+\frac{dK}{d\vartheta}\vartheta'\varphi'+\frac{dL}{d\vartheta}\vartheta'\psi'+\cdots\right]\delta\vartheta$$
$$+[H\quad +J\vartheta'\quad +K\varphi'\quad +L\psi'\quad +\cdots]\delta\vartheta'$$
$$+\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

Die nicht hingeschriebenen Glieder sind mit den Variationen $\delta\varphi$, $\delta\psi$, ... resp. $\delta\varphi'$, $\delta\psi'$, ... behaftet.

Andererseits fließt aus (5) und (6), wenn wir uns auch hier auf die Entwickelung der Glieder mit $\delta\vartheta$ und $\delta\vartheta'$ beschränken,

$$\frac{dx}{dt}\delta x+\frac{dy}{dt}\delta y+\frac{dz}{dt}\delta z=(H+J\vartheta'+K\varphi'+L\psi'+\cdots)\delta\vartheta$$

also

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x+\frac{dy}{dt}\delta y+\frac{dz}{dt}\delta z\right)=\frac{d}{dt}(H+J\vartheta'+K\varphi'+L\psi'+\cdots).\delta\vartheta$$
$$(9)\qquad +(H+J\vartheta'+K\varphi'+L\psi'+\cdots).\delta\vartheta'$$

weil nämlich $\frac{d\delta\vartheta}{dt}=\delta\frac{d\vartheta}{dt}=\delta\vartheta'$ ist.

In diesen beiden Formeln (8) und (9) sind die Aggregate, welche den Factor $\delta\vartheta'$ mit sich führen, ganz identisch, und werden sich daher bei der Substitution in (7) gegen einander aufheben. Daß $\delta\vartheta'$ aus der Rechnung wieder ausfallen werde, konnte man im Voraus erwarten, und das Nämliche gilt von $\delta\varphi'$, $\delta\psi'$ ꝛc. Denn wenn man in die Gl. (1) noch ehe sie auf die Form (7) gebracht war, die Ausdrücke (5) und (6) substituirt hätte, so würden darin nur die Variationen $\delta\vartheta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$, ... und nicht ihre Derivirten eingetreten sein.

Schließlich erhält man noch, wenn man mit Hülfe von (6) diejenigen Bestandtheile der Summe $\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$ aufsucht, welche mit $\delta\vartheta$ multiplicirt sind, das Aggregat

$$(10)\qquad \Sigma\left(X\frac{dF}{d\vartheta}+Y\frac{df}{d\vartheta}+Z\frac{d\mathfrak{f}}{d\vartheta}\right).\delta\vartheta$$

Aus (8) (9) (10) folgt nun, daß bei der Entwickelung der transformirten Gleichung (7) die Summe aller derjenigen Glieder, welche von der Variation $\delta\vartheta$ abhängen, vollständig durch den Summenausdruck

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} \Sigma m\left(\frac{1}{2}\frac{dG}{d\vartheta}+\frac{dH}{d\vartheta}\vartheta'+\frac{1}{2}\frac{dJ}{d\vartheta}\vartheta'^2+\frac{dK}{d\vartheta}\vartheta'\varphi'+\frac{dL}{d\vartheta}\vartheta'\psi'+\cdots\right) \\ \quad -\Sigma m\frac{1}{dt}d(H+J\vartheta'+K\varphi'+L\psi'+\cdots) \\ \quad +\Sigma\left(X\frac{dx}{d\vartheta}+Y\frac{dy}{d\vartheta}+Z\frac{dz}{d\vartheta}\right) \end{array}\right\} d\vartheta$$

angegeben wird. Wir denken hierbei, daß auch in X, Y, Z die Independenten ϑ, φ, ψ, ... eingeführt worden seien.

Bekanntlich belegt man bei einem in Bewegung begriffenen Körper das Produkt seiner Masse in das Quadrat seiner Geschwindigkeit mit dem Namen „lebendige Kraft dieses Körpers"; und man dehnt diese Definition auch auf ein System mehrerer sich gleichzeitig bewegender Massen aus. Nennen wir daher die Summe

$$(12)\qquad \Sigma mv^2=\Sigma m\frac{ds^2}{dt^2}=\Sigma m\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)$$

die lebendige Kraft des Systems und bezeichnen dieselbe durch $2T$, so ist aus (8) zu schließen, daß der erste Summenausdruck in dem bei (11) gefundenen Coefficienten von $d\vartheta$ nichts anderes sei, als die Hälfte des in Beziehung auf die Variable ϑ genommenen partiellen Differentialquotienten von der lebendigen Kraft des Systems, nämlich $\frac{dT}{d\vartheta}$.

Ferner, da die in Beziehung auf t genommenen partiellen Differentialquotienten $\partial_t F$, $\partial_t \mathfrak{f}$, $\partial_t \mathfrak{F}$, deren Quadratsumme wir durch G vorgestellt hatten, den ursprünglichen Gleichungen (4) zufolge kein ϑ' enthalten, und da dasselbe von den übrigen Differentialquotienten gilt, aus welchen die Ausdrücke J, K, L, ... gebildet worden sind; so findet sich in G, H, J, K, ... kein ϑ' vor, folglich ist der zweite Summenausdruck in (11) gleichbedeutend mit $-\frac{1}{dt}d\frac{dT}{d\vartheta'}$, wie man ebenfalls aus (8) sogleich ersieht.

Endlich ist noch zu erinnern, daß bei den meisten Anwendungen eine Function $\Pi=F(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots x_n, y_n, z_n)$ existirt, deren Differential die Summe $\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz)$ ist, nämlich die sogenannte „Function der Kräfte", so daß

$$(13)\qquad \int\Sigma(Xdx+Ydy+Zdz)=\Pi+\text{Const.}$$

wird. Der dritte Bestandtheil des in (11) berechneten Coefficienten von

$\delta\vartheta$ ist dann offenbar $\frac{d\Pi}{d\vartheta}$. Es wird daher der ganze Summenausdruck (11) vollständig durch $\left(\frac{dT}{d\vartheta} - \frac{1}{dt}d\frac{dT}{d\vartheta'} + \frac{d\Pi}{d\vartheta}\right)\delta\vartheta$ angegeben; und indem wir jetzt aus den oben erörterten Gründen den Coefficienten von $\delta\vartheta$ gleich Null setzen, und dann successiv an die Stelle von ϑ die andern Variablen φ, ψ, ꝛc. treten laßen, erhalten wir

$$(14)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{dt}d\frac{dT}{d\vartheta'} - \frac{dT}{d\vartheta} - \frac{d\Pi}{d\vartheta} &= 0 \\ \frac{1}{dt}d\frac{dT}{d\varphi'} - \frac{dT}{d\varphi} - \frac{d\Pi}{d\varphi} &= 0 \\ \frac{1}{dt}d\frac{dT}{d\psi'} - \frac{dT}{d\psi} - \frac{d\Pi}{d\psi} &= 0 \\ \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot & \\ \cdot\cdot \quad \cdot\cdot \quad \cdot\cdot & \end{aligned}$$

Dieses sind die verlangten Gleichungen; ihre Anzahl ist dieselbe wie die der Variablen ϑ, φ, ψ, ... Bei ihrem Gebrauche wird man damit anfangen, daß man aus den ursprünglichen Bedingungsgleichungen (4) nach Anleitung von (12) und (5) die Function T, nämlich die halbe lebendige Kraft des Systems, durch die Variablen t, ϑ, φ, ψ, ... und ihre Derivirten ϑ', φ', ψ', ... ausdrückt. Durch eben dieselben Variablen sind die von den bewegenden Kräften abhängigen Größen in (14) auszudrücken. Alsdann kommt es darauf an, die so entstandenen Differentialgleichungen zu integriren; wenn dieses gelungen ist, so wird man, indem man die gefundenen Functionen von t an die Stelle von ϑ, φ, ψ ꝛc. in (4) einsetzt, die Coordinaten eines jeden Moleküls für jeden Werth von t zu berechnen im Stande sein.

Wenn in den Bedingungsgleichungen (4) die Zeit t nicht explicit vorkommt, und wenn auch die bewegenden Kräfte $X_1, Y_1, Z_1, X_2, \ldots Z_n$ blos Functionen der Coordinaten ohne t und ohne Differentialquotienten $\frac{dx_1}{dt}$ oder dgl. sind, so läßt sich sehr leicht eine der Gleichungen, welche dem Systeme (14) als erste Integrale entsprechen, ganz allgemein finden. In diesem Falle verschwinden nämlich für jeden der Indices $1, 2, \ldots n$ die Summen G und H, und man sieht aus (5) daß für $T = \frac{1}{2}\Sigma m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{ds^2}{dt^2}\right)$ ein Ausdruck von der Form

$$A\vartheta'^2 + B\vartheta'\varphi' + C\varphi'^2 + D\vartheta'\varphi' + E\psi'^2 + \cdots$$

zum Vorſchein kommt, welcher in Beziehung auf die Derivirten ϑ', φ', ψ', ... eine homogene Function vom zweiten Grade iſt. Nach dem bekannten Euler'ſchen Lehrſatze über homogene Functionen beſteht alſo die identiſche Gleichung

$$(15) \qquad \frac{dT}{d\vartheta'}\vartheta' + \frac{dT}{d\varphi'}\varphi' + \frac{dT}{d\psi'}\psi' + \cdots = 2T$$

Multipliciren wir nun die Gleichungen (14) nach der Reihe mit $d\vartheta$, $d\varphi$, $d\psi$, ... addiren die Produkte und bedenken, daß

$$d\frac{dT}{d\vartheta'}.\vartheta' + d\frac{dT}{d\varphi'}.\varphi' + \cdots = d\left(\frac{dT}{d\vartheta'}\vartheta' + \frac{dT}{d\varphi'}\varphi' + \frac{dT}{d\psi'}\psi' + \cdots\right) - \frac{dT}{d\vartheta'}d\vartheta' - \frac{dT}{d\varphi'}d\varphi' - \frac{dT}{d\psi'}d\psi' - \cdots$$

iſt, ſo erhalten wir mit Rückſicht auf (15) das Ergebnis

$$\begin{aligned} 0 = d(2T) &- \frac{dT}{d\vartheta'}d\vartheta' - \frac{dT}{d\varphi'}d\varphi' - \frac{dT}{d\psi'}d\psi' - \cdots \\ &- \frac{dT}{d\vartheta}d\vartheta - \frac{dT}{d\varphi}d\varphi - \frac{dT}{d\psi}d\psi - \cdots \\ &- \frac{dH}{d\vartheta}d\vartheta - \frac{dH}{d\varphi}d\varphi - \frac{dH}{d\psi}d\psi - \cdots \end{aligned}$$

Die Summe der in der zweiten Zeile ſtehenden Glieder zuſammengenommen mit den auf $d(2T)$ in der erſten Zeile folgenden Gliedern bildet aber das totale Differential von T. Andererſeits iſt bei der über die bewegenden Kräfte gemachten Vorausſetzung die Summe der in der dritten Zeile ſtehenden Glieder gleichbedeutend mit dem Differential von H. Folglich läßt ſich die vorſtehende Gleichung zuſammenziehen in

$$d(2T) - dT - dH = dT - dH = 0$$

und giebt mittelſt Integration

$$T = H + \text{Const.} \quad \text{d. h.} \quad \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 = \int \Sigma(X dx + Y dy + Z dz) + C.$$

oder nach Subſtitution des Werthes von H

$$(16) \qquad T = \tfrac{1}{2}\Sigma mv^2 = F(x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots z_n) + \text{Const.}$$

Hierdurch iſt diejenige Eigenſchaft der Bewegung der n Molekülen bewieſen, welche man gewöhnlich die Erhaltung der lebendigen Kräfte des Syſtems nennt.

§. 84.

Da der wesentliche Unterschied zwischen den Variationen δx, δy, δs, ... $\delta\vartheta$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$, ... welche bei diesen Untersuchungen der Dynamik benutzt zu werden pflegen, und den Differentialien dx, dy, ds, ... $d\vartheta$, $d\varphi$, $d\psi$, ... darin besteht, daß durch die letztern diejenigen Aenderungen vorgestellt werden, welche dem Wachsen von t in $t + dt$ entsprechen, während man bei der Bildung der ersteren immer den augenblicklichen Werth von t als constant behandeln und nur an eine Verschiebung des beweglichen Gebildes in eine unendlich wenig geänderte Position denken soll; so kann von der Variation δt in allen derartigen Entwickelungen keine Rede sein, was wir auch oben (S. 403) ausdrücklich bemerkt haben. Indessen darf man nicht aus dem Auge verlieren, daß hier blos von solchen Lehren der Dynamik die Rede war, die sich in ihren letzten Gründen auf das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten zurückführen laßen. Neben diesen wird man im Gebiete der Mechanik noch manche andere Anwendungen des Variationscalculs antreffen, worin Variationen wie δt, $d\delta t$ u. dgl. eine ganz bestimmte Bedeutung haben und entweder wirklich vorkommen oder gewißermaßen zufällig aus der Rechnung wegblieben. Als Beispiel kann uns ein Theorem dienen, welches unter dem Namen des Satzes von der kleinsten Wirkung (principium minimae actionis, principe de la moindre action) Berühmtheit erlangt hat und dessen Begründung mittelst der Variationsrechnung Anlaß zu einigen vielleicht nicht ganz unnützen Erläuterungen giebt. Die Behauptung besteht darin, daß wenn ein einzelner materieller Punkt m, oder ein System von einzelnen in irgend welchem Zusammenhang unter einander stehenden materiellen Punkten sich in Bewegung befindet, und wenn auf diese Punkte während der Bewegung entweder beschleunigende Kräfte gar nicht einwirken oder eine gewiße sogleich zu erwähnende Beschaffenheit haben, das Integral $\int mvds = m\int v^2dt$ beziehsw. die Summe $\Sigma m\int vds = \int\Sigma(mv^2)dt$ ein Minimum sei, wobei, in Beziehung auf jeden einzelnen der gegebenen Punkte, m die Masse, die man sich in ihm vereinigt denken soll, v die Geschwindigkeit bedeutet, und wobei vorausgesetzt wird, daß Anfangspunkt und Endpunkt des von einem jeden Punkt durchlaufenen Weges s so wie die Anfangsgeschwindigkeiten für die mit dem fraglichen Minimum zu vergleichenden (variirenden) Bewegungen dieselben sein sollen, wie bei der wirklich vor sich gehenden Bewegung. — Man hat in ältern und zu metaphysischen Speculationen

geneigteren Darſtellungen der Dynamik das Produkt der Maſſe in die Geſchwindigkeit und einen mit dieſer Geſchwindigkeit durchlaufenen unendlich kleinen Weg als eine Elementar-Action *) und das Integral hiervon, wenn ein einzelner materieller Punkt ſich bewegt, oder die Summe der einzelnen Integrale im Falle eines ſich bewegenden Syſtems, als die Total-Action aufgefaßt, und hat geglaubt als oberſten Grundſatz für das Walten der phyſiſchen Kräfte, als ein mit der höchſten Zweckmäßigkeit in der Einrichtung des Univerſums übereinſtimmendes Axiom erklären zu können, daß zur Herbeiführung einer mechaniſchen Veränderung der Aufwand von dieſer Thätigkeit möglichſt klein ſei **).

In Betreff der während der Bewegung des Syſtems einwirkenden beſchleunigenden Kräfte wird übrigens zum Beſtehen des Theorems erfordert, daß ſie in die Kategorie derjenigen gehören, für welche die im vorigen Paragraphen beſprochene „Function der Kräfte“

$$U = \int \Sigma(X dx + Y dy + Z dz) = F(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, \ldots z_n)$$

exiſtirt, welche mit der lebendigen Kraft des Syſtems nach Maßgabe der Gl. (16) zuſammenhängt. In den meiſten Fällen, nämlich bei dem Vorhandenſein ſolcher Kräfte, welche der Erklärung der Naturerſcheinungen größtentheils zu Grunde gelegt werden können, als Centralkräfte, die von feſten Mittelpunkten aus anziehend oder abſtoßend wirken, ſo wie anziehende oder abſtoßende Kräfte zwiſchen den einzelnen Molekülen des Syſtems, abhängig nach irgend einem Geſetze von den betreffenden Abſtänden, iſt jene Bedingung wirklich erfüllt, wie man leicht beweiſen kann ***).

Dies vorausgeſchickt, wenden wir uns nun zum Beweiſe des Satzes. Da wir jedoch hierbei keine andere Abſicht haben, als zu erläutern, wie die in unſern frühern Capiteln erörterten Grundbegriffe bei dynamiſchen Unterſuchungen von der hier vorliegenden Art zur Anwendung kommen,

---

*) Euler in einer ſehr merkwürdigen Abhandlung De motu projectorum, welche dem mehrfach von uns citirten Werke: Methodus inveniendi ect. angefügt iſt, nennt daſſelbe „motus elementaris“.

**) Maupertuis, der Erfinder dieſes Princips, ſagt: Lorsqu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action nécessaire pour ce changement est la plus petite qu'il soit possible (Hist. de l'Acad. de Berlin, Ann. 1746 p. 290). Der Verſuch, a priori nachzuweiſen, daß für dieſen hypothetiſch angenommenen möglich kleinſten Aufwand gerade der Ausdruck $\int \Sigma m v ds$ das richtige Maß ſei, konnte aber nicht gelingen.

***) Poisson Méc. No. 346. Duhamel, II. No. 63. Minding theor. Mech. No. 62. Ohm Mech. III §. 133. Bouchariat Mech. §. 523.

so wird es hinreichen, daß wir unsere Betrachtung auf die Bewegung eines einzigen Punkts beschränken. Rücksichtlich der sich zunächst aufdrängenden Frage, was die unmittelbar variirenden Functionen seien, haben wir darauf hinzuweisen, daß nach der Voraussetzung

1) alle zu vergleichenden Curven in demselben Punkte A anfangen und in B endigen sollen;

2) bei allen längs der variirenden Curven vor sich gehenden Bewegungen eine gleiche Anfangsgeschwindigkeit vorausgesetzt wird, und daß

3) wenn wir diese Anfangsgeschwindigkeit durch v_0 und die rechtwinkligen Coordinaten des Punkts A durch α, β, γ vorstellen, die Geschwindigkeit des beweglichen Molekülś fortwährend nach der Formel

$$(1) \qquad mv^2 = mv_0^2 + 2F(x, y, z) - 2F(\alpha, \beta, \gamma)$$

zu berechnen ist, welche aus Gl. (16) des vor. §. durch Bestimmung der Integrationsconstanten mittelst $v_0, \alpha, \beta, \gamma$ hervorgeht, — mag nun der Ort des beweglichen Molekülś ein Punkt der ursprünglich gedachten (wirklich durchlaufenen) Curve sein, oder mag er außerhalb derselben sich auf einer variirenden Nachbarcurve befinden, worin wir hypothetisch die Bewegung vor sich gehen laßen;

endlich 4) wird in den Fällen, wenn vorgeschrieben ist, daß die ursprünglich gedachte Bewegung auf einer gegebenen Fläche

$$(2) \qquad \Theta(x, y, z) = 0$$

Statt finde, als selbstverständlich vorausgesetzt, daß auch die in Vergleichung zu ziehenden Nachbarcurven nur auf dieser Fläche zu ziehen seien.

Wir können hiernach, indem wir anstatt des Lehrsatzes uns vielmehr das Problem vorlegen, die fragliche Minimumscurve zu bestimmen, gerade wie bei den ähnlichen Aufgaben in §. 45 fgg. y und z als variirende Functionen der Independenten x ansehen, und brauchen, weil die Endpunkte A und B fest sind, keine Variation δx in den Calkul einzuführen. Die Größe, welche ein Minimum werden soll, ist, wenn wir die Länge der gesuchten Curve AB mit S und die dem Endpunkte B zugehörige Abscisse x mit ξ bezeichnen,

$$U = \int_0^S v\,ds = \int_a^\xi v\frac{ds}{dx}\,dx = \int_a^\xi v\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}}\,dx$$

Die Geschwindigkeit v erleidet hierin, zufolge (1), nur eine mittelbare Variation δv, während δy, δz als unmittelbare Variationen (§. 5) aufzufaßen sind. Und ebenso erleiden auch die beiden andern in Betrachtung

zu ziehenden Variablen, nämlich nicht blos der durchlaufene Weg s, sondern auch die zur Zurücklegung dieses Wegs nöthige Zeit mittelbare Variationen, so daß die Variation dt einen bestimmten Sinn hat und von δy und δz abhängig ist.

Wir haben demnach zu setzen

$$\delta U = \delta \int v ds = \int_{\alpha}^{\xi} \frac{ds}{dx} \delta v dx + \int_{\alpha}^{\xi} v \delta \frac{ds}{dx} dx$$

Unter dem letzten dieser Integralzeichen ist

$$v\delta \frac{ds}{dx} dx = v \frac{dy d\delta y + dz d\delta z}{ds} \text{ oder auch } = \frac{dy d\delta y + dz d\delta z}{dt}$$

Mittelst partieller Integration erhält man daher

$$\int v\delta \frac{ds}{dx} dx = \left[\frac{dy}{dt}\delta y\right] + \left[\frac{dz}{dt}\delta z\right] - \int d\frac{dy}{dt}.\delta y - \int d\frac{dz}{dt}.\delta z$$

Andererseits folgt aus (1)

$$mv\delta v = \frac{dF(x, y, z)}{dy}\delta y + \frac{dF(x, y, z)}{dz}\delta z$$

und da die partiellen Differentialquotienten der Function $F(x, y, z)$ nichts anderes sind, als die nach den Coordinatenaxen genommenen Componentensummen der bewegenden Kräfte, für welche man nach der Voraussetzung dieselben Ausdrücke X, Y, Z zu benutzen hat, gleichviel ob die Bewegung längs der einen oder längs der anderen Curve gedacht werde; so haben wir

$$\delta v = \frac{Y}{mv}\delta y + \frac{Z}{mv}\delta z$$

Der erste Bestandtheil von δU ist daher so viel als

$$\int \left(\frac{Y}{mv}\delta y + \frac{Z}{mv}\delta z\right) ds = \int \frac{Y}{m}\delta y dt + \int \frac{Z}{m}\delta z dt$$

folglich wird im Ganzen

$$\delta U = \left[\frac{dy}{dt}\delta y\right] + \left[\frac{dz}{dt}\delta z\right] + \int \left(\frac{Y}{m}dt - d\frac{dy}{dt}\right)\delta y + \int \left(\frac{Z}{m}dt - d\frac{dz}{dt}\right)\delta z \qquad (3)$$

Diese Summe muß sich nun auf Null reduciren. Hierbei erfordern aber, gerade wie in §. 45 I) und III) die zwei schon erwähnten Fälle, daß nämlich entweder eine Fläche $\Theta = 0$ gegeben ist, oder nicht, eine verschiedene Behandlung. Im letztern Falle, wo man es mit einer freien

Bewegung zu thun hat, sind δy und δz ganz unabhängig von einander, und man gelangt sofort zu den Bedingungsgleichungen

$$(4)\qquad \begin{aligned} d\frac{dy}{dt} - \frac{Y}{m}dt = 0 \qquad &\text{d. h.} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{m} \\ d\frac{dz}{dt} - \frac{Z}{m}dt = 0 \qquad &\text{d. h.} \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{m} \end{aligned}$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (4) mit $\frac{dy}{dt}$, die zweite mit $\frac{dz}{dt}$ und addirt die Produkte zum Differential der Gleichung (1), nachdem man dieses durch $2m$ dividirt hat, nämlich zu

$$\frac{X}{m}dx + \frac{Y}{m}dy + \frac{Z}{m}dz = \tfrac{1}{2}d(v^2) = \tfrac{1}{2}d\left(\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dt}\right]^2\right)$$

so ergiebt sich noch

$$\frac{X}{m}dx = \frac{dx}{dt}d\frac{dx}{dt} \qquad \text{d. h.} \qquad (5) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m}$$

Die drei Gleichungen (4) und (5) sind aber genau die Differentialgleichungen für die freie Bewegung eines von den Kräften X, Y, Z angetriebenen Moleküls m. Da ferner an den Gränzpunkten A und B die in (3) außerhalb des Integralzeichens befindlichen Glieder verschwinden, so ist bei der wirklich vor sich gehenden Bewegung die Variation δU in der That gleich Null.

Wenn dagegen die Bewegung auf der durch (2) gegebenen Fläche vor sich gehen soll, so besteht zwischen δy und δz die Bedingungsgleichung

$$\partial_y\Theta\,\delta y + \partial_z\Theta\,\delta z = 0$$

Multipliciren wir dieselbe mit einem noch unbestimmten Factor $\lambda\frac{dt}{dx}dx$ d. h. λdt, und bringen das Produkt auf die bekannte Weise in Verbindung mit (3), so gelangen wir sofort zu dem Systeme

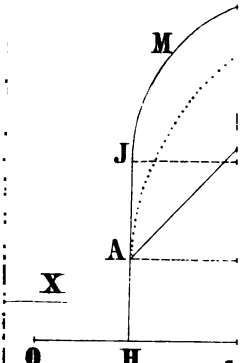
$$(6)\qquad \begin{aligned} d\frac{dy}{dt} &= \frac{Y}{m}dt + \lambda\partial_y\Theta\,dt \\ d\frac{dz}{dt} &= \frac{Z}{m}dt + \lambda\partial_z\Theta\,dt \end{aligned}$$

Gerade wie oben geschehen ist, wird man daraus, durch Verbindung mit dem Differential von (1), und unter Berücksichtigung von $d\Theta(x, y, z) = 0$, die dritte Gleichung

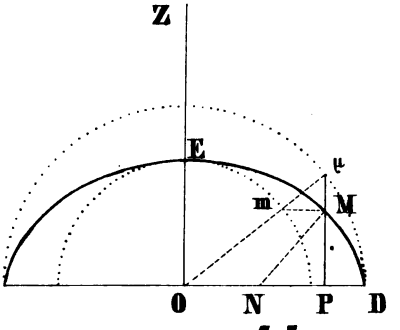
$$(7)\qquad d\frac{dx}{dt} = \frac{X}{m}dt + \lambda\partial_x\Theta\,dt$$

Verbeßerungen.

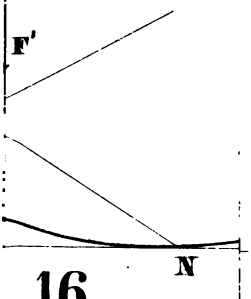
Seite.	Zeile.	
44	20	ſtatt „ſallen“ leſe man: fallen werde.
57	4 v. u.	ſtatt „ange“ leſe man: lange.
108	11	iſt von Gl. (6) an der Werth von Ξ_2 doppelt zu groß angegeben.
151	8 v. u.	ſtatt: $u\frac{d^2\mathfrak{A}_3 u''}{dx^3}$ leſe man $u\frac{d^2\mathfrak{A}_3 u''}{dx^2}$.
160	8 v. u.	iſt der Accent an ω'^2 nicht recht ſichtbar.
313	9	dieſe Formel für δU iſt mit (9) zu numeriren.
315	8	ſtatt „Verbindung mit (7)“ leſe man: Verbindung mit (9) und (10).



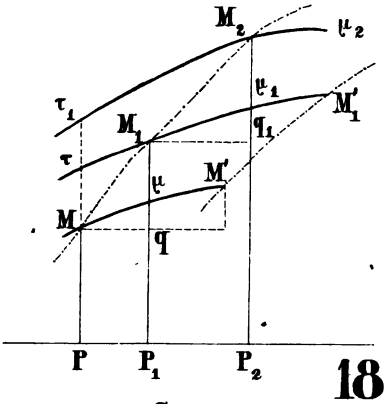
1



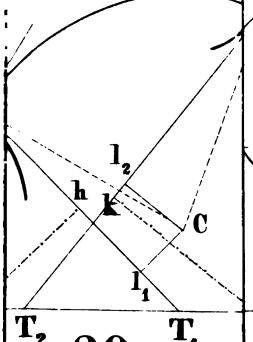
14.



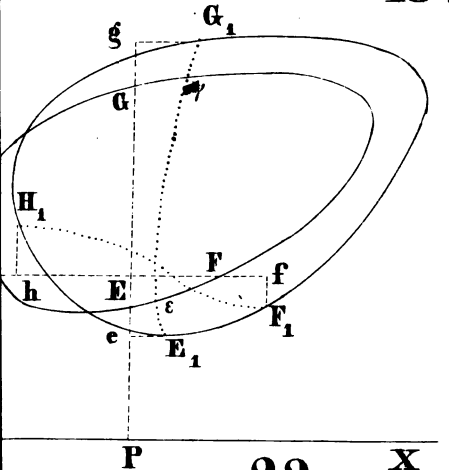
16.



18.



20.



22.

Lith. Anst. von J. A. Koch in Marburg.

Acme
Bookbinding Co., Inc.
100 Cambridge St.
Charlestown, MA 0. 129

3 2044 024 051 526

layed. Charge $20.

-NO -COND -FUTURE DATE
:ReqDate: 940704 :
:RecDate:

LIBRARY
UNIVERSITY OF TORONTO

Interli
Science
Univers

Thank you very much fo
material.
Le pret de cette publi
appreciés.

Acme
Bookbinding Co., Inc.
100 Cambridge St.
Charlestown, MA 0. 129

3 2044 024 051 526

layed. Charge A20.
-COND -FUTUREDATE
:ReqDate: 940704
:RecDate:
LIBRARY
UNIVERSITY OF TORONTO
Interli
Science
Univers
Thank you very much fo
material.
Le pret de cette publi
appreciés.